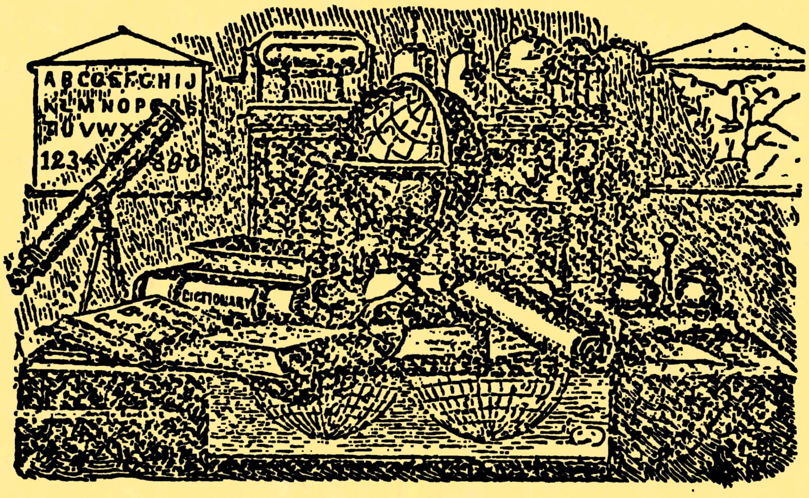
TRATADO

DE

ARITMETICA

POR

BENJAMIN ENDARA



QUITO

IMPRENTA MUNICIPAL

CARRERA DE OLMEDO Nº 1

1898

PROLOGO

Los muchos años de magisterio, y las mil dificultades con que hemos tenido que batallar, por motivo de la deficiencia y de la oscuridad de los textos, que son obra muerta en manos de los niños y de los jóvenes que emprenden sus estudios, y acaban por producir en éllos el hastío y la aversión á las verdades matemáticas, nos inspiraron la idea de escribir el presente TRATADO DE ARITMÉTICA, ya con el fin de hacer fácil y ameno, en lo posible, el aprendizaje de esta ciencia, árida y desabrida de suyo, pero necesaria al mismo tiempo, merced á la importante utilidad que presta en la vida práctica, y ya porque *el mayor bien que uno puede hacer á la República es dedicarse á enseñar á la juventud*, según decía el Orador Romano.

Dirigir al alumno por el camino del saber, de tal modo que él haga suya la enseñanza del maestro y se apropie de las ideas sin dificultad, es un deber del verdadero pedagogo.

El método que nosotros seguimos en nuestra obra es el siguiente, ó mejor dicho, es una escala de riguroso análisis. *En primer lugar, ponemos un ejemplo; en seguida, damos la explicación de éste, concisa, pero sumamente clara; y por último, deducimos la regla respectiva.*

Con el ejemplo, atraemos la afición del alumno, de una manera suave y halagadora; con la explicación, le demostramos la verdad aritmética, á fin de que quede satisfecho, y de esta suerte lo conducimos gradualmente desde las nociones elementales hasta llegar á los conocimientos superiores.

Por consiguiente, según el método adoptado en nuestra obra, el escolar no tendrá más trabajo que leer la explicación de cada ejemplo, para aprender Aritmética con grande facilidad y con aprovechamiento positivo, tanto más, cuanto que las 22 lecciones, que forman nuestro libro, están ilustradas con diferentes y numerosos problemas escogidos, que hacen práctico el estudio á un mismo tiempo.

Por lo demás, exponemos una relación histórica relativa *al origen de la Aritmética*, y otra concerniente *al del Sistema Métrico decimal*. También exponemos una comparación de las unidades de este sistema con las del antiguo.

En virtud de que el Ecuador tiene comercio directo con Francia, Inglaterra, España, Alemania y Norte-América, damos á conocer las monedas que circulan, respectivamente, en estas Naciones; en seguida enseñamos el modo de reducir la *moneda sucre* á la de aquellos países, primero á la par, y después tomando en consideración el cambio.

Además de esto, nuestra Aritmética contiene modelos de *facturas*, de *pagarés*, de *chekes* y de *letras de cambio*, que usan los comerciantes, los Tesoreros de Hacienda y los Bancos. Contiene, igualmente, una ligera exposición sobre los mismos Bancos, y otra relativa al origen de éstos.

Nuestro deseo y nuestro fin, al publicar este TRATADO DE ARITMÉTICA, no es otro que el de contribuír con este pequeño contingente al progreso de la juventud estudiosa y del comercio, como también en pro de los Institutores é Institutoras y de los Profesores de segunda enseñanza.

Quito, Abril 5 de 1897.

BENJAMÍN ENDARA.

República del Ecuador.—Gobernación de la provincia de Pichincha.—Quito, Abril 5 de 1897.

Sr. Rector de la Universidad Central.

Con suma complacencia tengo á bien remitirle, en 492 páginas manuscritas, un "Tratado de Aritmética" compuesto por el señor Benjamín Endara, á fin de que se sirva recabar de la Honorable Junta Universitaria–dignamente presidida por U.–que lo declare texto para los Establecimientos de primera enseñanza en las clases superiores, y para los de segunda en las de Humanidades.

Si se quiere saber de pronto el contenido de esta Aritmética, y formar juicio acerca de ella, basta leer el prólogo y el índice.

El sabio Padre Jesuita, Enrique Faura, y los muy notables matemáticos, Sres. Gualberto Pérez, Adolfo Géhin y Augusto N. Martínez, han fallado favorablemente sobre el mérito de la obra, previo el respectivo examen hecho con atención é interés según se vé en los certificados que envío adjuntos á la solicitud del autor.

Por tanto, encarezco vivamente á cada uno de los respetables miembros de la Junta Universitaria que, sin pérdida de tiempo, se sirvan tomar en consideración esta obra tan honrosa para nuestra República, y tan útil para la juventud estudiosa, como también para el comercio, á fin de que el autor–que merece toda alabanza y todo apoyo–haga imprimir pronto la obra, y en seguida forme un compendio para las clases ínfimas de las escuelas de ambos sexos.

Dios y Libertad.

Domingo A. Gangotena.

COLEGIO DE LA COMPAÑÍA DE JESÚS.

Por encargo de su mismo autor, el Sr. Benjamín Endara, he leído con atención el presente TRATADO DE ARITMÉTICA, *y lo encuentro* MUY COMPLETO Y ADECUADO *para el fin que se pretende: aclarar las teorías y facilitar la práctica, en las operaciones numéricas, á los principiantes de esta ciencia. Para ello abundan los ejemplos, son claras las reglas, parcas las explicaciones; en suma, es éste un libro* de buen método y cierta novedad *que, dando gloria á su autor, también dará lustre á su Patria, y facilidades á los maestros y discípulos para enseñar y aprender los primeros elementos de las Ciencias Exactas.*

Quito, 7 de Marzo de 1897.

ENRIQUE FAURA,
De la Compañía de Jesús.

Habiendo examinado detenidamente el TRATADO DE ARITMÉTICA *escrito por el Sr. Benjamín Endara, tenemos la satisfacción de informar que dicho Tratado está sujeto á la exactitud matemática y no contiene ningún error numérico. En cuanto al método que ha escogido el autor, á primera vista parece que es demasiado difuso y explicativo; pero se comprende que su idea ha sido la de ahorrar trabajo al maestro y facilitar el aprendizaje á las personas que, ya teniendo los conocimientos elementales de Aritmética, quieran perfeccionarse en esta ciencia, sin necesidad de profesor. Con respecto al sistema adoptado para tratar las diferentes cuestiones numéricas, hay buen orden y lógica; pues ha observado el método analítico, el cual, sujeto al raciocinio, ejercita el entendimiento y hace conclusiones exactas, de las cuales se deducen las diferentes reglas para resolver los varios problemas que constan al fin de cada lección. Las reglas de tres, interés, descuento, cambio, compañía, etc., están estudiadas de un modo práctico, y especialmente con aplicación á nuestro comercio; de modo que su conocimiento es* de mucha necesidad *para banqueros, comerciantes, agricultores, etc., y en general, para los que tengan negocios en nuestra República ó en el exterior; pues hay, para los diferentes casos, modelos de letras de cambio, chekes, etc., y la equivalencia de pesas, medidas y monedas nuestras con las de los países de mayor importancia comercial. El tratado del Sistema Métrico, que se halla intercalado en esta obra, es también de grande utilidad, una vez que debe ser perfectamente conocido por todos, ya que está generalmente reconocido por las principales Naciones del mundo civilizado, y que su aplicación en la nuestra es obligatoria por Decreto Legislativo. En resumen, el* TRATADO DE ARITMÉTICA *compuesto por el Sr. Endara, en nuestra opinión, reune las condiciones para servir,* con mucho provecho, *para la instrucción secundaria en las Escuelas y Colegios, donde se hacía sentir la falta de un texto adecuado, para facilitar la enseñanza al maestro y el estudio al discípulo.*

Quito, Marzo 20 *de* 1897.

J. Gualberto Pérez,
Ingeniero de Estado.

Adolfo Géhin,
Ingeniero Civil.

Augusto N. Martínez, Director del Observatorio Astronómico y Meteorológico de Quito, certifica bajo juramento: que ha examinado prolija y concienzudamente el TRATADO DE ARITMÉTICA *escrito por el Sr. Benjamín Endara, y á petición privada de este señor.*

Le es honroso informar, según su leal saber y entender, que difícilmente *se haya compuesto un* TRATADO DE ARITMÉTICA tan completo, *y al mismo tiempo* tan adecuado *para la enseñanza secundaria de nuestros Colegios y Escuelas superiores, por la claridad, sencillez y precisión de sus doctrinas, ilustradas por numerosos ejemplos que, por otra parte, hacen de estudio tan árido por sí, ameno y divertido.*

Todos los puntos que se refieren á la teoría científica de los números, á las operaciones mercantiles en general, y en especial á las de pesas, medidas, &., están manejadas con maestría, guardando siempre, eso sí, la admirable claridad y sencillez, *que han sido la norma del autor.*

Como el Sr. Benjamín Endara tiene intención de someter su obra á la Junta Universitaria de esta capital, el suscrito se hace un honor, y se toma la libertad de recomendar calurosamente el "Tratado de Aritmética" al juicio de tan Ilustre Junta; y no duda que, después de examinado, se le declarará texto de enseñanza para los Colegios y Escuelas superiores.

Quito, á 3 de Abril de 1897.

Augusto N. Martínez.

República del Ecuador.—Gobernación de la provincia de Pichincha.—Quito, Junio 3 de 1897.

Sr. D. Benjamín Endara.

En oficio signado con el Nº 46, *de esta fecha, el Sr. Rector de la Universidad Central me dice lo que á Ud. copio:*

"No he querido contestar á su atento oficio de 5 *del pasado, mientras no saber la resolución de la Junta Universitaria, respecto de la solicitud del Sr. Benjamín Endara, para que se declarase texto de enseñanza su obra de Aritmética; mas, ahora que dicha Junta, en sesión de* 1º *del presente, resolvió,* por unanimidad, *que la aludida obra sea* TEXTO OBLIGATORIO, *tengo á mucha honra comunicárselo, en atención al interés que Ud. manifiesta por todo lo que tiene relación con el adelanto público.—Dios y Libertad.—Ascencio Gándara".*

Lo cual me es satisfactorio transcribir á Ud. para su conocimiento y más fines.

Dios y Libertad.

Domingo A. Gangotena.

Secretaría de la Universidad Central del Ecuador.—Quito, á 3 de Junio de 1897.

Sr. D. Benjamín Endara.

La Junta Universitaria, en sesión de 1º del presente, aprobó el siguiente informe:

"Sr. Presidente de la Junta Universitaria:—Examinada la obra que, con el título de TRATADO DE ARITMÉTICA, *ha escrito el Sr. Benjamín Endara, he encontrado, en 22 lecciones de que ella se compone, todo lo importante y útil de esta difícil materia.—El autor ha empleado* un estilo claro y sencillo; *se ha esmerado en evitar al discípulo las explicaciones de viva voz que recibiera de su maestro, definiendo aún los términos técnicos pertenecientes á otras ciencias, y que ha tenido que emplearlos en problemas presentados como ejemplos aclaratorios de las reglas. Comparados varios artículos de la mencionada obra con otros iguales de diversos autores, se nota* mayor facilidad *de ser comprendidos en los del Sr. Endara.—Mi propio juicio puede ser erróneo; mas, honrosos informes de personas entendidas en la materia acompañan á la solicitud del autor, y en ellos la H. Junta podrá apoyar su criterio con más fundamento que en mis conceptos.—Por lo expuesto, salvo su más acertada opinión, soy del parecer que dicha obra la señale la H. Junta como texto para la enseñanza secundaria y para las clases supremas de la primaria. Así se premiará la constancia y laboriosidad del autor que, luchando á la vez con las necesidades imperiosas de la vida, ha empleado también el tiempo en un trabajo útil é instructivo á la juventud de su Patria.—Quito, Mayo 13 de 1897.—Antonio Guerra".*

Lo que me es altamente satisfactorio poner en su conocimiento, agregando que, después de tal aprobación, se dispuso también que su obra sea TEXTO OBLIGATORIO *para las clases á las cuales se refiere el informe; y que, de acuerdo con la atribución 10ª del art. 4º de la Ley Orgánica de Instrucción Pública, se oficie al Sr. Ministro del ramo, para que favorezca la publicación, conforme á la atribución 13ª del art. 6º de la misma Ley.*

Dios y Libertad.

Daniel Burbano de Lara.

Con el presente oficio devuelvo á U. su obra á la cual se refiere el informe.

TRATADO DE ARITMETICA

LECCION PRIMERA

Cantidad, unidad y número.

Cantidad es todo lo que se puede medir ó contar, como la superficie de un terreno, un montón de naranjas.

Se llama *unidad* una cantidad que se elige para medir otra de la misma especie.

Ejemplo.—Si se toma una vara, y se mide con ésta una pieza de zaraza, la *unidad* es la vara, y la cantidad es la *zaraza.*

Se llama *número* el resultado de medir ó comparar una cantidad con una unidad de la misma especie.

Ejemplo.—Si se aplica un metro sobre una ventana, para medir su longitud, y resulta que el metro, tomado como unidad, cabe exactamente una vez en la ventana, este resultado ó comparación, que se representa con este signo 1, llamado uno, es el *número.* Si se toma una vara, y se mide con ésta una pieza de percal, y resulta que la vara cabe veinte veces en el percal, este resultado ó comparación, que se representa con este signo 20, también se llama *número.*

Clasificación de la cantidad.

La cantidad es continua y discontinua ó discreta.

Continua es la que está formada de partes unidas entre sí.

Explicación.—Su carácter esencial consiste en que se puede aumentar ó disminuír indefinidamente, como la superficie de un terreno, que puede ser aumentada hasta donde se quiera, y también ser disminuída hasta llegar á lo que los físicos llaman *átomos.*

Cantidad discontinua ó discreta es la que está formada de objetos semejantes y separables.

Explicación.—Su carácter esencial consiste en que puede ser aumentada indefinidamente, pero no puede ser disminuída sino hasta llegar á uno de los objetos que la componen. Por ejemplo, un ejército puede aumentar indefinidamente por la agregación sucesiva de soldados y más soldados; pero no puede disminuír sino hasta llegar á un soldado, pues si se quiere llevar adelante la disminución, habrá que dividir al individuo en cabeza, tronco y miembros, lo cual equivale á acabar con su existencia.

La cantidad discontinua corresponde á lo que en Gramática se llama *sustantivo colectivo.*

DIFERENCIA ENTRE LAS DOS CANTIDADES.

La *cantidad continua* tiene dos caracteres: el uno consiste en que se puede medir dicha cantidad, esto es, compararla con la unidad que se ha elegido de la misma especie; y el otro consiste en proceder á contar las partes iguales á la unidad.

Ejemplo.—Si se mide una sala con un metro, para saber cuántos tiene de longitud, no se hace otra cosa que medir, esto es, comparar y contar; luego la cantidad continua es *mensurable y numerable.*

La *cantidad discontinua* tiene un solo carácter, y consiste únicamente en contar, tomando, como unidad ó punto de partida, uno de los objetos que la componen.

Ejemplo.—Para saber el número de alumnos que hay en un Colegio, no hay más que *contarlos*, tomando como unidad uno de ellos.

Clasificación de la unidad.

La unidad es abstracta y concreta, entera y fraccionaria.

Unidad abstracta es la que se expresa simplemente con las palabras *uno* ó *una.*

Unidad concreta es la que representa un objeto material ó inmaterial: material, como una casa, una mesa; inmaterial, como el alma humana, un ángel.

Unidad entera es la que representa un objeto completo, esto es, que no haga parte de otro, como un sombrero, una pluma.

Unidad fraccionaria es la que representa una parte de una unidad entera, dividida ó supuesta dividida en partes iguales, como un cuarto de hora, un décimo de sucre.

Observación.—Se entiende que estas unidades son fraccionarias, consideradas con relación á las unidades completas de donde proceden, que son la hora y el peso de ley; pero si se consideran dichas unidades aisladamente, entonces no son fraccionarias.

Formación de los números y numeración hablada.

La formación de los números consiste en la agregación sucesiva de la unidad.

La numeración hablada consiste en dar ciertos nombres convencionales á los números que van formándose.

Para todo esto, obsérvese el cuadro siguiente, advirtiendo que en la parte de la izquierda se enseña el modo de formar los números; y en la de la derecha, y al frente de cada número, está el respectivo nombre convencional.

FORMACIÓN DE LOS NÚMEROS DESDE UNO HASTA DIEZ.

Uno es....................	uno
Uno y uno..................	dos
Dos y uno..................	tres
Tres y uno.................	cuatro
Cuatro y uno...............	cinco
Cinco y uno................	seis
Seis y uno.................	siete
Siete y uno................	ocho
Ocho y uno.................	nueve
Nueve y uno................	diez

El conjunto de diez unidades forma una *decena.*

FORMACIÓN DE LOS NÚMEROS DESDE DIEZ HASTA VEINTE.

Diez y uno..................	once
Once y uno..................	doce
Doce y uno..................	trece
Trece y uno.................	catorce
Catorce y uno...............	quince
Quince y uno................	diez y seis
Diez y seis y uno...........	diez y siete
Diez y siete y uno..........	diez y ocho
Diez y ocho y uno...........	diez y nueve
Diez y nueve y uno..........	veinte

FORMACIÓN DE LOS NÚMEROS DESDE VEINTE HASTA TREINTA.

Veinte más uno..............	veintiuno
Veintiuno y uno.............	veintidós
Veintidós y uno.............	veintitrés
Veintitrés y uno............	veinticuatro
Veinticuatro y uno..........	veinticinco
Veinticinco y uno...........	veintiséis

Veintiséis y uno .... veintisiete
Veintisiete y uno .... veintiocho
Veintiocho y uno.............. veintinueve
Veintinueve y uno .... treinta, etc., etc.

PROBLEMAS

1º Una calle, un camino, las paredes de un edificio, un árbol, un cabestro, un telégrafo, un para-rayos, un volcán, un lago, un puente de madera ó de cal y canto, ¿qué clase de cantidades son?

2º Una carga de harina, de anís, de café; un pan de azúcar, una bala de cañón, un barril de vino, de pólvora; una damajuana de aguardiente, un frasco de aceite, ¿qué clase de cantidades son?

3º Una escuela, una población, una arboleda, un rebaño, un batajo de ganado, un montón de naranjas, una docena de libros ó sombreros, un millar de sucres, una reunión de hombres ó de señoras, una caballería, un colegio, ¿qué clase de cantidades son?

4º Una vara, un metro, un sombrero, un libro, un caballo, una casa, ¿qué clase de cantidades son?

5º Una ó más cuartas de una vara, una ó más hojas de un libro, uno ó más decímetros, una ó más letras de una sílaba ó de una palabra, ¿qué clase de unidades son?

LECCION SEGUNDA.

Numeración escrita.

Siendo así que los números se componen de la agregación sucesiva de la unidad, claro está que, al agregar á un grupo cualquiera de unidades otra unidad, resulta una serie infinita de números; y como cada número tiene un nombre convencional, resultaría también una serie infinita de nombres convencionales, que fatigarían la memoria y complicarían la representación por escrito. Era, pues, necesario algún artificio, esto es, un método particular que, por medio de ciertos signos convencionales, facilitara el modo de escribir los números. Este artificio ó este método particular es el que constituye la numeración escrita, que se define así:

La numeración escrita es el arte de representar todos los números por medio de ciertos signos convencionales, que se llaman *cifras*.

Si se dicta el número seiscientos ochenta y nueve millones, cuatrocientos veinticinco mil, setecientas noventa y seis unidades, habría que escribirlo con los mismos nombres ó palabras, lo cual sería muy embarazoso y cansado; y al dictar otros números, habría que escribir sus nombres correspondientes. Esta multitud de nombres daría origen á una confusión terrible.

Hé aquí la razón porque ha sido conveniente adoptar ciertos signos convencionales, para representar los números por escrito, como se ve á continuación, advirtiendo que los nombres de los números van en la primera línea horizontal, y los signos adoptados van debajo.

Uno	Dos	Tres	Cuatro	Cinco	Seis	Siete	Ocho	Nueve	Cero
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Las nueve cifras se llaman *significativas*, porque representan algún valor, y la última, que es el cero, se llama *símbolo de la nada*, porque no representa ningún valor.

Se han adoptado solamente estas diez cifras por dos razones: 1ª porque si se hubieran adoptado menos cifras, habría habido grande embarazo por falta de elementos para componer; 2ª porque si se hubieran adoptado más cifras, hubiera ocasionado esto un grande esfuerzo á la memoria. Para no incurrir, pues, en ninguno de las extremos, se han adoptado solamente diez cifras.

Sistema decimal de numeración.

Se llama *sistema de numeración*, en general, cualquier método que se adopte para expresar los números de palabra y representarlos por escrito.

La primera parte de este sistema, que tiene por objeto expresar los números por medio de palabras, constituye la *numeración hablada*, que ya se explicó en la lección primera; la segunda parte de este sistema, que tiene por objeto representar los números por medio de ciertos signos convencionales, constituye la *numeración escrita*, que también está ya explicada.

Se llama *sistema decimal de numeración* el arte que enseña á representar *todos los números posibles con sólo diez cifras.*

Todo sistema de numeración debe tener dos signos, por lo menos: uno que represente algún valor, y otro que no represente ningún valor.

El sistema decimal de numeración llena estas dos condiciones, porque dispone de nueve cifras, que representan algún valor, y dispone también del cero, que no representa ningún valor.

Este sistema tiene su origen en los diez dedos de las manos: los nueve números se llaman *dígitos ó simples;* y de la combinación de éstos, unos con otros, y con el cero, resultan los *compuestos.*

ESCRITURA DE LOS NÚMEROS DESDE DIEZ HASTA UN MILLÓN.

Es muy útil y conveniente escribir los nombres de los números desde diez hasta veinte en una línea horizontal, y escribir debajo, y al frente de cada nombre, la combinación respectiva de cifras, y hacer igual cosa hasta llegar á un millón; pero este trabajo queda á cargo del maestro ó profesor, á fin de que los alumnos adquieran ideas claras.

Sin embargo, se ponen á continuación los números desde diez hasta un millón, prescindiendo de los nombres. Agregando, pues, el número 1 al 9, se forma el 10; agregando el mismo 1 al 10, se forma el 11, y así sucesivamente.

Hé aquí los números desde diez hasta un millón: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1.000, 100.000, 200.000, 300.000, 400.000, 500.000, 600.000, 700.000, 800.000, 900.000, 1'000.000.

Del número 100 se pasó directamente al número 200, y de éste al número 300, hasta llegar de esta manera al millón, sin haber pasado por los números 101, 102, &., porque se supone que el maestro ó profesor los enseñará, lo mismo que los nombres de los números.

LECTURA DE NÚMEROS COMPUESTOS.

Ejemplo 1º—Sean los números 8, 7, 4, 5; y suprimiendo las comas, quedan así: 8745.

Explicación.—La cifra 5 representa sólo cinco unidades simples, que constituyen el *primer orden.*

La cifra 4 representa las unidades del *segundo orden*, que se llaman *decenas;* porque la cifra 4 ocupa el segundo lugar, partiendo de la derecha para la izquierda, y no representa simplemente cuatro unidades, sino cuarenta unidades, que hacen 4 decenas, puesto que cada diez unidades forman una decena.

La cifra 7 representa las unidades del *tercer orden*, que se llaman *centenas ó cientos.*

La cifra 8 representa las unidades del *cuarto orden*, que se llaman *miles* ó *millares*.

El número se lee así:

Ocho millares, siete centenas, cuatro decenas, cinco unidades, ó más sencillamente: ocho mil setecientos cuarenta y cinco.

Ejemplo 2º—Sea el número siguiente:

48276945103026542112

Explicación 1ª—Para leer este número, se lo divide, de derecha á izquierda, en grupos de á seis cifras, así: 48 276945 103026 542112.

En la parte superior, y á la derecha de la cifra 6 del segundo grupo, se escribe un 1, que significa *millón*; en el tercer grupo se escribe un 2, que significa *billón*, pero en la parte superior y á la derecha de la cifra 5; en el cuarto grupo, que sólo consta de dos cifras, se escribe un 3, que significa *trillón*, pero en la parte superior, y á la derecha de la cifra 8, así:

$48^3276945^2103026^1542112$

Explicación 2ª—Ahora se divide cada grupo en dos de á tres cifras, por medio de un punto, que significa *mil;* pero el punto se escribe en la parte inferior, y á la derecha de la cuarta cifra, así:

$48^3276.945^2103.026^1542.112$

Una vez dividido el número de esta manera, se lee así:

Cuarenta y ocho trillones; doscientos setenta y seis mil, novecientos cuarenta y cinco billones; ciento tres mil, veintiséis millones; quinientos cuarenta y dos mil, ciento doce unidades.

Ezplicación 3ª—Todo grupo consta de tres cifras, y se leen separadamente así, comenzando de la derecha para la izquierda:

Unidades, decenas, centenas simples.

Las cifras del segundo grupo se leen así:

Unidades de millar, decenas de millar, centenas de millar.

Las del tercer grupo se leen así:

Unidades de millón, decenas de millón, centenas de millón.

Las del cuarto grupo se leen así:

Unidades de millar de millón, decenas de millar de millón, centenas de millar de millón.

Las del quinto grupo se leen así:

Unidades de billón, decenas de billón, centenas de billón.

Las del sexto grupo se leen así:

Unidades de millar de billón, decenas de millar de billón, centenas de millar de billón.

Las del séptimo se leen así:

Unidades de trillón, decenas de trillón.

Explicación 4ª—El primer grupo de la derecha se llama *grupo de las unidades simples;* el segundo, *grupo de los millares;* el tercero, *grupo de los millones;* el cuarto, *grupo de los millares de millón;* el quinto, *grupo de los billones;* el sexto, *grupo de los millares de billón;* el séptimo, *grupo de los trillones.*

Explicación 5ª—En el tercer grupo, que es el de los millones, no hay centenas, y por esto se escribe cero, á fin de que no quede vacío ese lugar.

En el cuarto grupo no hay decenas, y por esto se escribe cero, á fin de que no quede vacío ese lugar.

Ejemplo 2º—Sea el número siguiente:

89542069328054100976000923863

Con vista de las explicaciones que anteceden, el número propuesto se escribe así:

$89.542^4069.328^3054.100^2976.000^1923.863$

Explicación 1ª—El séptimo grupo se llama *grupo de los trillones;* el octavo, *grupo de los millares de trillón;* el noveno, *grupo de los cuatrillones;* y el décimo, *grupo de los millares de cuatrillón.*

Explicación 2ª—En el grupo de los millones no hay unidades, decenas ni centenas, y por esto se escriben tres ceros. Lo mismo se hace en todo grupo donde no hay cifra ó cifras significativas.

El número propuesto se lee así:

Ochenta y nueve mil, quinientos cuarenta y dos cuatrillones; sesenta y nueve mil, trescientos veintiocho trillones; cincuenta y cuatro mil, cien billones; novecientos setenta y seis mil millones; novecientos veintitrés mil, ochocientas sesenta y tres unidades simples.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para leer un número compuesto de varias cifras, se lo divide, de derecha á izquierda, en grupos de á seis. En la derecha del segundo grupo, y hacia la parte superior, se escribe un uno* (1), *que significa millón. En cada uno de los grupos siguientes, y en el mismo lugar, se escribe un dos* (2), *un tres* (3), *etc., que significa billón, trillón, etc. En seguida se divide cada grupo en dos de á tres cifras; por medio de un punto, que significa mil. Por último, se lee el número, de izquierda á derecha, pronunciando las palabras cuatrillón, trillón, billón, millón, donde haya* 4, 3, 2, 1; *y mil, donde haya punto.*

Convenciones en que se funda el sistema decimal de numeración.

Estas convenciones son tres:

1ª *Toda cifra colocada á la izquierda de otra, representa valores diez veces mayores que los que representa la cifra inmediata de la derecha.*

2ª *El orden de valores que representa una cifra, depende del lugar que ocupa.*

3ª *Cuando la cifra que figure en un número compuesto, sea el cero, quiere decir que dicho número no tiene valores del orden que indica el lugar ocupado por el cero.*

Escritura de números compuestos.

Ejemplo 1º—Sea el número veintidós millones; trescientos cuarenta y cinco mil, treinta y siete unidades, el cual se escribe así: $22^{1}345.037$

Ejemplo 2º—Sea el número un millón y medio, el cual se escribe así: $1^{1}500.000$. Decir millón y medio es lo mismo que decir un millón quinientos mil.

Ejemplo 3º—El número quinientos sesenta y dos trillones, cuatrocientos millones, catorce unidades simples, se escribe así:

$$562^{3}000.000^{2}000.400^{1}000.014$$

Explicación.—Como faltan el grupo de los millares de billón, el de los billones y el de los millares de millón, se reemplazan estos tres grupos con nueve ceros, y se escribe el signo del billón y el de mil en los lugares correspondientes.

En el grupo de los millones no hay unidades ni decenas, y por esto se escriben dos ceros; en el grupo de los millares se escriben tres ceros, porque no hay unidades, decenas ni centenas:

En el grupo de las unidades simples no hay centenas, y por esto se escribe un cero.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para representar un número compuesto de varias cifras, se lo escribe, de izquierda á derecha, en grupos de á tres. En el lugar en que se pronuncien las palabras cuatrillón, trillón, etc., se escribe un 4, un 3, etc., en la derecha del grupo respectivo y en la parte superior. En el lugar en que se pronuncie la palabra mil, se escribe un punto. Cuando no se dictan cifras significativas, se llenan con ceros los lugares correspondientes.*

OTRO EJEMPLO

$$845.900^{8}291.986^{7}220.503^{6}754.201^{5}325.789^{4}138.642^{3}304.482^{2}309.898^{1}763.984$$

Una vez dividido el número de este modo, según las reglas anteriores, se lee así:

Ochocientos cuarenta y cinco mil, novecientos octillones; doscientos noventa y un mil, novecientos ochenta y seis septillones; doscientos veinte mil, quinientos tres sextillones; setecientos cincuenta y cuatro mil, doscientos un quintillón; trescientos veinticinco mil, setecientos ochenta y nueve cuatrillones; ciento treinta y ocho mil, seiscientos cuarenta y dos trillones; trescientos cuatro mil, cuatrocientos ochenta y dos billones; trescientos nueve mil, ochocientos noventa y ocho millones; setecientos sesenta y tres mil, novecientas óchenta y cuatro unidades simples.

Observación.—De los octillones á los septillones hay seis cifras, divididas en dos grupos de á tres; de los septillones á los sextillones se dice lo mismo, y otro tanto hasta llegar á las unidades simples.

Cifras arábigas.

Las diez cifras con que se representan todos los números que puedan formarse, y que son el objeto del presente estudio, se llaman *arábigas*.

Al Papa Silvestre II se atribuye la introducción de los números arábigos en Europa.

La Arabia es una península que se halla situada al Sud-Oeste del Asia.

Historia de la Aritmética.

Es difícil precisar el origen de esta ciencia; sin embargo, ella no ha tenido principio sino con el descubrimiento y propagación de los métodos, del cálculo y de las convenciones numéricas, que han constituído este conjunto de conocimientos, llamado ARITMÉTICA.

Los historiadores antiguos, que se han ocupado en averiguar el origen de la Aritmética, apenas dan indicaciones, y aun éstas son contradictorias, las más de las veces.

Josefo afirma que el Patriarca Abraham, cuando abandonó la Caldea, durante la época del hambre, para entrarse en el Egipto, fué el primero que enseñó la Aritmética y la Astronomía á los habitantes de ese país.

Platón juzga que la Aritmética y la Geometría traen su origen de los egipcios, á quienes fueron enseñadas por el dios Thot.

Lo que hay de notable sobre este particular, es que las indagaciones históricas confirman que casi todos los pueblos han adoptado el método de calcular por *grupos de á diez*, cuya idea se encuentra en los *diez dedos de las manos.*

Los primeros calculistas operaban con guijarros, y también por medio de los dedos. Se sirvieron, además, de fichas colocadas sobre ranuras, dispuestas en una tabla, al par que de bolas enhebradas en una varilla de hierro.

Los hebreos y los griegos, y después de ellos, los romanos, se sirvieron de las letras del alfabeto, para representar los números.

No obstante esta ligera exposición, es preciso reconocer que la Aritmética moderna viene de los árabes; pero éstos deben su conocimiento á los pueblos de la India, y los caracteres que nosotros llamamos *cifras arábigas*, ellos llamaban *cifras indias*.

Números romanos ó latinos.

Siendo la numeración romana ó latina de aplicación constante, es muy útil conocer sus cifras. Estas se usan en la numeración de los títulos, de los capítulos y de las lecciones de un libro cualquiera; en los relojes; en la división de un capítulo en secciones; en la numeración de años y de las épocas de un año; en la de teoremas y en otros varios casos.

CIFRAS ARÁBIGAS	CIFRAS ROMANAS Ó LATINAS
1	I
2	II
3	III
4	IIII ó IV
5	V
6	VI
7	VII
8	VIII
9	VIIII ó IX
10	X

CIFRAS ARÁBIGAS	CIFRAS ROMANAS Ó LATINAS
11	XI
12	XII
13	XIII
14	XIIII ó XIV
15	XV
16	XVI
17	XVII
18	XVIII
19	XVIIII ó XIX
20	XX
30	XXX
40	XXXX ó XL
50	L
60	LX
70	LXX
80	LXXX
90	LXXXX ó XC
100	C
200	CC
300	CCC
400	CCCC ó CD
500	D
600	DC
700	DCC
800	DCCC
900	DCCCC ó CM
1.000	M

Ejemplo 1º XL

Explicación.—Se resta el valor de la letra menor del de la mayor, por estar la letra menor antes de la mayor, así: XL=50−10=40

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para averiguar el valor que representan dos letras, cuando la menor está antes de la mayor, se resta el valor de la letra menor del de la mayor.*

Ejemplo 2º XV y XX

Explicación.—Cuando la letra de valor menor está después de la letra de valor mayor, ó cuando las letras son de igual valor, se suman los valores respectivos, así: XV=10+5=15; XX=10+10=20

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para averiguar el valor que representan dos letras, cuando la letra de valor menor está después de la le-*

tra de valor mayor, ó cuando las letras representan valores iguales, se suman los valores de las letras.

Ejemplo 3º—El número mil cuatrocientos cincuenta y cinco se escribe así: MCDLV.

El número setenta y cuatro se escribe así: LXXIV.

PROBLEMAS

Léanse los números siguientes:

1º 3586004938532100 9
2º 9600000089700000
3º 785340725012
4º 12345679

Escríbanse los números siguientes:

1º Dos millones y medio.
2º Setenta y dos trillones, novecientos millones.
3º Veinte cuatrillones, cincuenta y cinco billones.
4º Siete quintillones, noventa y dos trillones, cuatro mil unidades simples.
5º Dos sextillones, cuarenta y ocho cuatrillones, doce mil unidades simples.
6º Medio millón.

LECCION TERCERA

Clasificación del número.

El número *es simple y compuesto, par é impar, entero, quebrado y mixto.*

Número simple, que también se llama *dígito*, es el representado por una sola cifra, como 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y nada más.

Número compuesto es el que consta de dos ó más cifras, como 10, 12, 13, y todos los que siguen hasta donde se quiera.

Número par es el que se puede dividir en dos partes iguales y enteras, como 4, 6, 8, 10.

Explicación.—El cuatro se puede dividir en *dos* más *dos*; el seis, en *tres* más *tres*; el ocho, en *cuatro* más *cuatro*; y el diez, en *cinco* más *cinco*.

Número impar es el que no se puede dividir en dos partes iguales y enteras, como 3, 5, 7, 9, 11.

Número entero es una unidad entera ó una colección de unidades enteras.

Ejemplo.—Si se aplica una vara á una mesa, para medir la latitud, y resulta que la vara cabe una sola vez, este resultado es el que se llama *número entero;* y si se aplica la misma vara á la pared de un edificio, para medir su altura, y resulta que tiene cuatro varas, este resultado se llama también *número entero;* pues indica que la vara, tomada como unidad de medida, se ha repetido cuatro veces al aplicarla á la pared, y por lo tanto, es una colección de unidades, esto es, de varas.

Número quebrado ó *fracción* (1) es el que expresa una ó más partes iguales de una unidad entera, como un cuarto de hora, tres cuartos de hora, que se escriben así: $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$.

Explicación. Un cuarto de hora es una de las cuatro partes de que consta la hora, que es una unidad entera, y lo mismo se dice del otro quebrado.

Número mixto es el que se compone de entero y quebrado, como nueve varas de paño y tres cuartas, que se escribe así: 9vs. $\frac{3}{4}$.

Si se mide una pieza de grano de oro con una vara, y ésta cabe veintiséis veces en el grano de oro, y sobran todavía dos cuartas, este resultado es el que se llama *número mixto,* y se escribe 26 vs. $\frac{2}{4}$.

Número concreto es el que determina la naturaleza de la unidad de que está formado, como tres naranjas, cinco sucres.

Número abstracto es el que no determina la naturaleza de la unidad de que está formado, como 2, 4.

División del número quebrado.

El número *quebrado ó fracción* es *propio é impropio:* es *propio,* si expresa una ó más partes de una unidad entera, y cuyo valor es menor que el de la unidad, como dos tercias de vara, seis décimos de sucre, que se escriben así: $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{10}$.

Explicación.—Como la vara tiene tres tercias, y sólo se han tomado dos, es claro que falta tomar la otra tercia, para completar la vara, y por lo mismo, el valor de las dos tercias es menor que el de las tres tercias, que forman la vara. Para representar las dos tercias por medio del número respectivo, se escribe el 2 encima de una pequeña línea horizontal, y debajo de ésta se escribe el 3. El número que está encima de la línea, se llama *numerador,* é indica las partes que se han tomado de la vara dividida en tres tercias; el número que está debajo de la línea se llama *denominador,* é indica el número total de tercias.

El numerador del segundo quebrado indica que, de los diez reales que tiene un sucre, sólo se han tomado seis; y el denominador indica el total de los reales. Lo que se dice de estos ejemplos, se dice de cualquier otro.

El *numerador* y el *denominador* se llaman *términos del que-*

(1) La palabra *fracción,* en Gramática, significa que la división se hace de cualquier modo; pero en Aritmética, la división se hace por partes iguales.

brado ó de la fracción; y los quebrados formados de este modo se llaman *quebrados ó fracciones ordinarias.*

Quebrado impropio es el que expresa partes de una unidad entera, y cuyo valor es igual al de la unidad ó mayor que el de la misma unidad, como cuatro cuartillos, seis cuartas de vara, qué se escriben así: $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{4}$.

Explicación.—El denominador del primer quebrado indica el número total de cuartillos, y el numerador indica que se han tomado todos cuatro cuartillos; luego el valor del quebrado es igual al de la unidad entera, que es un real.

El denominador del segundo quebrado indica el número total de cuartas, y el numerador indica que se han tomado todas cuatro cuartas, más otras dos.

LECCION CUARTA

Definición de la Aritmética.

Los números pueden aumentar, disminuír, y combinarse los unos con los otros. Los procedimientos empleados para formar las diversas combinaciones de los números, se llaman *cálculos;* y la ciencia que enseña á calcular es la ARITMÉTICA.

La *Aritmética es la ciencia de los números.* La palabra Aritmética se deriva del griego *arithmos*, que quiere decir *número.*

Las operaciones que pueden practicarse con los números, ya combinándolos, ya componiéndolos, ya descomponiéndolos, son muchísimas; pero de éstas, las fundamentales son la *adición* ó *suma*, la *sustracción* ó *resta*, la *multiplicación* y la *división.* Estas cuatro operaciones se reducen propiamente á dos, esto es, á la suma y á la resta; porque la multiplicación no es sino una suma abreviada, y la división una resta abreviada.

Pero antes de estudiar estas operaciones, conviene saber que á cada una corresponde cierto símbolo que se llama *signo*, el cual se escribe entre los números con los que debe practicarse la operación respectiva.

Estos signos son los siguientes: una cruz perpendicular +, que se llama *signo más;* una pequeña línea horizontal —, que se llama *signo menos;* una cruz oblicua ×, que se llama *signo de multiplicación;* y un ángulo formado por una línea vertical y una horizontal ∟, que se llama *signo de división.*

La adición ó suma se indica por medio del *signo más*, y se coloca entre dos ó más números. Para sumar, por ejemplo, el número seis con el cuatro, se indica así: $6+4$

La sustracción ó resta se indica con el *signo menos*, y se coloca solamente entre dos números. Para restar ó quitar del número doce el número cinco, se indica así: 12—5

La multiplicación se indica por medio del *tercer signo*, y se coloca entre dos ó más números. Para multiplicar el número siete por tres, se indica así: 7×3

Observación.—La multiplicación se indica también por medio de un punto, colocado entre los números, así: $7 \cdot 3$

La división se indica por medio del *cuarto signo.* Para dividir el número veinticuatro por ocho, se indica así: 24 | 8

La división se indica también bajo la forma de quebrado, así: $\frac{24}{8}$

El paréntesis ( ) es también un signo, é indica que se debe formar un grupo con los números colocados dentro de él, y ejecutar luego con este grupo la operación correspondiente.

Si se tiene la expresión $8+(12-7)$, significa que se reste el 7 del 12, y esta diferencia se agregue al número 8, así: $8+5$. Se ha formado, pues, un grupo con los números colocados dentro del paréntesis, que dan 5 por diferencia; y con este grupo se ha ejecutado la suma.

Signo de igualdad.—Cuando se quiere expresar que dos números son iguales, se colocan entre ellos dos pequeñas líneas horizontales, la una sobre la otra, de este modo: =, y se lee *igual á.*

Sea la expresión $8=8$; y toda esta expresión forma lo que se llama una *igualdad.* El número que está antes del *signo igual*, se llama *primer miembro;* y el que está después del signo, se llama *segundo miembro.*

Signo de desigualdad.—Cuando se quiere expresar que un número es mayor que otro, se coloca entre ellos este signo >; y se lee *mayor que.*

Ejemplo. $8>5$

Viceversa, cuando se quiere expresar que un número es menor que otro, se coloca entre ellos este signo <; y se lee *menor que.*

Ejemplo. $9>12$

Las dos expresiones $8>5$ y $9<12$ forman lo que se llama una *desigualdad.* El número que está antes del signo mayor ó menor, se llama *primer miembro;* y el que está después de dicho signo, se llama *segundo miembro.*

Cuestiones que se ofrecen en esta ciencia.

El enunciado de una cuestión es una frase ó frases que sirven para expresar el objeto de dicha cuestión.

Las cuestiones que más comúnmente se ofrecen, son el *axioma*, el *teorema*, el *problema*, el *escolio* y el *corolario.*

El *axioma* es una verdad evidente por sí misma, y se com prende con sólo oírla enunciar ó poner ejemplos de su contenido.

Los principales axiomas son los siguientes:

1º *El todo es mayor que la parte.*
2º *El todo es igual á las partes juntas.*
3º *La parte es menor que el todo.*
4º *Si á cantidades iguales se agrega una misma cantidad, los resultados son iguales.*
5º *Si de cantidades iguales se quita una misma cantidad, los resultados son iguales.*
6º *Si á cantidades desiguales se agrega una misma cantidad, los resultados son desiguales.*
7º *Si de cantidades desiguales se quita una misma cantidad, los resultados son desiguales.*
8º *Si cantidades iguales se multiplican ó se dividen por una misma cantidad, los resultados son iguales.*
9º *Si cantidades desiguales se multiplican ó se dividen por una misma cantidad, los resultados son desiguales.*
10º *Una cantidad puede agregarse á otra de la misma especie, agregando, en un orden cualquiera, todas las partes de la una á todas las partes de la otra, y reunir después los resultados.*
11º *Si cada una de las partes de un todo se hace un cierto número de veces mayor ó menor, el todo se hace el mismo número de veces mayor ó menor.*
12º *Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.*

El *teorema* es una cuestión que se propone, para que sea demostrada.

Ejemplos.—Un quebrado no altera de valor, si se multiplican ó se dividen sus dos términos por una misma cantidad. El orden de los factores no altera el producto.

El *problema* es una cuestión que se propone, para que sea resuelta.

Ejemplos.—Saber cuánto sobra de 2.000 sucres, después de dar 1.300 á un hospital y 500 á una familia huérfana. Saber cuánto debe pagarse al cabo de un año por el arriendo de una casa, á razón de 10 sucres por mes.

El *escolio* es una observación que se hace sobre un teorema ya demostrado ó sobre un problema ya resuelto; pero no es necesario que la observación se haga sobre un teorema ó problema; puede hacerse también sobre cualquier otro punto.

El *corolario* es una consecuencia que se deduce de un teorema ya demostrado, ó de un problema ya resuelto.

Método de demostración.

Se llama *método* (1) el procedimiento que debe seguirse para demostrar un teorema.

Los métodos son dos: *método directo* y *método del absurdo.*

El *método directo* consiste en establecer una serie de raciocinios, fundados en verdades conocidas, y que conduzcan á poner en evidencia el teorema que se trata de demostrar.

El *método del absurdo* consiste en suponer que no es cierto lo que se va á demostrar, y en hacer ver que de tal suposición resulta una consecuencia notoriamente absurda ó contraria á las condiciones establecidas en el enunciado del teorema.

En cada una de las cuatro operaciones es preciso tener en cuenta cinco cosas:

1ª La *definición*, que no es sino la explicación de una cuestión cualquiera, ya sea un teorema ó un problema.

2ª La *regla*, que no es sino la ley que debe seguirse en un procedimiento, para llegar al resultado de un teorema ó de un problema.

3ª La *demostración*, que no es sino una prueba de que la regla está conforme con la definición.

4ª El *uso*, que indica las casos en que debe emplearse tal ó cual operación.

5ª El *ejemplo*, que no es sino la aplicación de la regla.

PROBLEMAS

1º $6+5$; $7+8+2$; $94+35$; $758+382$

El *signo más* se coloca entre dos, tres ó más números, y éstos pueden ser simples ó compuestos, ó unos simples y otros compuestos.

2º $9-5$; $28-7$; $76-42$

El *signo menos* se coloca solamente entre dos números, y éstos pueden ser simples ó compuestos, ó compuesto el uno y simple el otro, ó ambos compuestos de dos ó más cifras.

3º 5×6, ó 5.6; $4\times2\times3$, ó $4.2.3$

El signo de multiplicar se coloca entre dos ó más números, y éstos pueden ser simples ó compuestos, ó unos simples y otros puestos, ó todos compuestos de dos ó más cifras.

El signo de la división se coloca solamente entre dos números, y éstos pueden ser simples ó compuestos, ó el uno compuesto y el otro simple, ó ambos compuestos de dos ó más cifras.

4º $6+(8+4)$; $3+8+2\ (20-12)$

5º $5<14$; $36>11$

---

(1) En Filosofía se define el *método* diciendo que es el modo de evitar el error y encontrar y demostrar la verdad; en Pedagogía se dice que es el medio de inculcar los conocimientos más útiles á los niños.

6° 6=6; 28=28; 786=786

Todo lo relativo á las igualdades está mejor tratado al fin de la lección octava.

LECCION QUINTA

Adición ó suma de números enteros.

La *suma* es una operación que tiene por objeto reunir en un solo número todas las unidades de la misma especie, contenidas en dos ó más números dados. El resultado de la operación se llama *suma* ó *total*; y los números dados se llaman *sumandos, cantidades ó partidas.*

Verdades axiomáticas en que se funda la práctica de la suma.

Estas verdades son tres:

1ª *Una cantidad puede agregarse á otra de la misma especie, agregando, en un orden cualquiera, todas las partes de la una á todas las partes de la otra, y reunir después los resultados.*

2ª *Los sumandos deben ser de una misma especie, para que pueda hacerse la suma.*

3ª *La suma ó total es de la misma especie de la de los sumandos.*

Explicación.—Se dice que los sumandos sean de una misma especie, porque no puede sumarse, por ejemplo, libros con bancas, con pizarras, etc., pues no se sabría de qué especie es la suma; pero sumando separadamente libros con libros, bancas con bancas, etc., daría por suma ó solamente libros ó solamente bancas, de acuerdo con la tercera verdad axiomática.

Casos que ocurren en la suma de números enteros.

Se distinguen tres casos.

1° *Sumar un número dígito con otro dígito.*

2° *Sumar un número compuesto con un dígito.*

3° *Sumar números compuestos cualesquiera.*

Para resolver el *primer caso*, basta recurrir á la tabla que sigue:

TABLA DE LA SUMA

Columnas horizontales

Columnas verticales

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Explicación.—Para formar esta tabla, se escriben en la primera columna horizontal las cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; en las siguientes columnas horizontales se escriben estas mismas cifras, aumentada cada una en una unidad, esto es, para formar la segunda columna horizontal, se aumenta una unidad á cada una de las cifras de la primera columna.

Para formar la tercera columna, se aumenta una unidad á cada una de las cifras de la segunda columna, y así sucesivamente.

Para encontrar, por ejemplo, la suma de los números 7 y 9, se busca el 7 en la primera columna horizontal, y el 9 en la primera columna vertical de la izquierda. Se pone un dedo de la mano derecha sobre el 7, y un dedo de la mano izquierda sobre el 9; se corren los dedos por las columnas respectivas, y el cuadro común á estas columnas es el que contiene la suma buscada, que es 16, y se hace lo mismo con cualquier otro ejemplo.

Para resolver el *segundo caso* se aplica la siguiente

Regla.—*Para sumar un número compuesto con un dígito, se escribe el dígito debajo de las unidades del compuesto, y se traza una línea horizontal de longitud conveniente. Se suma el dígito* *con las unidades del compuesto, y se escribe la suma debajo de la línea, si es que no pasa de nueve; pero si pasa de nueve, se averigua entonces la decena contenida en dicha suma, para agregarla á las decenas respectivas, y luego se repite cada una de las cifras del compuesto.*

Ejemplos.

1º 7.485	2º 9.864	3º 48.597
3	9	8
7.488	9.873	48.605

Explicación del primer ejemplo.—Se comienza á sumar por la derecha, agregando á las unidades del dígito las del compuesto, y se dice así: 5 y 3 son 8 unidades; y como esta suma no pasa de 9, se la escribe debajo de la línea, y luego se repiten las decenas, centenas, etc.

Explicación del segundo ejemplo.—Se dice: 4 y 9 son 13 unidades; en 13 unidades hay 1 decena y sobran 3 unidades, las cuales se escriben debajo de la línea, y se agrega la decena á las decenas respectivas, diciendo: 6 y 1 son 7 decenas, y se repiten luego las centenas, los millares.

Explicación del tercer ejemplo.—Se dice: 7 y 8 son 15 unidades; en 15 unidades hay 1 decena y sobran 5 unidades, las cuales se escriben debajo de la línea, y se agrega la decena á las decenas respectivas, diciendo: 9 y 1 son 10 decenas. En 10 decenas hay 1 centena, y no sobra ninguna decena; se escribe cero en lugar de las decenas, y se agrega la centena á las centenas respectivas; y se repiten, por último, los millares, las decenas de millar.

Para resolver el *tercer caso*, se aplica la siguiente

Regla.—*Para sumar números compuestos, se escriben los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades con las unidades, las decenas con las decenas, etc. Se traza por debajo del último sumando una línea horizontal de longitud conveniente, y se comienza á sumar de arriba para abajo por la columna de las unidades. Si esta suma no pasa de nueve, se la escribe debajo de la línea; pero si pasa de nueve, se averiguan entonces la decena ó decenas contenidas en dicha suma, para agregarlas á las decenas respectivas, después de escribir las unidades debajo de la línea, y así sucesivamente.*

Ejemplo.

8796742
6301593
7457078
22555413

Explicación.—Se dice: 2 y 3 son 5 y 8 son 13 unidades; en 13 unidades hay una decena, y sobran 3 unidades, las cuales se escriben debajo de la línea.

Se suma a hora la columna de las decenas, diciendo: 4 y 1 son 5 y 9 son 14 y 7 son 21 decenas; en 21 decenas hay 2 centenas y 1 decena; se escribe ésta debajo de la línea, y se agregan las 2 centenas á la columna de las centenas, y así sucesivamente.

Escolio.—Cuando ya se tiene algún ejercicio, y que es el que debe procurarse siempre, se suma de esta manera: 2 y 3, 5 y 8 13, y va 1 decena, ó más abreviadamente: 2, 5, 13, y va 1; 4, 5, 14, 21, y van 2, esto es, se agrega mentalmente el 2 al 3, que da 5, y agregando mentalmente el 8 al 5, da 13, y así en adelante.

Teorema.—El orden de los sumandos no altera la suma.

Ejemplo.

$$\begin{array}{r} 3428 \\ 2579 \\ 5367 \\ 8750 \\ \hline 20124 \end{array}$$

Demostración. En cualquier orden en que se escriban estos cuatro sumandos, con tal que las unidades queden debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc., la suma será siempre una misma.

En efecto, poniendo el tercer sumando en primer lugar; el segundo en cuarto lugar; el primero en tercer lugar, y el cuarto en segundo lugar, se tiene:

$$\begin{array}{r} 5367 \\ 8750 \\ 3428 \\ 2579 \\ \hline 20124 \end{array}$$

También se puede colocar los sumandos de esta manera, esto es, los primeros:

$$\begin{array}{r} 8750 \\ 3428 \\ 2579 \\ 5367 \\ \hline 20124 \end{array}$$

Todavía se puede colocar los sumandos de varias otras maneras; y con tal que las unidades queden debajo de las unidades, las decenas debajo de las decenas, etc., la suma será siempre una misma.

Unico uso de la suma.

De la naturaleza misma de esta operación se desprende el uso que debe hacerse de la suma en la práctica.

Se hace uso de la suma, siempre que se trate de reunir en un solo número todas las unidades de una misma especie, contenidas en dos ó más números dados.

Prueba de una operación.

Se llama *prueba de una operación* otra que tiene por objeto averiguar si la primera ha sido bien ó mal ejecutada.

PROBLEMAS

1° Un joven ha pasado 8 años en el hogar doméstico; 10, en una Universidad; 6, como abogado; 3, como Ministro de lo Interior; 2, como Senador; 4, como Enviado Extraordinario. Cuántos años tiene en la actualidad?

2° Un comerciante vende 500 sucres de ropa en un día; en otro vende 326; en otro, 622; y por último, 314. Cuál es el valor total de la venta?

3° Un General ha presentado tres batallas: en la primera ha perdido 368 soldados; en la segunda, 479; y en la tercera, 525. Cuál es la pérdida sufrida?

4° Tres albañiles empiedran una calle: el 1° empiedra 363 metros; el 2°, 325; y el 3°, 95. Cuántos metros han empedrado todos tres?

5° Bolívar nació en 1783, y murió á los 47 años de edad. Cuál es el año de la muerte?

6° Cristóbal Colón, nacido en 1436, descubrió la América á los 56 años de edad. En qué año se verificó el descubrimiento?

7° El mismo Colón, nacido en 1436, murió á los 70 años de edad. Cuál es el año de su muerte?

8° Ricaurte nació en 1786, y murió á los 28 años de edad. Cuál es el año de su muerte?

9° Un joven cuenta 18 años de edad. Cuántos tendrá dentro de 12?

10 Un padre contaba 29 años, cuando le nació un hijo; y cuando éste cumplió 18 años, murió el padre. De cuántos años murió el último?

11 Una persona construye una casa: en las paredes gasta 480 sucres; 320, en compra de madera; 236, en compra de tejas; 199, en ladrillos. A cuánto asciende el gasto hecho hasta aquí?

LECCION SEXTA

Sustracción ó resta de números enteros.

La *sustracción ó resta* es una operación que tiene por objeto quitar de un número mayor, llamado *minuendo*, tantas unidades cuantas tenga otro número menor, llamado *sustraendo*. El resultado de la operación se llama *residuo, exceso, diferencia, déficit ó remanente.*

Verdades axiomáticas en que se funda la práctica de la resta.

Estas verdades son tres:

1ª *Se puede quitar una cantidad de otra de la misma especie, quitando, en un orden cualquiera, todas las unidades que componen la cantidad menor de las correspondientes que componen la cantidad mayor, y reunir después los resultados.*

2ª *Para que la resta sea posible, el minuendo debe ser mayor que el sustraendo, ó por lo menos igual.*

3ª *El minuendo y el sustraendo deben ser de una misma especie.*

Casos que ocurren en la resta.

Se distinguen tres casos:

1° *Restar un número dígito de otro dígito.*

2° *Restar un número dígito de un número menor que* 20.

3° *Restar dos números compuestos cualesquiera.*

Primer caso.—Para restar un número dígito de otro dígito, basta ocurrir á la tabla de la suma.

Ejemplo.—De 9 naranjas, que tiene un individuo, regala 5, y quiere saber cuántas le quedan.

Explicación.—El número que, sumado con el 5, produzca el 9, será el que indica las naranjas que sobran, y este número es 4, que es la diferencia entre 9 y 5.

Escolio.—Siendo solamente nueve los números dígitos, no presenta mucha dificultad el restar un dígito de otro dígito.

Segundo caso.—Para restar un número dígito de un compuesto menor que 20, se ocurre también á la tabla de la suma.

Ejemplo.—A un comerciante, que tiene 16 sucres, se le pierden 9, y quiere saber cuántos le han quedado.

Explicación.—El número que, sumado con el 7, produzca 16, será el que indica los sucres que le han quedado, y este número es 7.

Tercer caso.—Para resolver este caso, se aplica la siguiente

Regla.—*Para restar dos números compuestos cualesquiera, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades con las unidades, las decenas con las de-*

cenas, etc., y se traza por debajo una línea horizontal de longitud conveniente. Se comienza la operación por la derecha, y se resta la cifra del sustraendo de la corespondiente del minuendo. Cuando alguna cifra del minuendo es igual á la del sustraendo, da cero por diferencia; y cuando alguna cifra del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo, se agregan á la cifra del minuendo diez unidades de la cifra de la columna inmediata de la izquierda, y al restar esta columna se le disminuyen las diez unidades.

Ejemplo. 53284 minuendo
34263 sustraendo

19021 residuo ó diferencia

Explicación.—Se comienza á restar por la derecha, diciendo: 4 menos 3, 1; 8 menos 6, 2; 2 menos 2, 0; 13 menos 4, 9; y 4 menos 3, 1. Al llegar á la columna de los millares, se ve que la cifra 3 del minuendo es menor que la cifra 4 del sustraendo, y no puede hacerse la resta, porque no se cumple la segunda verdad axiomática; pero entonces se toma del número 5 inmediato una decena de millar, que vale 10 unidades de millar, y con las 3 unidades son 13 unidades de millar. Ahora se dice: 13 menos 4, 9; luego al número 5 se le disminuye una unidad, esto es, una decena de millar, y quedan 4 decenas, y se dice entonces: 4 menos 3, 1.

División del tercer caso.

Para mayor claridad, se divide el tercer caso en dos:

1.° *Cuando todas las cifras del minuendo son mayores que las correspondientes del sustraendo.*

2.° *Cuando no todas las cifras del minuendo son mayores que las correspondientes del sustraendo.*

Ejemplo del primer caso.—Un mercader debe 8.796 sucres, y paga 5.432; por consiguiente, quiere saber cuánto queda debiendo. La operación se dispone así:

8.796
5.432

3.364

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para restar un número compuesto de otro compuesto, cuando todas las cifras del minuendo son mayores que las correspondientes del sustraendo, se resta cada cifra del sustraendo de la correspondiente del minuendo, lo cual equivale á restar un dígito de otro dígito.*

Para comprender mejor este mecanismo, se dispone la operación de la siguiente manera:

8 millares, 7 centenas, 9 decenas, 6 unidades (*minuendo*)
5 millares, 4 centenas, 3 decenas, 2 unidades (*sustraendo*)

---

3 millares, 3 centenas, 6 decenas, 4 unidades (*residuo ó diferencia*)

Como se ve, el comerciante queda debiendo 3 millares, 3 centenas, 6 decenas y 4 unidades, ó lo que es lo mismo, 3.364 sucres.

Pero para ejecutar pronto la operación, se procede del siguiente modo:

$$\begin{array}{r} 8.796 \\ 5.432 \\ \hline 3.364 \end{array}$$

Explicación.—Se dice: 6 menos 2, 4; 9 menos 3, 6; 7 menos 4, 3; y 8 menos 5, 3.

Este ejercicio es el que debe adquirirse á todo trance, porque es el que se usa en la práctica.

Ejemplo del segundo caso.—De 9.564 sucres, que debe un individuo, paga 6.785; por consiguiente, desea saber cuánto debe todavía. La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 9.564 \\ 6.785 \\ \hline 2.779 \end{array}$$

Explicación.—Como la cifra 4 del minuendo es menor que la cifra 5 del sustraendo, se toma una decena de la cifra 6: esta decena se compone de 10 unidades que, agregadas á las 4 unidades, hacen 14 unidades, y se dice: 14 menos 5, 9.

Se disminuyen ahora á las 6 decenas las 10 unidades que forman la decena que se tomó, y quedan 5 decenas. Como esta cifra 5 es menor que la cifra 8, se toma una centena del 5 que está inmediato: se convierte esta centena en 10 decenas que, agregadas á las 5 decenas, hacen 15 decenas, y se dice: 15 menos 8, 7.

Se disminuyen ahora á las 5 centenas las 10 decenas, que forman la centena, y quedan 4 centenas. Como esta cifra 4 es menor que la cifra 7, se toma un millar del 9 que está inmediato: se convierte este millar en 10 centenas que, agregadas á las 4 centenas, hacen 14 centenas, y se dice: 14 menos 7, 7.

Se disminuyen ahora á los 9 millares las 10 centenas, que forman el millar que se tomó, y se dice: 8 menos 6, 2.

Para mayor claridad, se dispone la operación así:

8 millares, 14 centenas, 15 decenas, 14 unidades (*minuendo*)
6 millares, 7 centenas, 8 decenas, 5 unidades (*sustraendo*)

2 millares, 7 centenas, 7 decenas, 9 unidades (*residuo ó diferencia*).

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para restar un número compuesto de otro compuesto, cuando no todas las cifras del minuendo son mayores que las correspondientes del sustraendo, se resta cada cifra del sustraendo de la correspondiente del minuendo; pero se agrega una decena, centena, etc., á la respectiva cifra del minuendo, si es menor que la del sustraendo, y se disminuye esta decena, centena, etc., á las cifras de las siguientes restas parciales.*

Manera especial de hacer una resta.

En vez de disminuír la cifra del minuendo, cuando es menor que la del sustraendo, se aumenta á ésta una unidad, una decena, una centena, etc., según el lugar que ocupe, y se deja intacta la del minuendo.

Ejemplo 8439567
5782794

2656773

Explicación.—Se dice: 7 menos 4, 3; 16 menos 9, 7. En vez de disminuír al 5 una centena, se agrega ésta á la cifra 7, y da 8; y se dice entonces: 15 menos 8, 7.

En vez de disminuír á la cifra 9 un millar, se agrega éste á la cifra 2, y da 3; y se dice entonces: 9 menos 3, 6.

En vez de disminuír á la cifra 4 una centena de millar, se agrega ésta á la cifra 7, y da 8; y se dice entonces: 14 menos 8, 6.

En vez de disminuír á la cifra 8 un millón, se agrega éste á la cifra 5, y da 6; y se dice entonces: 8 menos 6, 2, y así sucesivamente.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para restar dos números compuestos, cuando alguna ó algunas cifras del minuendo son menores que las del sustraendo, se agrega á éstas una unidad, una decena, etc., según el lugar que ocupen, y se deja intacta la cifra del minuendo.*

Escolio 1.º—Cuando en el minuendo figuren uno, dos ó más ceros, entonces valen 9 todos los ceros, menos el primero de la derecha, que vale 10, á no ser que sea menester modificar dicho cero, y entonces vale 9 como los demás.

Ejemplo 1.° 85600052
47532818

38067234

Ejemplo 2.° 760032
438765

321267

Escolio 2.°—Cuando en el sustraendo figuren uno, dos ó más ceros, entonces se repiten las cifras del minuendo en el residuo.

Ejemplo. 649683
250002

399681

Escolio 3.°—Cuando en el minuendo y en el sustraendo figuren uno, dos ó más ceros, entonces se escriben ceros en el residuo; pero si el primer cero de la derecha llega á valer 9, en virtud de alguna modificación, resulta que todos los ceros del minuendo valen 9.

Ejemplo 1.° 750008
420006

330002

Ejemplo 2.° 8400053
3200084

5199969

Pruebas de la suma.

Hay tres procedimientos para probar la suma:

1.° *Sumando de abajo para arriba.*—Consiste en hacer la suma por segunda vez, pero en sentido inverso del que se hizo sumando de arriba para abajo; y si la suma que se obtiene sumando de abajo para arriba, es igual á la que se obtiene sumando de arriba para abajo, hay entonces la mayor probabilidad de que está bien hecha la suma, porque la operación comprobatoria no siempre es decisiva.

2.° *Por medio de la resta.*—Se prescinde de un sumando cualquiera, y se suman los demás: se resta esta suma de la primera, y el residuo ó diferencia debe ser igual al sumando que se separa; porque si de las partes de un todo se quita una de ellas, resulta la parte quitada.

3.° *Sumando de izquierda á derecha.*—Se suma la primera columna de la izquierda, y se la resta de la suma ya hecha en la misma columna, y se procede de igual manera hasta llegar á las unidades, lo cual debe dar cero por último resultado.

Este procedimiento se funda en que sumando de derecha á izquierda, se obtiene cierta suma; y sumando de izquierda á derecha, se obtiene la misma suma; y si de la suma se quita la misma, se obtiene cero por resultado.

Ejemplo del primer procedimiento.

$$\begin{array}{r} 876 \\ 947 \\ \hline 1.823 \end{array}$$

Explicación.—Esta suma está hecha de arriba para abajo. Para saber si está bien hecha, se suma de abajo para arriba de esta manera: 7 y 6, 13 y va 1; 4 y 1, 5 y 7, 12 y va 1; 9 y 1, 10 y 8, 18; y como se obtiene la misma suma 1.823, se puede asegurar que está bien hecha la operación.

Ejemplo del segundo procedimiento.

$$\begin{array}{r} 1.496 \\ 8.766 \\ 985 \\ 570 \\ \hline 11.817 \end{array}$$

Explicación.—Para saber si está bien hecha esta suma, se tacha cualquier sumando, y sea, por ejemplo, 985. Ahora se procede á sumar los sumandos que sobran, y dan por suma 10.832: se escribe esta suma debajo de 11.817; y haciendo la resta, resulta el sumando tachado, así:

$$\begin{array}{r} 1.496 \\ 8.766 \\ 985 \\ 570 \\ \hline 11.817 \\ 10.832 \\ \hline 985 \end{array}$$

Ejemplo del tercer procedimiento.

Tomando el ejemplo anterior, se tiene:

1.496
8.766
985
570
11.817

Explicación.—Sumando la primera columna de la izquierda, da 9 millares, y restados de 11 millares, se obtienen 2 millares, así: 11—9=2

Como 2 millares hacen 20 centenas, se agregan á éstas las 8 centenas de la suma total, y dan 28 centenas: de esta suma se resta la de la segunda columna de la izquierda, y da 25 centenas, y restadas de 28, dan 3 centenas, así: 28—25=3

Como 3 centenas hacen 30 decenas, se agrega á éstas la decena de la suma total, y dan 31 decenas: de esta suma se resta la de la tercera columna de la izquierda, que da 30 decenas; y restadas de 31, se obtiene 1 decena, así: 31—30=1

Como una decena hace 10 unidades, se agregan á éstas las 7 unidades de la suma total, y son 17 unidades: de esta suma se resta la de la columna de las unidades, que da 17 unidades; y restadas entre sí, se obtiene cero como último resultado, así: 17—17=0

Para aclarar mejor las ideas, se dispone la operación así:

Suma de izquierda á derecha.	*Suma de derecha á izquierda.*
1.496	1.496
8.766	8.766
985	985
570	570
9 millares	17 unidades
25 centenas	30 decenas
30 decenas	25 centenas
17 unidades	9 millares
11.817 (suma total)	11.817 (suma total)

Restando ahora estas dos cantidades entre sí, se obtiene cero por último resultado, así:

11.817
11.817
0

Escolio importante.—Cuando una suma se compone de muchos sumandos, es muy útil y muy conveniente dividirlos en grupos proporcionales. Se suma entonces cada grupo por separado; y por último, se suman los resultados para obtener la suma total. Por este método se hace más pronto la suma y con menos temor de equivocarse.

Pruebas de la resta.

Hay tres procedimientos para probar la resta:

1.° *Por medio de la suma.*—Consiste en sumar el sustraendo con el residuo ó diferencia, y da por resultado el minuendo; pues es claro que al sumar las dos partes, que son el sustraendo y el residuo, se obtiene el todo, que es el minuendo.

2.° *Por la misma resta.*—Consiste en restar el residuo del minuendo, y da el sustraendo; pues si se quita el residuo, que es una parte, del minuendo, que es un todo, resulta la otra parte, que es el sustraendo.

3.° *Por medio del complemento aritmético.*

Ante todo, es preciso saber lo que se entiende por complemento aritmético.

Se llama *complemento aritmético de un número la cantidad que le falta, para ser igual á la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tenga el número dado.*

Sea el número 4.796. Restando este número de la unidad seguida de cuatro ceros, se tiene:

$$\begin{array}{r} 10.000 \\ 4.796 \\ \hline 5.204 \end{array}$$

Luego, según el *escolio* 1.°, el número 5.204 es la cantidad que falta á 4.796, para ser igual á la unidad seguida de cuatro ceros; porque sumando 4.796 con 5.204, da 10.000

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para buscar el complemento aritmético de un número cualquiera, se resta el número de la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tenga el mismo número dado.*

Ejemplo.

$$\begin{array}{r} 78.964 \\ 23.735 \\ \hline 55.229 \end{array}$$

Explicación.—Para saber si está bien hecha la resta, se aplica el complemento aritmético de la siguiente manera:

Se resta el sustraendo de la unidad seguida de cinco ceros, así:

100.000
23.735

76.265

Se suma ahora el número 76.265, que es el *complemento aritmético*, con el minuendo, de este modo:

76.265
78.964

155.229

Luego se resta del número 155.229 la unidad seguida de cinco ceros, así:

155.229
100.000

55.229

Está, pues, aplicado el *tercer procedimiento*, puesto que se obtiene el mismo residuo ó diferencia.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para probar la resta por medio del complemento aritmético, se suma el minuendo con el complemento aritmético del sustraendo; y de esta suma se resta la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tenga el sustraendo.*

Escolio.—Para saber el complemento aritmético de un número dado, se supone con la imaginación que está escrita encima del número la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tenga dicho número; luego se resta de 10 la primera cifra de la derecha, y todas las demás se restan de 9; y la diferencia que resulte es el *complemento aritmético.*

Ejemplo—El complemento aritmético del número 76.285 es 23.715, y se plantea la operación así:

76.285 número dado
23.715 complemento aritmético

Pues escribiendo encima del número la unidad seguida de cinco ceros, se tiene:

100.000
76.285

23.715

Usos de la resta.

Se hace uso de la resta en tres casos:

1º *Cuando se quiere saber la diferencia que hay entre dos números, esto es, cuando se quiere saber el exceso del mayor sobre el menor.*

Ejemplo.—Cuál es la diferencia entre 8.536 *y* 987 *?*

2º *Cuando se conoce una suma compuesta de dos sumandos, y se conoce á la vez uno de éstos, á fin de obtener el otro sumando.*

Ejemplo.—La suma de dos números es 8.965, y uno de éstos es 3.729. Cuál es el otro número?

Explicación.—Restando de la suma 8.965 el sumando conocido 3.729, se obtiene el otro sumando, así:

$$\begin{array}{r} 8.965 \\ 3.729 \\ \hline 5.236 \end{array}$$

3º *Cuando se conoce una suma compuesta de varios sumandos, y se conocen á la vez todos menos uno. Entonces se suman los conocidos, y esta suma se resta de la primera, á fin de obtener el sumando que se busca.*

Ejemplo.—Un comerciante debe 18.965 sucres, de los cuales ha hecho seis pagos, así:

8.542 por una parte; 6.503, por otra; 2.094, por otra; 683 idem; 534 idem; 206 idem; y quiere saber cuánto adeuda todavía.

Explicación.—Para obtener el objeto propuesto, se suman las seis cantidades pagadas, así:

8.542 + 6.503 + 2.094 + 683 + 534 + 206 = 18.562

Restando esta suma de la primera, se obtiene, en definitiva, la cantidad que queda debiendo, así:

18.965 − 18.562 = 403

PROBLEMAS

1º Diego de Almagro fundó la ciudad de Quito en el año 1534; Fray Jodoco Ricki, Fray Pedro Gosseal y Fray Pedro Rodenas, la Iglesia y el Convento de San Francisco, en 1535; Fray Hernando de Granada, el Convento de la Merced, en 1537; Fernando Santillán, el Hospital que existe hasta hoy, en 1565. ¿Cuántos años han transcurrido hasta el presente, desde las fechas de las respectivas fundaciones?

2º Francisco Orellana descubrió el río Amazonas en 1542.—El Papa Paulo III erigió en Obispado la ciudad de Quito, en 1545. Cuánto tiempo hace ya?

3º De un barril de vino, que contiene 50 botellas, sacan 35: Cuántas quedan?

6

4º A un conductor, que lleva 25.463 sucres, se le pierden 9.200. Cuántos le han quedado?

5º ¿Cuál es la diferencia que hay entre las cantidades 9.876 y 5.432?

6º Un individuo nació en 1810, y otro en 1835. Con cuántos años es menor el segundo?

7º Bolívar murió en 1830. ¿Cuántos años han transcurrido hasta el actual?

8º Colón descubrió la América en 1492. Cuánto tiempo hace ya?

9º El Océano Pacífico fué descubierto por Basco Núñez de Balboa en 1513. Cuántos años han transcurrido?

10º Cuál es la diferencia entre 8.500 y 5.300?

11º Réstese 5.400 de 9.873

12º La suma de dos números es 9.745, y uno de ellos es 4.322. Cuál es el otro número?

13º El sustraendo es 2.006, y el minuendo 5.008. Cuál es la diferencia?

14º Un padre tenía 32 años, cuando le nació un hijo. ¿Qué edad tendrá éste, cuando el padre cumpla 65 años?

15º ¿Cuánto debe agregarse al número 6.785, para que produzca 89.642?

16º ¿Cuál es el número que, sumado con 9.968, produce 16.754?

17º Un hacendado ha vendido una finca en 60.845 sucres, habiéndola comprado en 35. 422. Cuánto ha ganado?

18º Un comerciante empezó á trabajar con 300 sucres, y ahora cuenta con 7.962. Cuál es la ganancia?

19º Un joven de 26 años se casa con una señorita de quince años. Con cuántos es mayor el esposo?

20º Ricaurte murió en 1814. Cuánto tiempo hace?

LECCION SEPTIMA

Multiplicación de números enteros.

La *multiplicación* es una operación que tiene por objeto buscar un número, llamado *producto*, que se componga de un número, llamado *multiplicando*, como otro número, llamado *multiplicador*, se compone de la unidad. El multiplicando y el multiplicador se llaman *factores del producto*.

Da origen á la multiplicación la *resolución* del siguiente problema. *Hacer una suma, cuyos sumandos son iguales entre sí.*

Ejemplo.—Si se quiere multiplicar el número 18 por 5, es el caso de repetir el primero cinco veces como sumando, así: 18+18+18+18+18=90

Explicación.—A primera vista se comprende que una operación semejante á ésta, sería muy complicada, y cometeríamos frecuentes errores.

Para multiplicar, por ejemplo, el número 8.749 por 534, habría que repetir el número 8.749 quinientas veces como sumando, y luego hacer la suma; después escribir el mismo número treinta veces como sumando, y luego hacer la suma; en seguida escribir el mismo número cuatro veces como sumando, y luego hacer la suma; por último, habría que sumar las tres sumas, para obtener el total.

Escolio.—El escribir una multitud de veces un mismo sumando, engendraría cansancio y desaliento; y en muchos casos, no sería posible saber el resultado de una operación muy larga. Para evitar, pues, todo obstáculo, se acude á la multiplicación; y por aquí se juzga que ésta no es sino una suma abreviada.

Unica verdad axiomática en que se funda la práctica de la multiplicación.

Para repetir varias veces un número dado, basta repetir las mismas veces cada una de las partes del número, y sumar luego los resultados.

Ejemplo.—Sea el número 29, para repetirlo 5 veces.

Explicación.—Basta repetir cinco veces el número 2, que representa las decenas; y repetir después las mismas cinco veces el número 9, que representa las unidades, así:

2+2+2+2+2=10 decenas; 9+9+9+9+9=45 unidades

Ahora, como en 45 unidades hay 4 decenas y 5 unidades, se agregan las 4 decenas á las 10 decenas, y en seguida se escriben las 5 unidades, así: 145

Escolio.—El multiplicando y el multiplicador pueden ser de distinta especie, lo cual no sucede en la suma y en la resta.

Casos que ocurren en la multiplicación de números enteros.

Estos casos son cinco:

1.° *Multiplicar un número dígito por otro dígito.*

2.° *Multiplicar un número compuesto por un dígito.*

3.° *Multiplicar un número cualquiera por la unidad seguida de uno ó más ceros.*

4.° *Multiplicar un número cualquiera por una cifra significativa seguida de uno ó más ceros.*

5.° *Multiplicar un número compuesto por otro compuesto.*

Primer caso.—Para multiplicar un número dígito por otro dígito, basta saber de memoria la siguiente

TABLA
de la multiplicación.

Columnas horizontales.

Columnas verticales

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Explicación del modo de formar esta tabla.

Se escriben en la primera columna horizontal las cifras, desde 1 hasta 12, y se tiene formada esta columna.

Para formar la segunda, se suman consigo mismas las 12 cifras de la primera columna, así: 1 y 1, son 2; 2 y 2, 4; 3 y 3, 6; 4 y 4, 8; 5 y 5, 10; 6 y 6, 12; 7 y 7, 14; 8 y 8, 16; 9 y 9, 18; 10 y 10, 20; 11 y 11 22; 12 y 12, 24

Para formar la tercera columna, se suman las cifras de la primera con las de la segunda, y se escriben los resultados en la tercera, así: 1 y 2, son 3; 2 y 4, 6; 3 y 6, 9; etc.

Para formar la cuarta columna, se suman las cifras de la primera con las de la tercera, y se escriben los resultados en la cuarta, así: 1 y 3, 4; 2 y 6, 8; 3 y 9, 12; etc.

Para formar la quinta columna, se suman las cifras de la primera con las de la cuarta, y se escriben los resultados en la quinta, así: 1 y 4, 5; 2 y 8, 10, y así se forman las demás columnas.

Para encontrar el producto de 6 por 9, por ejemplo, se pone un dedo de la mano izquierda sobre el 6 de la primera columna vertical, y se pone también un dedo de la mano derecha sobre el 9 de la primera columna horizontal Hecho esto, se corren los dedos por las respectivas columnas, hasta dar con el cuadro común á las dos columnas; y el número que se encuentre en dicho cuadro, será el producto buscado, y en el ejemplo presente es 54.

Escolio 1.º—Para buscar el producto de dos números cualesquiera, se hace lo mismo que se acaba de explicar.

Escolio 2.º—Cuando se multiplica un número dígito por 2, por 3 y por 4, es lo mismo que duplicarlo, triplicarlo y cuadruplicarlo, y los productos se llaman *duplo, triplo y cuádruplo.*

Ejemplo.—El número 16 es duplo de 8, porque proviene de multiplicar 8 por 2. El número 12 es triplo de 3, porque proviene de multiplicar 4 por 3; y el mismo 12 es cuádruplo de 4, porque proviene de multiplicar 3 por 4.

Modo de aprender de memoria la tabla.

Se pronuncia primero el 2 de la columna vertical, y luego el 1 de la primera columna horizontal, así: 2 por 1 es 2

Se pronuncia ahora el mismo 2 de la columna vertical, y luego el 2 de la columna horizontal, así: 2 por 2, 4

Se pronuncia el mismo 2 de la columna vertical, y luego el 3 de la columna horizontal, así: 2 por 3, 6, etc.

En cuanto á la tercera columna, se pronuncia primero el 3 de la columna vertical, y luego el 1 de la columna horizontal, así: 3 por 1, es 3

Se pronuncia ahora el mismo 3, de la columna vertical, y luego el 2 de la columna horizontal, así: 3 por 2, 6

Se pronuncia el mismo 3 de la columna vertical, y luego el 3 de la columna horizontal, así: 3 por 3, 9, etc., y lo mismo se hace con las demás columnas.

Ejemplo.	489	multiplicando	factores
	3	multiplicador	
	1.467	(producto)	

Explicación.—Se dice: 3 por 9, 27 y van 2; 3 por 8, 24 y 2, 26 y van 2; 3 por 4, 12 y 2, 14

El mecanismo de la operación es el siguiente, según la verdad axiomática:

3 veces 4 centenas =12 centenas
3 veces 8 decenas =24 decenas
3 veces 9 unidades =27 unidades

1.467 (producto)

Ejemplo 2.º—Se quiere multiplicar 12345679 por 9

Explicación.—Se escribe el multiplicador debajo de las unidades del multiplicando, y luego se traza una pequeña línea horizontal, así:

12345679
9

Ahora se dice simplemente: 9 por 9, 81 y van 8; 9 por 7, 63 y 8, 71 y van 7; 9 por 6, 54 y 7, 61 y van 6; 9 por 5, 45 y 6, 51 y van 5; 9 por 4, 36 y 5, 41 y van 4; 9 por 3, 27 y 4, 31 y van 3; 9 por 2, 18 y 3, 21 y van 2; 9 por 1 es 9 y 2, 11.

La operación se dispone así:

12345679
9

111'111.111

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un número compuesto por un dígito, se escribe éste debajo de la cifra de las unidades del compuesto, y se traza una línea horizontal de longitud conveniente. Luego se multiplica el dígito por cada una de las cifras del compuesto, y se hace la reducción de unidades inferiores á superiores, siempre que ocurra este caso.*

Escolio.—Desde 10 hasta 19 se lleva 1; desde 20 hasta 29 se llevan 2; desde 30 hasta 39, 3; desde 40 hasta 49, 4; desde 50 hasta 59, 5; desde 60 hasta 69, 6; desde 70 hasta 79, 7; desde 80 hasta 89, 8; desde 90 hasta 99, 9; y en 100 se lleva 10.

Ejemplo 3.º—Se quiere multiplicar 234 por 100

Explicación.—Se multiplica la cifra 1 por cada una de las del compuesto, lo cual equivale á repetir las cifras del multiplicando, y á la derecha de éstas se escriben los dos ceros, así: $234 \times 100 = 23.400$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un número cualquiera por la unidad seguida de uno ó más ceros, se escriben á la derecha del número el cero ó ceros que acompañen á la unidad.*

Ejemplo 4.º—Se quiere multiplicar 568 por 300.

Explicación.—Se escribe la cifra 3 del multiplicador debajo de la cifra de las unidades del multiplicando. Se hace la multiplicación, lo mismo que en el segundo caso, y á la derecha del producto se escriben los dos ceros, así:

```
    568
    300
-------
170.400
```

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un número cualquiera por una cifra significativa seguida de uno ó más ceros, se multiplica la cifra significativa por cada una de las del multiplicando, y se agregan á la derecha del producto el cero ó ceros que acompañen á la cifra significativa.*

Ejemplo 5.º—Se quiere multiplicar el número 12345679 por 27.

Explicación.—Se escribe el multiplicador debajo del multiplicando, y luego se traza una línea horizontal de longitud conveniente. En seguida se multiplica cada cifra del multiplicador por cada una de las del multiplicando, como en el segundo caso, y los productos, que se llaman *parciales*, se escriben debajo de la línea, y en frente de la respectiva cifra multiplicadora, así:

```
 12345679
       27
---------
 86419753  producto parcial
24691358   producto parcial
---------
333333333  (producto total)
```

Ejemplo 6.º—Se quiere multiplicar 12345679 por 54.

Explicación.—Lo mismo que en el ejemplo anterior, la operación se dispone y se ejecuta así:

```
 12345679
       54
---------
 49382716
61728395
---------
666666666
```

Ejemplo 7.°—Se quiere multiplicar 12345679 por 72. La operación se dispone y se ejecuta así:

```
  12345679
        72
 ---------
  24691358
 86419753
 ---------
 888888888
```

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para multiplicar un número compuesto por otro compuesto, se escribe el multiplicador debajo del multiplicando, de modo que se correspondan las uni dades con las unidades, las decenas con las decenas, etc., y se traza en seguida una línea horizontal de longitud conveniente. Luego se multiplica cada cifra del multiplicador por cada una de las del multiplicando, haciendo la reducción de unidades inferiores á superiores, siempre que ocurra este caso. Cada producto parcial se escribe en frente de la cifra multiplicadora. Por último, se suman los productos parciales, para obtener el producto total.*

Escolio 1.°—Siendo así que el multiplicador no indica sino las veces que el multiplicando se repite como sumando, claro está que es un *número abstracto;* por consiguiente, el producto es de la especie del multiplicando.

Ejemplo.—Si se multiplican 8 sucres por el número 3, es el caso de repetir 3 veces el número 8, y el resultado indica sucres, así:

3 veces 8 sucres=24 sucres

Escolio 2.°—Cuando en el multiplicador hay uno ó más ceros, se prescinde de éstos, y se pasa á multiplicar la cifra ó cifras significativas, teniendo el cuidado de escribir el producto en frente de la cifra multiplicadora.

```
Ejemplo.     385.697
               4.002
          ----------
              771394
           1542788
          ----------
          1543559394
```

Escolio 3.°—Cuando hay uno ó más ceros en el multiplicando, resulta que al multiplicar una cifra significativa por dichos ceros, se obtiene cero por producto; y cuando se multiplica una cifra significativa por uno ó más ceros, y hay al mismo tiempo unidades que resultan del producto anterior, se escriben éstas en el lugar respectivo.

Ejemplo.

```
  28006
     53
-------
  84018
 140030
-------
1484318
```

Escolio 4.º—Cuando el multiplicando y el multiplicador terminan en ceros, se multiplican solamente las cifras significativas, y á la derecha del producto se agregan tantos ceros cuantos tengan los dos factores.

Ejemplo.

```
   580
   230
------
   174
  116
------
133400
```

Escolio 5.º—Cuando uno de los factores tiene más cifras que el otro, se pone como multiplicador el que tiene menos cifras, para facilitar la operación.

Escolio 6.º—Se ha dicho que para multiplicar un número cualquiera por la unidad seguida de uno ó más ceros, basta agregar á la derecha del número tantos ceros cuantos acompañen á la unidad, porque cada cifra del número se hace diez veces mayor.

Ejemplo. 234×100=23.400

En efecto, el número 4, que antes representaba las unidades, ahora representa las centenas, y por lo mismo, se ha hecho cien veces mayor. El número 3, que antes representaba las decenas, ahora representa los millares, y se ha hecho cien veces mayor. El número 2, que antes representaba las centenas, ahora representa las decenas de millar, y se ha hecho cien veces mayor; por consiguiente, todo el número se ha hecho cien veces mayor.

Usos de la multiplicación.

Se hace uso de la multiplicación en cuatro casos:

1º *Cuando se quiere hacer un número cualquiera varias veces mayor.*

2º *Cuando se conoce el valor de una unidad, cosa ú objeto de cierta especie, y se quiere saber el valor de varias unidades, cosas ú objetos de la misma especie.*

3º *Cuando se compran varias cosas ú objetos con un real ó con un sucre, y se quiere saber las cosas ú objetos que pueden comprarse con una cantidad mayor.*

4º *Cuando hay que reducir unidades superiores de cierta especie á unidades inferiores.*

Explicación del primer uso.—Si se quiere hacer el número 6 cuatro veces mayor, basta multiplicarlo por 4, así: $6 \times 4 = 24$

Explicación del segundo uso.—Sabiendo que una vara de grano de oro ó de otra tela cualquiera vale 2 reales, se pregunta cuánto valdrán 56 varas. Basta multiplicar 56 por 3, y el producto expresa reales, así: $56 \times 3 = 168$ reales

El multiplicando es 3, y el multiplicador es 56; pero se ha invertido el orden de los factores, solamente para mayor facilidad, y de acuerdo con el *escolio* 5.º

Explicación del tercer uso.—Si con un peso de ley se compran 5 varas de percal ó de zaraza, se pregunta cuántas se comprarán con 17 pesos. Basta multiplicar 5 por 17, y el producto indica varas, así: $17 \times 5 = 85$ varas

Explicación del cuarto uso.—Se quiere saber el número de onzas que hay en 12 quintales, 3 arrobas y 9 libras de azúcar, sabiendo que un quintal tiene 4 arrobas; una arroba, 25 libras; y una libra, 16 onzas. Basta multiplicar 12 por 4, y agregar al producto las 3 arrobas; después se multiplica el número de arrobas por 25 libras, y se agregan al producto las 9 libras; por último, se multiplica el número de libras por 16 onzas.

El mecanismo de la operación es el siguiente:

$$12 \times 4 = 48 + 3 = 51 \text{ arrobas}$$

$$\begin{array}{r l}
51 & \\
25 & \text{libras que tiene una arroba} \\
\hline
255 & \\
102 & \\
\hline
1.275 & \text{libras} + 9 = 1284 \text{ libras}
\end{array}$$

$$\begin{array}{r l}
1.284 & \\
16 & \text{onzas que tiene una libra} \\
\hline
7704 & \\
1284 & \\
\hline
20.544 & \text{onzas}
\end{array}$$

Abreviaciones importantes de la multiplicación.

En varias operaciones se puede abreviar la multiplicación, sin necesidad de aplicar ninguna de las reglas de los cinco casos.

Estas abreviaciones son seis:

1ª *Cuando el multiplicador es uno de los números* 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 *y* 19.

2ª *Cuando el multiplicador es uno de los números* 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 *y* 91.

3ª *Cuando el multiplicador es* 9 *ó un número compuesto de nueves.*

4ª *Cuando el multiplicador es* 11, *y el multiplicando tiene solamente dos cifras.*

5ª *Cuando el multiplicador es* 11, *y el multiplicando tiene más de dos cifras.*

6ª *Cuando el multiplicador es* 111, *y el multiplicando tiene más de dos cifras.*

Ejemplo 1.º—Se quiere multiplicar 426 por 15

Explicación.—Se multiplica el 5 por 6, y del producto 30 se escribe el cero debajo del multiplicando y un lugar hacia á la derecha. Se continúa la multiplicación, y se escriben los productos debajo de las correspondientes cifras del multiplicando, y se suman las dos cantidades, así:

$$\begin{array}{l} 426 \\ \ 2130 \\ \hline 6.390 \text{ (producto)} \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para multiplicar un número cualquiera por* 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 *y* 19, *se multiplica de memoria el* 2, *el* 3, *el* 4, *el* 5, *el* 6, *el* 7, *el* 8 *ó el* 9, *por cada una de las cifras del multiplicando; el producto se escribe debajo de éste y un lugar hacia la derecha, y luego se suman las dos cantidades entre sí.*

Ejemplo 2.º—Se quiere multiplicar 548 por 31

Explicación.—Se multiplica el 3 por 8, y del producto 24 se escribe el 4 debajo del multiplicando y un lugar hacia la izquierda. Se continúa la multiplicación, y los productos se escriben debajo de las correspondientes cifras del multiplicando, y se suman las dos cantidades, así:

$$\begin{array}{r} 548 \\ 1644 \\ \hline 16.988 \text{ (producto)} \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un número cualquiera por 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 y 91, se multiplica de memoria el 2, el 3, el 4, el 5, el 6, el 7, el 8 ó el 9, por cada una de las cifras del multiplicando; el producto se escribe debajo de éste y un lugar hacia la izquierda, y luego se suman las dos cantidades entre sí.*

Ejemplo 3.º—Se quiere multiplicar 478 por 999

Explicación.—Se agregan tres ceros á la derecha del multiplicando, por la sencilla razón de que el multiplicador tiene tres nueves, y resulta 478000. De este número se restan las cifras primitivas del multiplicando, así:

```
478000
   478
──────
477.522 (producto)
```

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un número cualquiera por uno ó más nueves, se agregan á la derecha del multiplicando tantos ceros cuantos nueves tenga el multiplicador, y de dicho número se restan las cifras primitivas del multiplicando.*

Ejemplo 4.º—Se quiere multiplicar 43 por 11

Explicación.—Se suman las dos cifras 4 y 3, y el resultado 7 se escribe en medio de dichas cifras, y se obtiene 473.

Otro ejemplo.—Se quiere multiplicar 95 por 11

Explicación.—Se suman las cifras 9 y 5, y el resultado 14 se escribe en medio de dichas cifras; pero al 9 se agrega la decena que hay en la suma 14, y se obtiene 1.045

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un número de dos cifras por* 11, *se suman las dos cifras, y la suma se escribe en medio de ellas. Si la suma pasa de nueve, se agrega entonces la decena á la cifra que representa las decenas.*

Ejemplo 5.º—Se quiere multiplicar el número 5.432 por 11. La operación se dispone así:

```
5.432
   11
─────
```

Explicación.—Se escribe la cifra 2 debajo de la línea; después se suma la misma cifra 2 con la cifra 3, y el resultado 5 se escribe en frente de la cifra 3; en seguida se suma la misma cifra 3 con la cifra 4, y el resultado 7 se escribe en frente de la cifra 4; luego se suma la misma cifra 4 con la cifra 5, y el resultado 9 se escribe en frente de la cifra 5; por último, se repite la cifra 5, así:

$$\begin{array}{r} 5432 \\ 11 \\ \hline 59.752 \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para multiplicar un número de más de dos cifras por* 11, *se repite la primera cifra de la derecha del multiplicando; después se escribe la suma de la primera cifra con la segunda; en seguida se escribe la suma de la segunda cifra con la tercera, y así en adelante de dos en dos, hasta llegar á la última cifra de la izquierda, la cual se repite. Al ejecutar las sumas, se hace la reducción de unidades inferiores á superiores, siempre que ocurra el caso.*

Ejemplo 6.°—Se quiere multiplicar el número 5687 por 111. La operación se dispone así:

$$\begin{array}{r} 5687 \\ 111 \\ \hline \end{array}$$

Explicación.—Se dice: 7 es 7; 7 y 8, 15 y va 1; 7 y 1, 8 y 8, 16 y 6, 22 y van 2; 8 y 2, 10 y 6, 16 y 5, 21 y van 2; 6 y 2, 8 y 5, 13 y va 1; 5 y 1, 6.

Como se ve, se escribe debajo de la línea la cifra 7; después se escribe la suma de la misma cifra 7 con la cifra 8; en seguida se escribe la suma de la misma cifra 7 con la cifra 8 y con la cifra 6; luego se escribe la suma de la cifra 8 con la cifra 6 y con la cifra 5; á continuación se escribe la suma de la cifra 6 con la cifra 5; y por último, se repite la cifra 5. En todas las sumas se hace la reducción de unidades inferiores á superiores, siempre que ocurra el caso.

La operación se ejecuta así:

$$\begin{array}{r} 5687 \\ 111 \\ \hline 631.257 \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un número de más de dos cifras por 111, se repite la primera cifra de la derecha del multiplicando; después se escribe la suma de la misma primera cifra con la segunda; en seguida se escribe la suma de la misma primera cifra con la segunda y con la tercera, y así en adelante de tres en tres cifras. La penúltima operación que se practica es sumar las dos últimas cifras, y finalmente se repite la última cifra. Al ejecutar las sumas, se hace la reducción de unidades inferiores á superiores, siempre que ocurra el caso.*

Teorema 1º—El orden de dos factores no altera el producto.

Ejemplo.—Si se multiplica 4 por 3, se obtiene 12 por producto; y si se multiplica 3 por 4, se obtiene el mismo 12 por producto. La operación se dispone así:

$$4\times3=3\times4$$
$$12=12$$

Demostración.—Descomponiendo el 4 en cuatro unidades, y repitiéndolas tres veces como sumandos, se tiene:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Sumando la primera columna de la derecha, da 3; agregando á este 3 la suma de la segunda columna, da 6; agregando á este 6 la suma de la tercera columna, da 9; y agregando á este 9 la suma de la cuarta columna, da 12 por último resultado.

Sumando de izquierda á derecha de igual manera, se obtiene el mismo 12 por resultado; luego, si se suma de derecha á izquierda, ó de izquierda á derecha, se obtiene siempre el mismo resultado.

Sumando ahora la primera columna horizontal de arriba, da 4; agregando á este 4 la suma de la segunda columna horizontal, da 8; y agregando á este 8 la suma de la tercera columna horizontal, da 12 por último resultado. Sumando de abajo para arriba de igual manera, se obtiene el mismo 12; luego, sumando de arriba para abajo, ó de abajo para arriba, se obtiene el mismo resultado, y queda demostrado el teorema.

Teorema 2.º—Si son varios los factores, el producto no altera, si se cambia el orden de los dos primeros.

Ejemplo. $3\times5\times8\times6=5\times3\times8\times6$

Demostración.—El producto de 3 por 5 es igual al de 5 por 3, según el teorema 1.º, así:

$$3\times5=5\times3$$

Ahora, si los dos miembros de esta igualdad se multiplican por una misma cantidad, que es 8, el valor no altera, según el axioma 8.º de la lección cuarta, y se tiene: $3\times 5\times 8=5\times 3\times 8$

Multiplicando otra vez los dos miembros de esta igualdad por 6, y según el mismo axioma, se tiene:

$$3\times 5\times 8\times 6=5\times 3\times 8\times 6$$

Teorema 3.º—Si son varios los factores, el producto no altera, si se cambia el orden de los dos últimos.

Ejemplo. $4\times 3\times 7\times 9=4\times 3\times 9\times 7$

Demostración.—El producto de 7 por 9 es igual al de 9 por 7, según el teorema 1.º, así:

$$7\times 9=9\times 7$$

Si se multiplican los dos miembros de esta igualdad por 3, el valor no altera, según el axioma 8.º, y se tiene:

$$3\times 7\times 9=3\times 9\times 7$$

Multiplicando otra vez los dos miembros de esta igualdad por 4, y según el mismo axioma, se tiene:

$$4\times 3\times 7\times 9=4\times 3\times 9\times 7$$

Teorema 4.º—Si son varios los factores, el producto no altera, si se cambia el orden de dos factores consecutivos intermedios.

Ejemplo. $8\times 5\times 3\times 2=8\times 3\times 5\times 2$

Demostración.—El producto de 5 por 3 es igual al de 3 por 5, según el teorema 1.º, así: $5\times 3=3\times 5$

Si se multiplican los dos miembros de esta igualdad por 8, el producto no altera, según el axioma 8.º, y se tiene:

$$8\times 5\times 3=8\times 3\times 5$$

Multiplicando otra vez los dos miembros de esta igualdad por 2, y según el mismo axioma, se tiene:

$$8\times 5\times 3\times 2=8\times 3\times 5\times 2$$

De la demostración de estos cuatro teoremas, se deduce esta consecuencia general:

El orden de los factores no altera el producto.

PROBLEMAS

1.º ¿Cuánto valen 156 varas de paño, á 4 sucres la vara?

2.º ¿Cuánto costarán 80 caballos, sabiendo que cada uno vale 67 sucres?

3.º Hágase el número 725 seis veces mayor.

4.º Con un sucre se compran 8 libras de azúcar. ¿Cuántas se comprarán con 375 sucres?

5.º Se pregunta cuántos días hay en 3 siglos, 18 años, 9 meses y 2 semanas, sabiendo que 1 siglo tiene 100 años; 1 año, 12 meses; 1 mes, 4 semanas; y 1 semana, 7 días.

6.° En un ejército de 2.500 hombres se gastan 6.000 sucres por mes. Cuánto se gastará en 16 meses?

7.° Un gobernador de provincia gana 125 sucres por mes: Cuál es la renta anual?

8.° En una escuela hay 16 bancas, y en cada una se sientan 12 niños. Cuál es el número de escolares?

9.° Un correo camina 12 leguas por día. Cuántas caminará en 8 días?

10. Un hacendado compra 350 cabezas de ganado, á 12 sucres cada una. Cuánto debe pagar por todas?

11. Un libro tiene 80 páginas; cada página, 16 renglones; cada renglón, 8 palabras. Cuál es el total de éstas?

12. Un comerciante arriba á un puerto 326 bultos de mercancías, y le cobran 20 sucres de derechos por cada bulto. Cuánto debe pagar por todo?

13. Se pregunta cuántas onzas hay en 6 toneladas, 15 quintales, 3 arrobas, 18 libras, sabiendo que 1 tonelada tiene 20 quintales; 1 quintal, 4 arrobas; 1 arroba, 25 libras; y 1 libra, 16 onzas.

14. Multiplíquense abreviadamente los números 72.846 y 2.568 por 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, y 91.

15. Multiplíquense abreviadamente los números 8.564 y 7.945 por 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 y 19.

16. Multiplíquese abreviadamente el número 7'864.253 por 99, 999 y 9999.

17. Multiplíquense abreviadamente los números 15.863 y 75.432 por 11 y 111.

18. Multiplíquese la cantidad 12'345.679 por cada uno de los números 18, 27, 36, 45, 54, 63 y 81.

LECCION OCTAVA

División de números enteros.

Da origen á la división la resolución del siguiente problema: *Conocido un producto de dos factores, y conocido á la vez uno de éstos, buscar el otro factor.*

Por esto, la división se define de cuatro maneras:

1ª La *división* es una operación que tiene por objeto buscar un número, llamado *cociente* (1) que, multiplicado por otro, llamado *divisor*, produzca un tercer número, llamado *dividendo.*

(1) La palabra propia es cuociente; pero se suprime la *u*, en virtud de la figura gramatical, llamada síncopa.

2ª La *división* es una operación que tiene por objeto dividir un número, llamado *dividendo*, en tantas partes iguales cuantas unidades tenga otro número, llamado *divisor*, y por consiguiente, averiguar el valor de una de dichas partes.

3ª La *división* es una operación que tiene por objeto averiguar cuántas veces un número, llamado *dividendo*, contiene á otro, llamado *divisor*.

4ª La *división* es una operación que tiene por objeto averiguar cuántas veces un número, llamado *divisor*, cabe en otro llamado *dividendo*.

Escolio 1.º—El dividendo y el divisor pueden ser de distinta especie, lo cual no sucede en la suma y en la resta.

Escolio 2.º—El dividendo es un todo, y las partes que forman este todo son el divisor y el cociente, ó mejor dicho, el dividendo es un producto, y los factores son el divisor y el cociente.

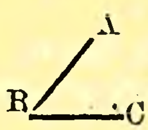
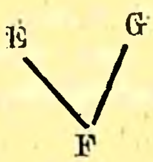
Signos que sirven para indicar la división.

La división se indica de tres modos:

1.º *Por medio de un ángulo formado por una línea vertical y una horizontal*, así:

(Se llama *ángulo*, en general, la mayor ó menor separación de dos líneas que se cortan en un punto, llamado *vértice* del ángulo.

Ejemplos.

1.º  2.º 

Línea recta es la más corta que puede trazarse de un punto á otro.

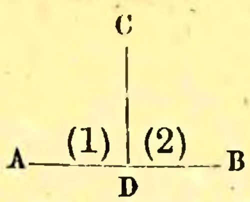
Ejemplo. M______N

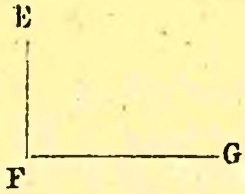
Línea perpendicular es la que cae sobre otra, sin inclinarse á un lado ni á otro, y forma con ésta *dos ángulos iguales*, que se llaman *rectos*.

Explicación.—Si la línea que cae sobre otra, se llama *perpendicular*, y que también se llama *vertical*, por venir de arriba hacia abajo, la línea que recibe á la vertical se llama, á la vez, *perpendicular*.

Se llama *ángulo recto* el que está formado por dos líneas perpendiculares.

Ejemplos.

1.° 

2.° 

Explicación.—La línea CD, que cae sobre la horizontal AB, es *la perpendicular;* y dando otra posición á la figura, resulta que la línea AB es á la vez *perpendicular*, con respecto á la otra línea. Los ángulos 1 y 2, formados por estas líneas, son *iguales y rectos;* y son, además, *adyacentes*, porque tienen *un mismo vértice*, que es D, y *un lado común*, que es CD.

El ángulo E F G es también *recto*, porque las líneas que lo forman son *perpendiculares*. Las líneas EF y FG se llaman *lados*, y el punto F se llama *vértice*.

Un ángulo se lee nombrando todas tres letras, y colocando en medio la letra del vértice: también se lee un ángulo, nombrando solamente la letra del vértice).

Ejemplo. $9 \,\underline{|\, 3 \,}$ y se lee: 9 dividido por 3
$\qquad 3$

Explicación.—El dividendo 9 se escribe á la izquierda del ángulo; en éste se escribe el divisor; y debajo de la línea horizontal se escribe el cociente 3 que, multiplicado por el divisor 3, produce el dividendo 9.

2°. *Por medio de dos puntos, escrito el uno sobre el otro.* Á la izquierda de dichos puntos se escribe el dividendo, y á la derecha el divisor.

Ejemplo. 12 : 4, y se lee: 12 dividido por 4

3.° *Por medio de una pequeña línea horizontal.* Encima de ésta se escribe *el dividendo*, y debajo el *divisor*, esto es, *en forma de quebrado.*

Ejemplo. $\frac{20}{5}$, y se lee: 20 partido ó dividido por 5, ó más bien: 20 sobre 5

Escolio.—Cuando hay que ejecutar una división, se hace uso del ángulo; pero cuando no hay que ejecutarla, se la escribe en forma de quebrado, esto es, se la indica.

Casos que ocurren en la división.

Estos casos son tres:

1.° *Dividir un número dígito por otro dígito.*
2.° *Dividir un número compuesto por un dígito.*
3.° *Dividir un compuesto por otro compuesto.*

Primer caso.—Sea el número 8 para dividirlo por 2, lo cual se indica así: 8 | 2

Explicación.—Se busca el divisor 2 en la primera columna horizontal de la tabla de multiplicación: se pone un dedo de la mano derecha sobre este 2, y se baja por la columna vertical, hasta encontrar el dividendo 8; y el número que esté en frente del 8, y en la primera columna vertical de la izquierda, será el cociente buscado, y dicho número es el 4 que, multiplicado por el divisor 2, produce el dividendo 8. Lo que se dice de este ejemplo, se dice de cualquiera otro.

Escolio.—Cuando la división no es exacta, entonces se baja el dedo por la columna vertical respectiva, hasta encontrar el número que más se aproxime al dividendo; y el cociente es el número que esté en la primera columna vertical de la izquierda; luego se multiplica el cociente por el divisor, y el producto se resta del dividendo, para averiguar la diferencia ó residuo.

Ejemplo 9 | 2

Explicación.—Se pone el dedo sobre el 2 que está en la primera columna horizontal, y se baja por la respectiva columna vertical, hasta encontrar el número que más se aproxime al 9, que es 8; y el número 4, que está en frente del 8, y en la primera columna vertical de la izquierda, es el cociente que, multiplicado por el divisor 2, produce el número 8; por último, se resta este número 8 del 9, y da 1 por residuo que, agregado al 8, produce el dividendo 9.

Las operaciones se disponen así:

$$1^{a}\quad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ \hline 8 & 4 \\ \hline 0 & \end{array} \qquad\qquad 2^{a}\quad \begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \hline 8 & 4 \\ \hline 1 & \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir un número dígito por otro dígito, se busca el divisor en la primera columna horizontal de la tabla de multiplicar; se pone un dedo de la mano derecha sobre el divisor y se baja por la columna vertical, hasta encontrar el dividendo ó un número que se aproxime á éste, y luego se busca el cociente en la primera columna vertical de la izquierda. Una vez encontrado el cociente, se multiplica por el divisor, y el producto se resta del dividendo.*

Segundo caso.—Para dividir un número compuesto por un dígito, se aplica la regla anterior, siempre que el dividendo no pase de 108.

Ejemplos.

1.° 96 | 8
96 12
—
0

2.° 75 | 6
6 12
—
15
12
—
3

Cuando el dividendo pase de 108, se procede así:

Ejemplo. 854 | 3
6 284 (cociente)
—
25
24
—
14
12
—
2 (residuo)

Explicación.—Se divide separadamente cada cifra del dividendo por el divisor 3; y entonces la operación queda reducida al *primer caso.* Se dice, pues: 2 por 3, 6, y se escribe este producto debajo del 8, que da 2 por residuo ó diferencia. Este residuo se llama *primer dividendo parcial.*

A la derecha de este 2 se escribe la cifra 5, y luego se divide 25 por 3; Se pone un dedo sobre el 3, que está en la primera columna horizontal, y se baja por la respectiva columna vertical, hasta encontrar el número 24, que es el que más se aproxima al dividendo 25; y el número 8, que está en frente de 24, y en la primera columna vertical de la izquierda, es el cociente, el cual se escribe debajo de la línea horizontal. Se multiplica este cociente 8, por el divisor 3, y el producto 24 se resta de 25, que da 1 por residuo ó diferencia. Este residuo se llama *segundo dividendo parcial.*

A la derecha de este 1 se escribe la cifra 4 del dividendo, y luego se divide 14 por 3, y así en adelante.

Tercer caso.—Para comprender este caso y resolverlo con más facilidad, se divide en dos:

1.° *Cuando el cociente haya de ser un número dígito.*

2.° *Cuando el cociente haya de ser un número compuesto.*

Escolio 1.°—Para saber á primera vista si el cociente es un número dígito ó compuesto, se multiplica el divisor por 10, para lo cual basta agregarle un cero á la derecha. Si este producto es mayor que el dividendo, el cociente es entonces un número dígito; pero si el producto es menor que el dividendo, el cociente es entonces un número compuesto.

Escolio 2.º—Las operaciones que sirven para componer los números, esto es, para aumentarlos, son la suma y la multiplicación; por el contrario, las que sirven para descomponer los números, esto es, para disminuirlos, son la resta y la división.

División de un número compuesto por otro compuesto, cuando el cociente haya de ser un número dígito.

Ejemplo.

260	27
243	9
17	

Explicación.—Multiplicando el divisor por 10, resulta 270; y como este producto es mayor que el dividendo, se ve que el cociente es un número dígito.

Se averigua ahora cuántas veces cabe la cifra 2 del divisor en la cifra 2 del dividendo; pero como hay que agregar una ó más unidades que resulten de multiplicar la cifra del cociente, sea cual fuere, por la cifra 7 del divisor, es claro que se deben tomar todas las cifras del dividendo, puesto que las dos cifras del divisor no caben en las dos primeras del dividendo.

Sabiendo ya que el cociente es un número dígito, se empieza á ensayar desde la cifra 1 hasta la cifra 9, de esta manera:

1 por 27 es 27; pero como este producto no puede restarse de 26, se ensaya la cifra 2, diciendo: 2 por 7, 14 y va 1; 2 por 2, 4 y 1, 5, esto es, 54. Este producto es muy bajo con respecto á 260, y se ensaya la cifra 3, diciendo: 3 por 7, 21 y van 2; 3 por 2, 6 y 2; 8, esto es, 81.

Como este producto es bajo con respecto á 260, se ensaya la cifra 4 que, multiplicada por 27, da 108 y así sucesivamente hasta llegar á la cifra 9 que, multiplicada por 27, da 243; y restando este producto de 260, se obtiene 17 por residuo.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir un número compuesto por otro compuesto, cuando el cociente haya de ser un número dígito, se escribe primero el dividendo, y después el ángulo, en el cual se escribe el divisor. Luego se averiguan cuántas veces cabe el divisor en el dividendo, y el número de veces es el dígito, el cual se escribe debajo de la línea horizontal; por último, se multiplica el cociente por el divisor, y el producto se resta del dividendo.*

Corolario 1.º—El dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente, más el residuo, si lo hay.

En el ejemplo anterior, se tiene: $260=27\times 9+17$

Corolario 2.º—Los dividendos parciales deben ser mayores que el divisor, por lo menos en una unidad, para que la división sea posible.

Corolario 3.º—El residuo debe ser menor que el divisor, porque si fuera mayor, se podría entonces continuar la división.

División de un número compuesto por otro compuesto, cuando el cociente haya de ser un número compuesto.

Ejemplo.

```
45687         | 342  (divisor)
342           |------------
                133  (cociente)
-----
1148  segundo dividendo parcial
1026
-----
 1227  tercer      ”      ”
 1026
 -----
  201  (residuo)
```

Explicación.—Como la cifra 3 del divisor cabe perfectamente una vez en la cifra 4 del dividendo, se escribe la cifra 1 debajo de la línea horizontal; después se multiplica esta cifra 1 por todo el divisor, y el producto 342 se escribe debajo del dividendo parcial 456, y en seguida se hace la resta, que da 114.

A la derecha de 114 se escribe la cifra 8 del dividendo. Como la cifra 3 del divisor cabe 3 veces en las cifras 11 del dividendo, se escribe esta cifra 3 debajo de la línea horizontal; después se multiplica esta cifra 3 por todo el divisor, y se escribe el producto 1.026 debajo del dividendo parcial 1.148, y en seguida se hace la resta, que da 122.

A la derecha de 122 se escribe la cifra 7 del dividendo. Como la cifra 3 del divisor cabe 3 veces en las cifras 12 del dividendo, se escribe esta cifra 3 debajo de la línea horizontal; después se multiplica esta cifra 3 por todo el divisor, y se escribe el producto 1.026 debajo del dividendo parcial 1.227, y en seguida se hace la resta, que da 201. Como no hay más cifras en el dividendo, queda terminada la división.

Según el primero de los *corolarios* que preceden, se tiene:

$$45687=342\times 133+201$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir un número compuesto por otro compuesto, cuando el cociente haya de ser también un número com-*

puesto, se averigua cuántas veces cabe la primera cifra de la izquierda del divisor en la primera ó dos primeras de la izquierda del dividendo; y la cifra que resulte, después de escribirla debajo de la línea horizontal, se la multiplica por todo el divisor, y el producto se resta del primer dividendo parcial, y se obtiene cierto residuo. A la derecha de éste se escribe la siguiente cifra del dividendo total, y se procede tal como acaba de enseñarse, hasta que se agote la última cifra del dividendo.

División de un número compuesto por un dígito, cuando el cociente haya de ser un número compuesto.

Ejemplo.

```
456 | 3
3   |----
    | 152
---
15
15
---
 06
  6
 --
  0
```

Según el primero de los *corolarios* que preceden, se tiene:

$$456 = 3 \times 152$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir un número compuesto por un dígito, cuando el cociente haya de ser un número compuesto, se averigua cuántas veces cabe el dígito en la primera ó dos primeras cifras de la izquierda del dividendo; y la cifra que resulte, después de escribirla debajo de la línea horizontal, se la multiplica por todo el divisor y se resta el producto del dividendo parcial, y se obtiene cierto residuo. A la derecha de éste se escribe la siguiente cifra del dividendo total, y se procede tal como acaba de enseñarse, hasta que se agote la última cifra del dividendo.*

Escolio.—Así como la multiplicación es una suma abreviada, así la división es una resta abreviada; para lo cual, basta restar el divisor del dividendo tantas veces cuantas sean posibles, y el cociente es el número de veces que se resta el divisor del dividendo.

Ejemplo.

```
438 | 97
388 |----
    |  4 (Procedimiento abreviado)
---
 50
```

```
438
 97
———
341
 97
———
244
 97
———
147
 97
———
 50
```

Como se ve, la división es mucho más rápida que la resta. El divisor 97 se ha restado cuatro veces del dividendo, y este número de veces es el cociente, y el número 50 es el residuo.

División de dos números compuestos cualesquiera.

Ejemplo.

```
864325 | 324
648    |------
       | 2667
——————
2163
1944
————
 2192
 1944
 ————
  2485
  2268
  ————
   217
```

Explicación.—Se separan en el dividendo, de izquierda á derecha, tantas cifras cuantas tenga él divisor, y se ve que éste cabe 2 veces en el primer dividendo parcial 864. Se multiplica la cifra 2 por todo el divisor, y el producto 648 se resta de 864, y se obtiene 216 por residuo.

A la derecha de éste se escribe la cifra 3 del dividendo total, y se ve que el divisor cabe 6 veces en el segundo dividendo parcial. Se multiplica la cifra 6 por todo el divisor, y el producto 1944 se resta de 2163, y se obtiene 219 por residuo, y se continúa así en adelante.

Según el primero de los *corolarios* que preceden, se tiene:

$$864325 = 324 \times 2667 + 217$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir dos números compuestos cualesquiera, se separan en el dividendo, de izquierda á derecha, tantas ci-*

fras cuantas tenga el divisor; después se averigua cuántas veces cabe el divisor en el primer dividendo parcial, y la cifra que resulte se escribe debajo de la línea horizontal. Se multiplica dicha cifra por todo el divisor, y el producto se resta del respectivo dividendo, y se obtiene cierto residuo. A la derecha de éste se escribe la siguiente cifra del dividendo total, y se continúa así, hasta terminar la división.

Escolio 1.º—Cuando se escribo á la derecha de un residuo la siguiente cifra del dividendo, y resulta menor que el divisor, se escribe entonces un cero en el cociente, y se agrega á la derecha de dicho residuo la siguiente cifra del dividendo; pero si esto no basta, se escribe otro cero en el cociente, y se agrega otra cifra á la derecha del residuo, hasta que sea posible la división.

Ejemplo.

5346058	49
49	109103
446	
441	
50	
49	
158	
147	
11	

Escolio 2.º—Al hacer la primera resta, se ve que el 5 queda en 4, y se dice: 4 menos 4, 0. Como este cero queda á la izquierda, no se lo escribe, porque no tiene ningún valor; y esta observación es la que se tiene presente en todo ejemplo semejante al anterior.

Manera de hacer pronto la división.

Ejemplo.

84567	3
245	28189
26	
27	

Explicación.—Se divide el 8 por 3, diciendo: 2 por 3, 6 á 8, 2.

A la derecha de este 2 se escribe el 4 del dividendo, y se divide 24 por 3, diciendo: 8 por 3, 24 á 24, cero, y según el *escolio* 2.º que precede, no se escribe dicho cero.

9

A la derecha de 24 se escribe el 5 del dividendo, y se divide por 3, diciendo: 1 por 3, es 3 á 5, 2.

A la derecha de este 2 se escribe el 6 del dividendo, y se divide por 3, diciendo: 8 por 3, 24 á 26, 2.

A la derecha de este 2 se escribe el 7 del dividendo, y se divide por 3, diciendo: 9 por 3, 27 á 27, cero, el cual no se escribe, porque no tiene valor.

Caso especial de división.

Cuando se divide un número cualquiera por 2, por 3, por 4, por 5, por 6, por 7, por 8, por 9 y por 10, es lo mismo que tomar la mitad, la tercera parte, la cuarta parte, la quinta parte, la sexta parte, la sétima parte, la octava parte, la novena parte y la décima parte.

Ejemplo.—En vez de dividir el número 4756 por 2, se toma la mitad, así:

4756
2378

Explicación.—Para tomar la mitad, se comienza por la izquierda, diciendo: mitad de 4, 2; mitad de 7, 3 y sobra 1, el cual, agregado al 5, da 15. Se dice: mitad de 15, 7 y sobra 1, el cual, agregado al 6, da 16, y se dice: mitad de 16, 8.

Ejemplo 2.°—Sea el número 5895 para dividirlo por 3.

Explicación.—Para tomar la tercera parte, se comienza por la izquierda, diciendo: tercera parte de 5, 1 y sobra 2 que, agregado al 8, da 28; después se dice: tercera parte de 28, 9 y sobra 1 que, agregado al 9, da 19; en seguida se dice: tercera parte de 19, 6 y sobra 1 que, agregado al 5, da 15; y por último, se dice: tercera parte de 15, 5.

Para tomar la cuarta, la quinta parte, etc., se procede de la misma manera; y los cocientes son los resultados que se obtienen, los cuales se escriben debajo del número dado. La operación se ejecuta así:

5895
1965

Corolarios que se deducen de la definición de la división.

1.° Dividir un número por otro es hacer el primero tantas veces menor cuantas unidades tiene el segundo.

Ejemplo.—Dividir el número 12 por 3, es hacerlo tres veces menor, para lo cual basta dividirlo por 3, esto es, basta tomar la tercera parte.

2.° Cuando se divide un número cualquiera por la unidad, se obtiene por cociente el mismo número, porque la unidad no multiplica ni divide.

Ejemplo. 425 ⌊ 1
000 425

3.° Cuando el dividendo y el divisor son iguales, se obtiene la unidad por cociente.

Ejemplo. 342 ⌊ 342
1

Usos de la división.

Se hace uso de la división en cinco casos.

1.° *Cuando se quiere hacer un número varias veces menor.*

2.° *Cuando, conociendo el valor de varias unidades, cosas ú objetos de cierta especie, se quiere saber el valor de una unidad, cosa ú objeto de la misma especie.*

3.° *Cuando, conociendo un producto de dos factores, y uno de éstos á la vez, se quiere conocer el otro factor.*

4.° *Cuando, conociendo el valor de varios objetos y el de uno de éstos al mismo tiempo, se quiere conocer el número total de objetos.*

5.° *Cuando se quiere reducir unidades de especie inferior á superior.*

Explicación del primer uso.—Si se quiere hacer el número 16 cuatro veces menor, basta dividirlo por 4, así: 16 : 4=4

Explicación del segundo uso.—Si se compran 60 varas de paño por 240 sucres, y se quiere saber al mismo tiempo el valor de una vara, no hay más que dividir el precio 240 por el número de varas, es decir, por 60, así:

240 : 60=4 sucres

El cociente indica que una vara vale 4 sucres.

Explicación del tercer uso.—Para saber cuál es el factor que, multiplicado por 27, da el producto 11664, no hay más que dividir este producto por el factor conocido 27, así:

11664 ⌊ 27
86 432
54

Luego el número 432 es el factor que se busca, el cual, multiplicado por 27, da el producto 11664.

Esta división se ha efectuado tomando las tres primeras cifras de la izquierda del dividendo. Como el divisor cabe 4 veces en el dividendo parcial, se dice: 4 por 7, 28 á 36, 8 y van 3; 4 por 2, 8 y 3, 11 á 11, cero, el cual no se escribe.

A la derecha del residuo 8 se escribe la cifra 6, y se divide 86 por 27. Como el divisor cabe tres veces en este dividendo parcial, se dice: 3 por 7, 21 á 26, 5 y van 2; 3 por 2, 6 y 2, 8 á 8, cero, el cual no se escribe.

A la derecha del residuo 5 se escribe la cifra 4, y se divide 54 por 27. Como el divisor cabe 2 veces en este último dividendo parcial, se dice: 2 por 7, 14 á 14, cero, el cual no se escribe; 2 por 2, 4 y 1 que va, 5 á 5, cero, que tampoco se escribe, y queda terminada la operación, según la *manera de hacer pronto la división.*

Explicación del cuarto uso.—Sabiendo que, con 2.000 sucres, se han comprado varios caballos, y sabiendo al mismo tiempo que un caballo vale 25 sucres, se quiere saber cuál es el número de caballos comprados. Para esto, no hay más que dividir el precio total 2.000 por el precio menor 25, así:

2.000	25
	80

Luego el número 80 indica los caballos comprados.

Explicación del quinto uso.—Se desea saber cuántas libras, arrobas y quintales hay en 4786 onzas.

Se divide el número 4786 por 16 onzas que tiene una libra, para reducirlas á la especie inmediatamente superior; el cociente expresa libras, y el residuo expresa onzas, así:

4786	16
158	299 libras
146	
2 onzas	

Ahora se divide el número 299 por 25 libras que tiene una arroba, para reducirlas á arrobas, así:

299	25
49	11 arrobas
24 libras	

Ahora se divide el número 11 por 4 arrobas que tiene un quintal, para reducirlas á quintales, así:

11	4
3 @	2 quintales

De todas estas operaciones resulta: 4786 onzas=2 quintales+3 arrobas+24 libras+2 onzas.

Haciendo la reducción de unidades superiores á inferiores en el segundo miembro, según el cuarto uso de la multiplicación, se tiene: 4786=4786

Abreviaciones importantes de la división.

Estas abreviaciones son tres:

1ª *Cuando el divisor es la unidad seguida de uno ó más ceros.*

2ª *Cuando el dividendo y el divisor terminan en uno ó más ceros.*

3ª *Cuando el dividendo termina en ceros, y la unidad, que es el divisor, termina también en ceros.*

Ejemplo 1.° 17285 : 100

Explicación—Con una coma se separan dos cifras en el dividendo, de derecha á izquierda, porque la unidad tiene dos ceros. La parte de la izquierda de la coma es el cociente, y la de la derecha es el residuo, así:

17285 : 100=172,85

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir un número cualquiera por la unidad seguida de uno ó más ceros, se separan con una coma en el dividendo, de derecha á izquierda, tantas cifras cuantos ceros acompañen á la unidad. La parte de la izquierda de la coma es el cociente, y la de la derecha es el residuo.*

Ejemplo 2.° 381600 : 7200

Explicación.—Se suprimen dos ceros en el divisor y dos en el dividendo, es decir, 100, y luego se dividen las cifras que quedan, así:

3816 : 72=53 (cociente)

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir dos números que terminan en ceros, se suprime igual número de ceros en el dividendo y en el divisor, y luego se dividen las cifras que quedan.*

Ejemplo 3.° 7853000 : 100

Explicación.—Se suprimen dos ceros en el divisor y dos en el dividendo, es decir, 100, y queda 78530, que es el cociente.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir un número seguido de ceros* *por la unidad seguida también de ceros, se suprime igual número de ceros en el dividendo y en el divisor, y el cociente es la cantidad que sobra en el dividendo.*

Abreviaciones de la división con auxilio de la multiplicación.

Estas abreviaciones son tres:

1ª *Cuando el divisor es* 5.
2ª *Cuando el divisor es* 25.
3ª *Cuando el divisor es* 125.

Ejemplo 1.° 796 : 5

Explicación.—Se multiplica el dividendo por 2, y el producto se divide por 10, según la regla de la 1ª abreviación, así:

$$796 \times 2 = 1592 : 10 = 159,2$$

159 es el cociente, y 2 el residuo.

Al multiplicar el dividendo por 2, se hace dos veces mayor; al dividir el producto por 10, se hace diez veces menor; luego el dividendo queda hecho, en definitiva, 5 veces menor, porque 5 es la mitad de 10.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir un número cualquiera por* 5, *se lo multiplica por* 2, *y el producto se divide por* 10.

Ejemplo 2.° 9728 : 25

Explicación.—Se multiplica el dividendo por 4, y el producto se divide por 100, según la regla de la 1ª abreviación, así:

$$9728 \times 4 = 38912 : 100 = 389,12$$

389 es el cociente, y 12 el residuo.

Al multiplicar el dividendo por 4, se hace cuatro veces mayor; al dividir el producto por 100, se hace cien veces menor; luego el dividendo queda hecho, en definitiva, 25 veces menor, esto es, dividido por 25, porque 25 es la cuarta parte de 100.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir un número cualquiera por* 25, *se lo multiplica por* 4, *y el producto se divide por* 100.

Ejemplo 3.° 7836 : 125

Explicación.—Se multiplica el dividendo por 8, y el producto se divide por 1000, según la regla de la 1ª abreviación, así:

$$7836 \times 8 = 62688 : 1000 = 62,688$$

62 es el cociente, y 688 el residuo.

Al multiplicar el dividendo por 8, se hace ocho veces mayor; al dividir el producto por 1000, se hace mil veces menor; luego el dividendo queda hecho, en definitiva, 125 veces menor, esto es, dividido por 125, porque 125 es la octava parte de 1000.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir un número cualquiera por* 125, *se lo multiplica por* 8, *y el producto se divide por* 1000.

Abreviaciones de la multiplicación con auxilio de la división.

Estas abreviaciones son cuatro:

1ª *Cuando uno de los factores es* 5.
2ª *Cuando uno de los factores es* 15.
3ª *Cuando uno de los factores es* 25.
4ª *Cuando uno de los factores es* 125.

Ejemplo 1.º 786×5

Explicación.—El primer factor se multiplica por 10, y el producto se divide por 2, para lo cual basta tomar la mitad, así:

$$786\times10=7860 : 2=3930 \text{ (producto)}$$

Al multiplicar por 10 el multiplicando, se hace diez veces mayor; al dividir el producto por 2, se hace dos veces menor; luego el multiplicando queda, en definitiva, multiplicado por 5, porque 5 es la mitad de 10.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Cuando uno de los factores es* 5, *se multiplica el otro factor por* 10, *y el producto se divide por* 2, *para lo cual se saca la mitad.*

Ejemplo 2.º 364×15

Explicación.—Se multiplica por 10 el primer factor, y resulta 3640. De este producto se saca la mitad y se la escribe debajo del mismo producto; luego se suman las dos cantidades, y se obtiene el producto definitivo, así:

$$\begin{array}{rrl} 364\times10= & 3640 & \text{(producto)} \\ & 1820 & \text{(mitad)} \\ \hline & 5460 & \text{(producto neto)} \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Cuando uno de los factores es* 15, *se multiplica por* 10 *el otro factor; del producto se saca la mitad; luego se suman las dos cantidades, y se obtiene el producto definitivo.*

Ejemplo 3.° 746×25

Explicación.—Se multiplica por 100 el primer factor, y el producto se divide por 4, así:

746×100=74600 : 4=18650 (producto)

Al multiplicar el primer factor por 100, se hace cien veces mayor; al dividir el producto por 4, se hace cuatro veces menor; luego el multiplicando queda, en definitiva, multiplicado porque 25, que es la cuarta parte de 100.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Cuando uno de los factores es* 25, *se multiplica el otro factor por* 100, *y el producto se divide por* 4.

Ejemplo 4.° 472×125

Explicación.—Se multiplica el primer factor por 1000, para lo cual basta agregarle tres ceros; el producto se divide por 8, para lo cual se saca la octava parte, así:

742×1000=742000 : 8=92750

Al multiplicar el primer factor por 1000, se hace mil veces mayor; al dividir el producto por 8, se hace ocho veces menor; luego el multiplicando queda, en definitiva, multiplicado por 125, porque 125 es la octava parte de 1000.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Cuando uno de los factores es* 125, *se multiplica el otro factor por* 1000, *y el producto se divide por* 8.

Pruebas de la multiplicación.

La multiplicación se prueba de dos modos:

1.° *Por la misma multiplicación.* Se invierte el orden de los factores, esto es, se pone el multiplicando como multiplicador, y éste como multiplicando. Si los resultados son iguales, puede asegurarse que la operación está bien hecha.

2.° *Por medio de la división.* Se divide el producto por el multiplicador, y debe resultar el multiplicando, ó se divide el producto por el multiplicando, y debe resultar el multiplicador, porque el orden de los factores no altera el producto.

Pruebas de la división.

La división se prueba de dos modos:

1.° *Por la misma división.* Se divide el dividendo, que es un producto, por el cociente, que es un factor, y debe resultar el divisor, que es el otro factor.

2.° *Por medio de la multiplicación.* Se multiplica el divisor por el cociente, y al producto se agrega el residuo, si lo hay, y debe resultar el dividendo, porque éste es un producto, y los factores son el divisor y el cociente.

Pruebas de las cuatro operaciones por 9 y por 11.

Prueba de la suma por 9.

Ejemplo.

38.426
21.748
60.174

Explicación.—Sumando las cifras del primer número, de derecha á izquierda, ó viceversa, se obtiene 23. Dividiendo esta suma 23 por 9, se obtiene 2 por cociente, y 5 por residuo.

Las cifras del segundo número dan 22 por suma. Dividiendo ésta por 9, se obtiene 2 por cociente, y 4 por residuo.

Las cifras del total dan 18 por suma. Dividiendo ésta por 9, se obtiene 2 por cociente, y cero por residuo.

Los residuos 5 y 4, sumados entre sí, dan 9.

Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 1 por cociente, y cero por residuo, igual al residuo del total, y la suma está bien hecha.

Prueba de la suma por 11.

Sea el mismo *ejemplo.*

38.426
21.748
60.174

Explicación.—Se suman las cifras *de lugar impar* del primer sumando, comenzando de derecha á izquierda, esto es, 1ª., 3ª., 5ª., etc., las cuales son 6, 4 y 3, y dan 13. Luego se suman las *de lugar par*, comenzando, asimismo, de derecha á izquierda, esto es, 2ª., 4ª., etc., las cuales son 2 y 8, y dan 10. Se resta esta suma de la primera, y se obtiene 3 por residuo, así:

$$13-10=3$$

Las cifras 8, 7 y 2 de lugar impar del segundo sumando, dan 17. Las cifras 4 y 1 de lugar par dan 5. Haciendo la resta, se obtiene 12 por residuo, así: $17-5=12$

Las cifras 4, 1 y 6 del total dan 11. Las cifras 7 y 0 dan 7. Haciendo la resta, se obtiene 4 por residuo, así: $11-7=4$ (residuo del total)

Ahora, los residuos 3 y 12, sumados entre sí, dan 15. Res-

to

tando de esta suma el número 11, se obtiene 4 por residuo, igual al residuo del total, y la suma está bien hecha.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para probar la suma por 9, se busca el residuo de cada uno de los sumandos, y se suman dichos residuos. La suma de éstos se divide por 9, y el residuo debe ser igual al residuo del total.*

Para probarla por 11, se suman primero las cifras de lugar impar, y después las de lugar par; se resta la segunda suma de la primera, y se hace igual operación en cada sumando, lo mismo que en el total. Luego se suman los residuos de los sumandos, y de la suma se resta el número 11, y el residuo debe ser igual al residuo del total, si la operación está bien hecha.

Escolio.—Cuando la suma de las cifras de lugar impar es menor que la de las cifras de lugar par, se agrega á la primera un múltiplo de 11, que sea suficiente para poder hacer la resta.

Ejemplo. 639.546
158.326
797.872 (total)

Explicación.—Las cifras 6, 5 y 3 del primer sumando, dan 14. Las cifras 4, 9 y 6 dan 19. Como no puede hacerse la resta, puesto que 14 es menor que 19, se agrega 11 á la primera suma, así: $14+11=25$. De esta suma se resta la segunda, y se obtiene 6 por residuo, así: $25-19=6$

Las cifras 6, 3 y 5 del segundo sumando, dan 14. Las cifras 2, 8 y 1 dan 11. Haciendo la resta, se obtiene 3 por residuo así: $14-11=3$

Las cifras 2, 8 y 9 del total dan 19. Las cifras 7, 7 y 7 dan 21. Como no puede hacerse la resta, puesto que 19 es menor que 21, se agrega 11 á la primera suma, así: $19+11=30$. De esta suma se resta la segunda, y se obtiene 9 por residuo, así: $30-21=9$

Sumando los residuos de los sumandos, se obtiene un número igual al residuo 9 del total, así: $6+3=9$

Prueba de la resta por 9.

Ejemplo. 3142569
451829
2690740

Explicación.—Las cifras del minuendo, sumadas entre sí, dan 30. Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 3 por cociente, y 3 por residuo.

Las cifras del sustraendo, sumadas entre sí, dan 29. Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 3 por cociente, y 2 por residuo.

Las cifras de la diferencia, sumadas entre sí, dan 28. Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 3 por cociente, y 1 por residuo.

Ahora, sumando los residuos 2 y 1 del sustraendo y de la diferencia, se obtiene 3, el cual no puede dividirse por 9, por ser menor; luego el 3 es residuo igual al del minuendo, y la operación está bien hecha.

Prueba de la resta por 11.

Sea el mismo *ejemplo.*

$$\begin{array}{r} 3142569 \\ 451829 \\ \hline 2690740 \end{array}$$

Explicación.—Las cifras 9, 5, 4 y 3 del minuendo, y *de lugar impar*, sumadas entre sí, dan 21. Las cifras 6, 2 y 1 *de lugar par*, dan 9. Restando esta suma de la primera, se obtiene 12 por residuo, así: 21—9=12

Las cifras 9, 8 y 5 del sustraendo, y *de lugar impar*, sumadas entre sí, dan 22. Las cifras 2, 1 y 4 *de lugar par*, dan 7. Haciendo la resta, se obtiene 15 por residuo, así: 22—7=15

Las cifras 0, 7, 9 y 2 de la diferencia, y *de lugar impar*, dan 18. Las cifras 4, 0 y 6 *de lugar par*, dan 10. Haciendo la resta, se obtiene 8 por residuo, así: 18—10=8

Ahora, los residuos 15 y 8 del sustraendo y de la diferencia, sumados entre sí, dan 23. Restando de esta suma el número 11, se obtiene 12 por residuo, igual al del minuendo, y está bien hecha la operación, así: 23—11=12

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para probar la resta por 9, se buscan el residuo del sustraendo y el de la diferencia, y se suman dichos residuos. Esta suma se divide por 9, y el residuo debe ser igual al del minuendo.*

Para probarla por 11, se suman las cifras de lugar impar y las de lugar par en el minuendo, en el sustraendo y en la diferencia, y se hacen las restas. Luego se suma el residuo del sustraendo con el de la diferencia; de la suma se resta el número 11, y el residuo debe ser igual al residuo del minuendo, si la operación está bien hecha.

Prueba de la multiplicación por 9.

Ejemplo.

```
     3829
     2768
     ----
    30632
   22974
  26803
  7658
 --------
 10598672
```

Explicación.—Las cifras del multiplicando, sumadas entre sí, dan 22. Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 2 por cociente, y 4 por residuo.

Las cifras del multiplicador, sumadas entre sí, dan 23. Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 2 por cociente, y 5 por residuo.

Las cifras del producto total, sumadas entre sí, dan 38. Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 4 por cociente, y 2 por residuo.

Ahora, multiplicando entre sí los residuos 4 y 5 de los factores, se obtiene 20 por producto. Dividiendo éste por 9, se obtiene 2 por cociente, y 2 por residuo, igual al residuo del producto total, y está bien hecha la operación.

Prueba de la multiplicación por 11.

Sea el mismo *ejemplo.*

```
     3829
     2768
     ----
    30632
   22974
  26803
  7658
 --------
 10598672
```

Explicación.—Las cifras 9 y 8 del multiplicando, y *de lugar impar*, sumadas entre sí, dan 17. Las cifras 2 y 3 *de lugar par*, dan 5. Haciendo la resta, se obtiene 12 por residuo, así: 17—5=12

Las cifras 8 y 7 del multiplicador, y *de lugar impar*, dan 15. Las cifras 6 y 2 *de lugar par*, dan 8. Haciendo la resta, se obtiene 7 por residuo, así: 15—8=7

Las cifras 2, 6, 9 y 0 del producto total, y *de lugar impar*, dan 17. Las cifras 7, 8, 5 y 1 *de lugar par*, dan 21. Como no puede restarse esta suma de la primera, por ser menor, se agrega 11 al número 17, según el *escolio* de la prueba de la suma por 11, y se tiene 28. Restando de esta suma el número 21, se obtiene 7 por residuo, así: 28—21=7

Ahora, multiplicando entre sí los residuos 12 y 7 de los factores, se obtiene 84 por producto. Dividiendo ésto por 11, se obtiene 7 por cociente, y 7 por residuo, igual al residuo del producto total, y está bien hecha la operación.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para probar la multiplicación por 9, se busca el residuo de cada uno de los factores, y se multiplican dichos residuos. El producto de éstos se divide por 9, y el residuo debe ser igual al del producto total.*

Para probarla por 11, se suman primero las cifras de lugar impar, y después las de lugar par, en los factores y en el producto total, y se hacen las restas. Luego se multiplican los residuos de los factores; el producto de éstos se divide por 11, y el residuo debe ser igual al residuo del producto total, si la operación está bien hecha.

Prueba de la división por 9.

Ejemplo.	47286395	7.954
	75163	5.944
	35779	
	39635	
	7819 (último residuo)	

Explicación.—Una vez hecha la división abreviadamente, se resta del dividendo el último residuo 7819, así:

```
 47286395
     7819
 --------
 47278576 (nuevo dividendo)
```

Las cifras de este número, sumadas entre sí, dan 46. Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 5 por cociente, y 1 por residuo.

Las cifras del divisor, sumadas entre sí, dan 25. Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 2 por cociente, y 7 por residuo.

Las cifras del cociente, sumadas entre sí, dan 22. Dividiendo esta suma por 9, se obtiene 2 por cociente, y 4 por residuo.

Ahora, multiplicando entre sí los residuos 7 y 4 del divisor y del cociente, se obtiene 28 por producto. Dividiendo éste por 9, se obtiene 3 por cociente, y 1 por residuo, igual al residuo del nuevo dividendo.

Prueba de la división por 11.

Sea el mismo *ejemplo.*

Explicación.—Las cifras 6, 5, 7 y 7 del nuevo dividendo, y *de lugar impar*, sumadas entre sí, dan 25. Las cifras 7, 8, 2 y 4 *de lugar par*, dan 21. Haciendo la resta, se obtiene 4 por residuo, así: 25—21=4

Las cifras 4 y 9 del divisor, y *de lugar impar*, dan 13. Las cifras 5 y 7 *de lugar par*, dan 12. Haciendo la resta, se obtiene 1 por residuo, así: 13—12=1

Las cifras 4 y 9 del cociente, y *de lugar impar*, dan 13. Las cifras 4 y 5 *de lugar par*, dan 9. Haciendo la resta, se obtiene 4 por residuo, así: 13—9=4

Ahora, multiplicando entre sí los residuos 1 y 4 del divisor y del cociente, se obtiene 4 por producto, el cual es igual al residuo del nuevo dividendo.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para probar la división por 9, se resta del dividendo el último residuo de la división, y se obtiene un nuevo dividendo. En seguida se buscan el residuo del divisor y el del cociente, y se multiplican dichos residuos El producto de éstos se divide por 9, y el residuo debe ser igual al del nuevo dividendo.*

Para probarla por 11, se suman primero las cifras de lugar impar, y después las de lugar par, en el nuevo dividendo, en el divisor y en el cociente, y se hacen las restas. Luego se multiplican los residuos del divisor y del cociente; el producto de éstos se divide por 11, y el residuo debe ser igual al residuo del nuevo dividendo, si la operación está bien hecha.

Teoría de las igualdades.

Se da el nombre de *igualdad* á dos cantidades separadas por el *signo igual.*

Ejemplos. 1.° 12=3×4 2.° 25×4=100

La cantidad ó cantidades que están antes del signo igual, se llaman *primer miembro*; la cantidad ó cantidades que están después del signo igual, se llaman *segundo miembro.* La igualdad significa que las dos cantidades separadas por el respectivo signo, tienen un mismo valor, y puede sustituírse la una por la otra.

Explicación 1ª—El primer miembro puede ser un producto de dos ó más factores, y el segundo miembro puede estar formado por dichos factores, ó viceversa.

Ejemplo. $24=2\times3\times4$, ó $2\times3\times4=24$

Explicación 2ª—El primer miembro puede ser una suma, y el segundo miembro puede estar formado por los sumandos, ó viceversa.

Ejemplo. $48=12+8+14+2+12$
ó $12+8+14+2+12=48$

Explicación 3ª—El primer miembro puede ser un producto, y el segundo miembro puede ser una suma, ó viceversa.

Ejemplo. $6\times5\times2\times3=25+46+38+71$
ó $25+46+38+71=6\times5\times2\times3$

Explicación 4ª—El primer miembro puede ser un producto, y el segundo miembro puede ser una diferencia, ó viceversa.

Ejemplo. $6\times8=72-24$, ó $72-24=6\times8$

Explicación 5ª—El primer miembro puede ser una suma compuesta de dos ó más sumandos, y el segundo miembro puede ser una diferencia, ó viceversa.

Ejemplo. $2+8+6+9=64-39$, ó $64-39=2+8+6+9$

Explicación 6ª—El primer miembro puede ser un producto, y el segundo miembro puede componerse de dos factores y un sumando, ó viceversa.

Ejemplo. $260=9\times27+17$
ó $9\times27+17=260$

Escolio.—Todavía se puede exponer las igualdades de varias otras maneras.

PROBLEMAS

1.º Hágase el número 9 tres veces menor.

2.º Hágase el número 588 cuatro veces menor.

3.º 48 varas de paño importan 144 sucres. Cuánto importa una sola vara?

4.º ¿Cuál es el número que, multiplicado por 28, da por producto 4.984?

5.º Un negociante ha comprado varias mulas en 6.540 sucres, á razón de 60 sucres cada una. Cuántas son las mulas compradas?

6.º Un producto de dos factores es 9.483, y uno de éstos es 87. Cuál es el otro factor?

7.º Cuántos quintales, arrobas y libras habrá en 56800 onzas?

8.° Un ejército se compone de 5.000 hombres, y hay que repartirles 335.000 cápsulas. Cuántas debe darse á cada uno?

9.° ¿Cuál es el cociente que resulta de dividir el número 78'642.000 por 4.800?

10. ¿Cuáles son los cocientes que resultan de dividir el número 3'758.742, sucesivamente por 10, 100 y 1000?

11. En sostener el personal de una Universidad gasta el Gobierno 8.640 sucres por año. Cuánto gasta mensualmente?

12. Multiplíquese el número 3.562 por 786, y pruébese la multiplicación por ambos métodos.

13. Divídase abreviada y sucesivamente el número 98.650 por 5 y por 25.

14. Multiplíquese abreviada y sucesivamente el número 78.496 por 5, 15, 25 y 125.

LECCION NOVENA

Caracteres de divisibilidad.

Se llaman *caracteres de divisibilidad* ciertas señales que sirven para conocer si un número compuesto es exactamente divisible por otros números.

Una vez conocidas estas señales, se puede saber el residuo que resulte de dividir un número por otro, sin necesidad de ocurrir á los procedimientos ordinarios de la división.

Estas señales ó caracteres son *el cero;* los números *pares* 2, 4, 6, 8; los *impares* 3, 5, 9, 11, 25, 125, y la unidad seguida de uno ó más ceros.

Carácter de divisibilidad por 2.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 2, es que la cifra de las unidades simples sea 0, 2, 4, 6 ú 8.

Ejemplos. 580 es divisible por 2, porque termina en cero; para lo cual, basta tomar la mitad, según el *caso especial de división;* 432 es divisible por 2; 624, divisible por 2; 936 es divisible por 2; y 338 es divisible por 2.

Carácter de divisibilidad por 4.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 4, es que las dos últimas cifras de la derecha sean divisibles por 4, ó que dichas dos cifras sean ceros.

Ejemplo 1.° 7.928 es divisible por 4, porque las dos cifras 28 son divisibles por 4; y por tanto, todo el número es divisible por 4; para lo cual basta sacar la cuarta parte, según el *caso especial de división.*

Ejemplo 2.°—6.500 es divisible por 4, porque las dos últimas cifras son ceros.

Carácter de divisibilidad por 6.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 6, es que sea divisible por 2 y por 3.

Ejemplo. El número 84.264 es divisible por 6, porque lo es por 2 y por 3. Por 2, porque termina en cifra par; y por 3, porque la suma 24 es divisible por 3.

Carácter de divisibilidad por 3.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 3, es que la suma de todas las cifras sea divisible por 3.

Ejemplo. 84.264 es divisible por 3, porque la suma 24 es divisible por 3.

Carácter de divisibilidad por 5.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 5, es que la cifra de las unidades simples sea 0 ó 5.

Ejemplo 1.° 7640 es divisible por 5, porque termina en cero.

Ejemplo 2.° 84375 es divisible por 5, porque termina en cinco.

Escolio.—Cuando un número termina en cero, además de ser divisible por 2, lo es también por 5.

Carácter de divisibilidad por 9.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 9, es que la suma de todas las cifras sea divisible por 9.

Ejemplo. 738 es divisible por 9, porque la suma 18 es divisible por 9.

Carácter de divisibilidad por 11.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 11, es que la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y la suma de las cifras de lugar par, sea nula ó sea divisible por 11.

Ejemplo 1º. 236785945

Explicación. Para saber las cifras de lugar impar, se comienza de la derecha para la izquierda, así: 5 y 9 son 14; 14 y 8 son 22; 22 y 6 son 28; 28 y 2 son 30.

Las cifras de lugar par se cuentan también de derecha á izquierda, así:

4 y 5 son 9; 9 y 7 son 16; 16 y 3 son 19. Se resta ahora la suma 19 de la suma 30, así:

$$30-19=11$$

Ejemplo 2.º 87489457

Explicación.—Las cifras de lugar impar 7, 4, 8 y 7 dan 26.

Las cifras de lugar par 5, 9, 4 y 8 dan 26.

Restando ahora estas dos sumas entre sí, resulta que la diferencia es nula, así: $26-26=0$

Carácter de divisibilidad por 25.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 25, es que las dos últimas cifras de la derecha sean divisibles por 25, ó que dichas dos cifras sean ceros.

Ejemplos. 875 y 42500 son divisibles por 25.

Carácter de divisibilidad por 125.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 125, es que las tres últimas cifras de la derecha sean divisibles por 125, ó que dichas tres cifras sean ceros.

Ejemplos. 38625 y 4875 son divisibles por 125, como también 384.000

Escolio 1.º—Cuando un número termina en dos ceros, además de ser divisible por 4, lo es también por 25; porque una vez que el número termina en dos ceros, es divisible por 100, y este producto 100 se compone de los dos factores 4 y 25.

Escolio 2.º—Cuando un número termina en tres ceros, además de ser divisible por 8, lo es también por 125, porque una vez que el número termina en tres ceros, es divisible por 1000, y este producto se compone de los dos factores 8 y 125.

Carácter de divisibilidad por la unidad seguida de uno ó más ceros.

La condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por la unidad seguida de uno ó más ceros, es que termine en tantos ceros cuantos acompañen á la unidad.

Ejemplos. 976.000 es divisible por 1000; 8.500 es divisible por 100; 60 es divisible por 10.

Del máximo común divisor.

(M. C. D.)

Se llama *máximo común divisor* de dos ó más números dados el mayor número que divide exactamente á todos.

Ejemplo. El m. c. d. de 16, 20 y 28 es 4.

Explicación.—Si se divide el número 16 por 4, se obtiene 4 por cociente, y cero por residuo. Si se divide el número 20 por 4, se obtiene 5 por cociente, y cero por residuo. Si se divide el número 28 por 4, se obtiene 7 por cociente, y cero por residuo.

Corolario 1.°—Cuando dos ó más números no son divisibles sino por la unidad, se llaman entonces *primos relativos ó primos entre sí.*

Ejemplos. Los números 18, 35 y 15 no tienen más divisor común que la unidad.

Corolario 2.° Cuando un número, considerado por sí solo, no es divisible sino por sí mismo ó por la unidad, se llama entonces *primo absoluto.*

Ejemplo. 7 es primo absoluto

Principios en que se funda la investigación del máximo común divisor.

Estos principios son dos:

1.°—*Si un número menor divide exactamente á otro mayor, el menor es entonces el máximo común divisor de los dos números.*

Ejemplo. 72 y 8

Explicación.—Como el número 8 divide exactamente á 72, es claro que 8 es el máximo común divisor; porque, además de dividirse á sí mismo, divide también al número 72, y se obtiene 9 por cociente.

El número 8 no puede ser dividido por un número mayor que el mismo 8, porque entonces la división es imposible; luego el número 8 es el máximo común divisor.

2.º—*Si un número menor no divide exactamente á otro mayor, entonces el máximo común divisor está comprendido entre el menor y el último residuo de la división.*

Ejemplo. 96 y 14

Explicación.—Como el número 14 no divide exactamente á 96, es claro que el máximo común divisor estará comprendido entre 14 y 12, que es el residuo, así:

96 | 14
12   6

Para buscar el máximo común divisor de dos números, hay dos procedimientos: *Por medio de la división, y por medio de la descomposición en los factores primos.*

Modo de buscar el máximo común divisor por medio de la división.

Ejemplo. Se quiere saber cuál es el máximo común divisor de 584 y 36.

Explicación 1ª—Se divide 584 por 36, así:

      16
584 | 36
224
  8 (residuo)

El cociente 16 se escribe encima del divisor 36.

Ahora se divide el número menor 36 por el residuo 8, puesto que la división anterior no fué exacta, así:

     4
36 | 8
4

El cociente 4 se escribe encima del divisor 8.

Ahora se divide el número menor 8 por el residuo 4, puesto que la division anterior no fué exacta, así:

   2
8 | 4
0

En virtud de que esta última división es exacta, resulta que el número 4 es *el máximo común divisor.* En efecto, dividiendo el número mayor 584 por 4, se obtiene 146 por cociente exacto; y dividiendo el número menor 36 por el mismo 4, se obtiene 9 por cociente exacto.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

	16	4	2
584	36	8	4
224	4	0	
8			

Explicación 2ª—Se escribe el cociente 16 encima del divisor 36, que es el número menor, con el objeto de escribir el segundo residuo 4 debajo de la línea horizontal, y en frente del mismo 36.

Como la división no es exacta, se divide el número menor por el primer residuo 8, que da 4 por cociente y 4 por residuo. Se escribe el cociente 4 encima del divisor 8, y el residuo 4 se escribe debajo de 36.

Como esta segunda división tampoco es exacta, se divide el número menor 8 por el segundo residuo 4, que da 2 por cociente y cero por residuo.

El cociente 2 se escribe encima del divisor 4; y como no sobra nada, se escribe un cero debajo del 8.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para buscar el máximo común divisor de dos números, se divide el mayor por el menor, y se escribe el cociente encima del divisor. Si la división es exacta, el máximo común divisor es entonces el número menor, según el principio* 1º; *pero si la disión no es exacta, se divide entonces el número menor por el primer residuo, y se escribe el cociente encima del divisor. Si esta división tampoco es exacta, se divide el primer residuo por el segundo residuo; después se divide el segundo residuo por el tercero, y así sucesivamente. Cuando se obtenga un cociente exacto, entonces el máximo común divisor es el último divisor.*

Modo de buscar el máximo común divisor por medio de la descomposición en los factores primos.

Dos ó más números son *primos relativos ó primos entre sí,* cuando no tienen más divisor común que la unidad, ó cuando no son divisibles sino por sí mismos.

Ejemplo.—Se quiere saber cuál es el máximo común divisor de los números 7.392 y 584 por medio de la descomposición en sus factores primos.

Explicación.—Como el primer número termina en cifra par, se lo divide por 2, para lo cual basta tomar ó sacar la mitad, así:

$$\begin{array}{r|l} 7392 & 2 \\ 3696 & \end{array}$$

El número 2, que está á la derecha de la línea vertical, es el divisor, y el número 3.696 es el cociente.

Como este cociente termina en cifra par, se lo divide por 2, así:

$$\begin{array}{r|l} 3696 & 2 \\ 1848 & \end{array}$$

Como este cociente 1848 termina en cifra par, se lo divide por 2, así:

$$\begin{array}{r|l} 1848 & 2 \\ 924 & \end{array}$$

Como el cociente 924 termina en cifra par, se lo divide por 2, así:

$$\begin{array}{r|l} 924 & 2 \\ 462 & \end{array}$$

Como el cociente 462 termina en cifra par, se lo divide por 2, así:

$$\begin{array}{r|l} 462 & 2 \\ 231 & \end{array}$$

Como la suma 6 de las cifras 2, 3 y 1 del cociente es divisible por 3, se dividen dichas cifras por 3, así:

$$\begin{array}{r|l} 231 & 3 \\ 77 & \end{array}$$

Como el cociente 77 no es divisible por ningún número, se lo divide por sí mismo, así:

$$\begin{array}{r|l} 77 & 77 \\ 1 & \end{array}$$

Para mayor claridad, la operación se dispone así;

$$\begin{array}{r|l} 7392 & 2 \\ 3696 & 2 \\ 1848 & 2 \\ 924 & 2 \\ 462 & 2 \\ 231 & 3 \\ 77 & 77 \\ 1 & \end{array}$$

Todos los números que están á la derecha de la línea vertical, son los *números primos*, porque no son divisibles sino por sí mismos ó por la unidad.

Ahora, el número menor 534 se descompone en sus factores primos, de la misma manera que se acaba de enseñar, así:

$$\begin{array}{r|l} 534 & 2 \\ 267 & 3 \\ 89 & 89 \\ 1 & \end{array}$$

Los factores primos del número mayor y los del número menor, multiplicados entre sí, producen dichos números, así:

$$7392=2\times2\times2\times2\times2\times3\times77$$

Cuando un número está multiplicado dos ó más veces por sí mismo, se escribe una sola vez el número; y á la derecha, y en la parte superior de éste se escribe otro número pequeño, el cual indica las veces que el primero está tomado como factor ó está multiplicado por sí mismo.

Según esto, la igualdad anterior se escribe así:

$$7.392=2^5\times3\times77 \quad \text{(número mayor)}$$
$$534=2\times3\times89 \quad \text{(número menor)}$$

El número 5, que está á la derecha, y en la parte superior del 2, se llama *exponente*. Los demás factores no tienen exponente expreso, pero se supone que tienen por exponente la unidad

Ahora, los factores 2 y 3 son comunes á los números mayor y menor; pero no son comunes los factores 77 y 89. Se toma el factor 2, que tiene por exponente la unidad, y se toma cualquiera de los dos treses, puesto que ambos tienen por exponente la unidad, así:

$$2\times3=6$$

Como el número 6 divide exactamente á los números mayor y menor, se deduce que dicho número 6 es el *máximo común divisor* que se busca.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para buscar el máximo común divisor de dos números dados, se descomponen ambos en sus factores primos; después se toman solamente los factores comunes á ambos números, afectado cada factor del menor exponente; en seguida se hace la multiplicación, y el producto es el máximo común divisor.*

Escolio 1º.—Para descomponer un número cualquiera en sus factores primos, se aplica cada uno de los *caracteres de divisibilidad.*

Escolio 2º—Los caracteres de divisibilidad y el máximo común divisor sirven *para simplificar los quebrados.*

Del mínimo común múltiplice.

Se llama *mínimo común múltiplo* ó *multíplice* de dos ó más números dados el menor número que es divisible á la vez por todos ellos.

Modo de buscar el mínimo común multíplice por medio de la descomposición en los factores primos.

Ejemplo—Se quiere saber cuál es el mínimo común multíplice de 10.848 y 636.

Explicación—Descomponiendo estos números en sus factores primos, según lo enseñado en el máximo común divisor, se tiene:

10848	2	636	2
5424	2	318	2
2712	2	159	3
1356	2	53	53
678	2	1	
339	3		
113	113		
1			

Ahora, los números descompuestos son iguales, respectivamente, al producto de los factores primos, así:

$$10848 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 113$$

Esta igualdad puede escribirse también de este modo:

$$10848 = 2^5 \times 3 \times 113 \quad \text{(número mayor)}$$
$$636 = 2^2 \times 3 \times 53 \quad \text{(número menor)}$$

Los factores 2 y 3 son comunes á los dos números; pero los factores 113 y 53 no son comunes.

Se toma ahora el factor 2, que está elevado á la quinta potencia, porque este factor tiene mayor exponente; después se toma cualquiera de los dos treses, porque ambos tienen por exponente la unidad; por último, se toman los factores 113 y 53, aunque no son comunes, así:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 113 \times 53$$

Haciendo ó efectuando las multiplicaciones, se obtiene por producto 574944. Este es *el mínimo común multíplice*, el cual es divisible por los números 10.848 y 636; de suerte que el mínimo común múltiplice sirve de dividendo, y los números dados sirven de divisores.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

```
574.944 | 10.848
          53 (cociente exacto)

574.944 | 636
          904 (cociente exacto)
```

De aquí se deduce la siguiente

Regla:—*Para buscar el mínimo común múltiplice de dos números dados, se descomponen ambos en sus factores primos; después se toman los factores comunes y no comunes, afectado cada uno del mayor exponente; en seguida se forma el producto, y se obtiene el mínimo común múltiplice.*

Diferencia entre el mínimo común múltiplice y el máximo común divisor.

El mínimo común múltiplice sirve de dividendo, y el otro sirve de divisor, y éste sirve, además, para simplificar los quebrados.

De los números primos.

Se llama *número par* el que puede dividirse en dos partes iguales y enteras.

Ejemplo. 4, 6, 8 son números pares.

Se llama *número impar* el que no puede dividirse en dos partes iguales y enteras.

Ejemplo. 3, 5, 7 son números impares.

Se llama *número primo absoluto* el que no es divisible sino por sí mismo ó por la unidad.

Ejemplo. 7 es número primo absoluto.

Todo número primo es impar, con excepción del número 2.

Dos números primos absolutos son siempre primos relativos ó primos entre sí, porque no son divisibles sino por sí mismos ó por la unidad.

Ejemplo. 31 y 43 son primos absolutos.

Tabla de números primos, desde 1 hasta 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Se llama *multíplice ó múltiplo* el número que es divisible exactamente por otro.

Explicación 1ª—El número 4 es múltiplo de 2; el número 6 es múltiplo de 2; el número 8 es múltiplo de 2 y de 4; el número 10 es múltiplo de 2 y de 5; el número 12 es múltiplo de 2, de 3, de 4 y de 6, y así en adelante.

Hechas las divisiones, los cocientes son exactos, y los dividendos son los múltiplos.

Explicación 2ª—Se borran todos los múltiplos de 2, con excepción del mismo 2, y se cuentan de dos en dos para adelante, desde el número 3; de suerte que, borrando los números 4, 6, 8, 10, 12, 14, etc., quedan los siguientes números:

1 2 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39 41 43 45 47 49 51 53 55 57 59 61 63 65 67 69 71 73 75 77 79 81 83 85 87 89 91 93 95 97 99.

Explicación 3ª—El número 6 es múltiplo de 3, además de serlo de 2; el número 9 es múltiplo de 3; el número 12 es múltiplo de 3, además de serlo de 2, de 4 y de 6, y así sucesivamente

Se borran ahora los múltiplos de 3, con excepción del mismo 3, y se cuentan de tres en tres para adelante, desde el número 4. Por consiguiente, se borra el número 9, que no estaba borrado. El número 12 está ya borrado, porque es múltiplo de 2 y de 3; se borra el número 15, que no está borrado; el número 18 está ya borrado, porque es múltiplo de 2 y de 3, y así sucesivamente; de suerte que, borrando todos los múltiplos de 3, quedan los siguientes números:

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 25 29 31 35 37 41 43 47 49 53 55 59 61 65 67 71 73 77 79 83 85 89 91 95 97.

Explicación 4ª—Se borran ahora todos los múltiplos de 4, que son 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 100; pero estos números están ya borrados, porque todo múltiplo de 4 es también múltiplo de 2, y todos los múltiplos de 2 quedan borrados desde la primera vez. Así, pues, los números que quedan son los mismos de la explicación 3ª

Explicación 5ª—Se borran ahora todos los múltiplos de 5, con excepción del mismo 5, y se cuentan de cinco en cinco para adelante, desde el número 6.

Los múltiplos de 5 son 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95 y 100. Todos estos números están ya borrados, menos los múltiplos 25, 35, 55, 65, 85 y 95, y son los únicos que quedan borrados en esta vez; por tanto, los números que quedan, después de borrar los múltiplos anteriores, son los siguientes:

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 49 53 59 61 67 71 73 77 79 83 89 91 97.

Explicación 6ª—Se borran ahora todos los múltiplos de 6, con excepción del mismo 6, y se cuentan de seis en seis para adelante, desde el número 7.

Los múltiplos de 6 son 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90 y 96; pero estos múltiplos están ya borrados, porque todo múltiplo de 6 es múltiplo de 2 y de 3; de suerte que los números que quedan son los mismos de la explicación 5ª

Explicación 7ª—Se borran ahora todos los múltiplos de 7, con excepción del mismo 7, y se cuentan de siete en siete para adelante, desde el número 8.

Los múltiplos de 7 son 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91 y 98. Todos estos múltiplos están ya borrados, menos los múltiplos 49, 77 y 91, y son los únicos que quedan borrados en esta vez; por tanto, habría que borrar ahora todos los múltiplos de 8.

Los múltiplos de 8 son á la vez múltiplos de 2 y de 4; y los múltiplos de estos números están ya borrados.

Los múltiplos de 9 son múltiplos de 3; y los múltiplos de 3 están ya borrados, y lo mismo se dice de los números que siguen.

La tabla de los números primos es la siguiente:

1 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 91 97

Escolio.—Aunque la serie de los números dados sea desde 1 hasta un millón, se procede de la misma manera, esto es, según las explicaciones que acaban de darse.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para formar una tabla de números primos, se escribe la serie de números desde la cifra 1 hasta el límite dado; después se borran todos los múltiplos de 2, con excepción del mismo 2; en seguida se borran, respectivamente, todos los múltiplos de 3, 4, 5, 6 y 7, con excepción de estos mismos números; y todos los que quedan sin borrar, son los números primos.*

PROBLEMAS

1.° Los números 78, 472, 960, 4.834 y 588, ¿son divisibles por 2?

2.° Los números 78.040 y 7.965, ¿son divisibles por 5?

3.° Los números 98.400 y 7'643.500, ¿son divisibles por 4 y por 25?

4.° Los números 76.584 y 5.924, ¿son divisibles únicamente por 4?

5.° Los números 381, 5.643, 9.774 y 876, ¿son divisibles por 3?

6.° Los números 756, 8.496, 77.886 y 688.995, ¿son divisibles por 9?

7.° Los números 4' 867.000 y 5'321.000, ¿son divisibles por 8 y por 125?

8.° Los números 876.425 y 823'143.926, ¿son divisibles por 11?

9.° Búsquese el máximo común divisor de los números 9.864 y 2.344 por la división y por la descomposición en los factores primos.

10. ¿Cuál es el mínimo común múltiplice de los números 8.674 y 2.642?

LECCION DÉCIMA

De los números quebrados.

Se llama *número quebrado ó fracción* el que expresa partes de una unidad entera, dividida ó supuesta dividida en partes iguales.

Ejemplo. $\frac{6}{8}$

Explicación.—El numerador 6 indica las partes que se han tomado de la unidad dividida ó supuesta dividida en partes iguales; y el denominador 8 indica el número total de partes. El numerador y el denominador se llaman *términos del quebrado.*

Cuando un quebrado tiene por numerador la unidad, y por denominador los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 1.000, 10.000, etc., se leen del siguiente modo:

$\frac{1}{2}$= un medio ó un segundo
$\frac{1}{3}$=un tercio ó tercera parte
$\frac{1}{4}$=un cuarto ó cuarta „
$\frac{1}{5}$=un quinto ó quinta „
$\frac{1}{6}$= un sexto ó sexta „
$\frac{1}{7}$= un sétimo ó sétima „
$\frac{1}{8}$= un octavo ú octava „
$\frac{1}{9}$= un noveno ó novena „
$\frac{1}{10}$= un décimo ó décima parte
$\frac{1}{100}$=un centésimo ó centésima parte
$\frac{1}{1000}$= un milésimo ó milésima parte
$\frac{1}{10000}$= un diezmilésimo ó diezmilésima parte,
y así sucesivamente.

Propiedades de los quebrados.

Las operaciones que se ejecutan con los quebrados, son las mismas que se ejecutan con los números enteros; y de la significación del numerador y del denominador se deducen las siguientes seis propiedades:

Primera propiedad.—*Si se multiplica el numerador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado se hace tantas veces mayor cuantas unidades tiene el numero por el cual se multiplica el numerador.*

Ejemplo. $\frac{3}{4}$ Multiplicando el numerador por 5, se tiene:

$$\frac{3\times 5}{4} \quad \frac{15}{4}$$

Explicación.—El quebrado $\frac{15}{4}$ es mayor que $\frac{3}{4}$, porque expresa *cinco cuartos* más que $\frac{3}{4}$, y por tanto, se ha hecho cinco veces mayor.

Escolio 1º—Cuando un quebrado tiene por numerador la unidad, y por denominador un número compuesto, que no sea la unidad seguida de uno ó más ceros, se lee pronunciando, á lo último, la palabra *avo.*

Ejemplo. $\frac{1}{12}$, y se lee: un *doceavo.*

Escolio 2º—Cuando un quebrado tiene por numerador un número dígito ó compuesto, y por denominador un número compuesto, se lee pronunciando, á lo último, la palabra *avos.*

Ejemplos 1.º $\frac{4}{16}$, y se lee: *cuatro diez y seis avos.*
2.º $\frac{18}{22}$, y se lee: *diez y ocho veintidós avos,* ó 18 sobre 22.

SEGUNDA PROPIEDAD.—*Si se multiplica el denominador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado se hace tantas veces menor cuantas unidades tiene el número por el cual se multiplica el denominador.*

Ejemplo. $\frac{2}{3}$ Multiplicando el denominador por 3, se tiene:

$$\frac{2}{3\times3} \quad \frac{2}{9}$$

Explicación.—El quebrado $\frac{2}{9}$ es menor que $\frac{2}{3}$, porque expresa dos novenas partes, y el otro expresa dos terceras partes. Las dos novenas partes son menores que las dos terceras partes; luego el quebrado $\frac{2}{3}$ se ha hecho tres veces menor.

TERCERA PROPIEDAD.—*Si se divide el numerador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado se hace tantas veces menor cuantas unidades tiene el número por el cual se divide el numerador.*

Ejemplo. $\frac{4}{3}$ Dividiendo el numerador por 2, se tiene:

$$\frac{4:2}{3} \quad \frac{2}{3}$$

Explicación.—El quebrado $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{4}{3}$, porque expresa *dos tercios menos* que $\frac{4}{3}$, y por tanto, se ha hecho dos veces menor.

CUARTA PROPIEDAD.—*Si se divide el denominador de un quebrado por un número cualquiera, el quebrado se hace tantas veces mayor cuantas unidades tiene el número por el cual se divide el denominador.*

Ejemplo. $\frac{3}{8}$ Dividiendo el denominador por 2, se tiene:

$$\frac{3}{8:2} \quad \frac{3}{4}$$

Explicación.—El quebrado $\frac{3}{4}$ es mayor que $\frac{3}{8}$, porque expresa tres cuartas partes, y el otro expresa tres octavas partes. Las tres cuartas partes son mayores que las tres octavas partes; luego el quebrado $\frac{3}{8}$ se ha hecho dos veces mayor.

QUINTA PROPIEDAD.—*Si tanto el numerador como el denominador se multiplican por un mismo número, el quebrado no altera de valor; porque las alteraciones que sufre el numerador se compensan con las que sufre el denominador.*

Ejemplo. $\frac{3}{8}$ Multiplicando los dos términos por 4, se tiene:

$$\frac{3\times4}{8\times4}=\frac{12}{32}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

Explicación.—Al multiplicar el numerador por 4, el quebrado se hace cuatro veces mayor, según la primera propiedad; y al multiplicar el denominador por 4, el quebrado se hace cuatro veces menor, según la segunda propiedad; por consiguiente, el aumento que sufre el numerador se compensa con la disminución que sufre el denominador; luego el valor del quebrado no altera.

SEXTA PROPIEDAD.—*Si tanto el numerador como el denominador se dividen por un mismo número, el quebrado no altera de valor.*

Ejemplo. $\frac{24}{18}$. Dividiendo los dos términos por 6, se tiene:

$$\frac{24:6}{18:6}=\frac{4}{3}$$

Explicación.—Al dividir el numerador por 6, el quebrado se hace seis veces menor, según la tercera propiedad; y al dividir el denominador por 6, el quebrado se hace seis veces mayor, según la cuarta propiedad; por consiguiente, la disminución que sufre el numerador se compensa con el aumento que sufre el denominador; luego el valor del quebrado no altera.

Simplificación de quebrados.

Para ejecutar las operaciones que se ofrecen con los quebrados, conviene reducir sus términos, esto es, disminuirlos, sin que los quebrados cambien de valor, con el fin de facilitar la ejecución de las operaciones.

Simplificar un quebrado es reducir los términos á su más simple expresión, sin que el quebrado cambie de valor.

Ejemplo.—Se quiere simplificar el quebrado $\frac{488}{96}$

Explicación.—Como ambos términos acaban en cifra par, se dividen por 2; para lo cual, basta sacar ó tomar la mitad, comenzando por la izquierda, así:

$$\frac{488}{96}=\frac{244}{48}$$

Como los términos de este último quebrado acaban en cifra par, se dividen por 2, y basta tomar la mitad, así;

$$\frac{244}{48}=\frac{122}{24}$$

Como los términos de este último quebrado acaban en cifra par, se dividen por 2, y basta tomar la mitad, así:

$$\frac{122}{24}=\frac{61}{12}.$$

Como los términos de este último quebrado no son divisibles por ningún número, se divide entonces el numerador por el denominador, para ver cuánto da por cociente, así:

$$\frac{61}{12}=5+\frac{1}{12}\text{ avo}$$

Dividiendo ahora el numerador del quebrado primitivo por el denominador, se tiene:

$$\frac{488}{96}=5\text{ con}\frac{8}{96}\text{avos}$$

Dividiendo por 8 los términos de este último quebrado, se tiene:

$$\frac{8}{96}=\frac{1}{12}$$

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\frac{488}{96}=5+\frac{1}{12}$$

Como se ve, el cociente es igual, puesto que al dividir los dos términos por un mismo número, el quebrado no altera de valor; según la sexta propiedad.

Escolio.—Para simplificar un quebrado, se aplica, según convenga, cada uno de los caracteres de divisibilidad, ó la teoría del máximo común divisor.

El quebrado anterior $\frac{61}{12}$, á que queda reducido el quebrado $\frac{488}{96}$, por el hecho de no ser ya simplificable, se llama *irreductible.*

Quebrado irreductible es el que no admite simplificación.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para simplificar un quebrado, esto es, para reducirlo á su más simple expresión, se dividen sus dos términos por un mismo número, para lo cual se aplican los caracteres de divisibilidad ó el máximo común divisor.*

Teorema.—Todo número entero puede tomar la forma de quebrado.

Ejemplo.—Se quiere reducir el número 8 á cuartos. La operación se dispone así:

$$\frac{8\times4}{4}=\frac{32}{4}$$

Demostración.—Al multiplicar el número 8 por 4, se hace cuatro veces mayor, según la primera propiedad; y al dividirlo por el mismo 4, se hace cuatro veces menor, según la cuarta propiedad; luego el número 8 no altera de valor.

Escolio.—Si el número dado es mixto, se reduce el entero á un quebrado que tenga por denominador el del quebrado propuesto, y luego se reunen los dos en uno solo.

Ejemplo. $6\frac{3}{8}$

Explicación.—Se multiplica y se divide, á la vez, el entero 6 por el denominador 8, según las propiedades primera y cuarta, y se obtiene $\frac{48}{8}$. A este quebrado se agregan los $\frac{3}{8}$, que son $\frac{51}{8}$.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\frac{6\times8}{8}=\frac{48}{8} \quad \text{De donde:} \frac{48}{8}+\frac{3}{8}=\frac{51}{8}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir un número mixto á la especie de quebrado, se multiplica el entero por el denominador; al producto se agrega el numerador, y á la suma se pone por denominador el del quebrado.*

Modo de sacar los enteros de un quebrado impropio.

REGLA.—*Para sacar los enteros de un quebrado impropio, se divide el numerador por el denominador.*

Ejemplos. 1°. $\frac{12}{4}=3$ enteros; 2.° $\frac{8}{8}=1$ entero

Reducción de quebrados á un común denominador.

Para sumar dos ó más quebrados, es necesario que tengan un mismo denominador, esto es, que sean de una misma especie, según las verdades axiomáticas 1ª y 2ª de la lección quinta.

Ejemplo. $\frac{8}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{6}$

Explicación.—Como los quebrados son de distinta especie, es preciso convertirlos en otros que sean de una misma especie. Se multiplica el numerador 8 por 5 y por 6, menos por 4, y da 240; después se multiplica el numerador 3 por 4 y por 6, menos por 5, y da 72; en seguida se multiplica el numerador 2 por 4 y por 5, menos por 6, y da 40. A estos resultados se pone por denominador común el producto de los denominadores, y los quebrados propuestos no alteran de valor, según la quinta propiedad.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\frac{8}{4}+\frac{3}{5}+\frac{2}{6}=\frac{8\times5\times6}{4\times5\times6}+\frac{3\times4\times6}{4\times5\times6}+\frac{2\times4\times5}{4\times5\times6}$$

Haciendo las multiplicaciones indicadas, se tiene:

$$\frac{240}{120}+\frac{72}{120}+\frac{40}{120}$$

Los tres últimos quebrados se reunen en uno solo, sumando los numeradores, así:

$$\frac{240}{120}+\frac{72}{120}+\frac{40}{120}=\frac{352}{120}$$

Para sacar los enteros de este último quebrado, puesto que es impropio, se divide el numerador por el denominador, así:

$\frac{352}{120}=2$ enteros con $\frac{14}{15}$ avos

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir varios quebrados á un común denominador, se multiplica el numerador del primero por el producto de los demás denominadores, menos por el de él, y se obtiene el primer numerador; después se multiplica el numerador del segundo quebrado por el producto de los demás denominadores, menos por el de él, y se obtiene el segundo numerador, y así sucesivamente; por último, se pone como denominador común de los numeradores el producto de los denominadores.*

Escolio.—Si los quebrados propuestos son dos, basta multiplicarlos en cruz.

Ejemplo. $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{2\times 6}{3\times 6}+\frac{3\times 5}{3\times 6}=\frac{12}{18}+\frac{15}{18}=\frac{27}{18}$

Comparación de quebrados.

Cuando se comparan dos números enteros, es muy fácil saber cuál es el mayor, porque basta ver cuál tiene más veces repetida la unidad; pero cuando se comparan dos números quebrados, es preciso atender á la magnitud de las partes de que está formado cada uno.

Para mayor claridad, se distinguen tres casos:

Primer caso.—*Comparar dos quebrados de un mismo denominador y de distinto numerador.*

Ejemplo. $\frac{2}{4}$ y $\frac{6}{4}$

Explicación.—En el segundo quebrado hay cuatro cuartos más que en el primero; luego el segundo es mayor.

Luego, de dos quebrados que tienen un mismo denominador y distinto numerador, es mayor el que tiene mayor numerador.

Segundo caso.—*Comparar dos quebrados de un mismo numerador y de distinto denominador.*

Ejemplo. $\frac{6}{3}$ y $\frac{6}{4}$

Explicación.—Como no son de una misma especie, se reducen á un común denominador, y basta multiplicarlos en cruz, así:

$\frac{6}{3}$ y $\frac{6}{4}=\frac{24}{12}$ y $\frac{18}{12}$, tienen ya un mismo denominador.

Como este caso queda reducido al primero; y como el quebrado $\frac{24}{12}$ es igual á $\frac{6}{3}$, y $\frac{18}{12}$ á $\frac{6}{4}$, según la quinta propiedad, se ve que $\frac{24}{12}$ es mayor.

Luego, de dos quebrados que tienen un mismo numerador y distinto denominador, es mayor el que tiene menor denominador.

TERCER CASO.—*Comparar dos quebrados de distinto numerador y de distinto denominador.*

Ejemplo. $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$

Explicación.—Se multiplican en cruz, para reducirlos á un común denominador, así:

$$\tfrac{3}{4} \text{ y } \tfrac{2}{5} = \tfrac{15}{20} \text{ y } \tfrac{8}{20}$$

Como este caso queda reducido también al primero; y como el quebrado $\frac{15}{20}$ es igual á $\frac{3}{4}$, según la quinta propiedad, se ve que $\frac{15}{20}$ és mayor.

Luego, de dos quebrados que tienen distinto numerador y distinto denominador, se reducen á un común denominador, y es mayor el que tiene mayor numerador.

Escolio—Por medio del mínimo común múltiplice se reducen también los quebrados á un común denominador.

Todo múltiplo de los denominadores de varios quebrados puede servir de denominador común.

Ejemplo. $\frac{3}{12}+\frac{5}{20}+\frac{4}{16}$

Explicación.—Reduciendo estos quebrados á un común denominador por el método ordinario, se tiene:

$$\frac{3}{12}+\frac{5}{20}+\frac{4}{16}=\frac{3\times20\times16}{12\times20\times16}+\frac{5\times12\times16}{12\times20\times16}+\frac{4\times12\times20}{12\times20\times16}$$

Haciendo las multiplicaciones indicadas, se tiene:

$$\tfrac{960}{3840}+\tfrac{960}{3840}+\tfrac{960}{3840}=\tfrac{2880}{3840}=\tfrac{3}{4} \text{ (resultado)}$$

Aplicación del mínimo común multíplice.

Descomponiendo los denominadores en sus factores primos, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

De donde:

$$12=2^2\times 3$$
$$20=2^2\times 5$$
$$16=2^4$$

Tomando ahora los factores comunes y no comunes, y tomando los comues con el mayor exponente, se tiene:

$$2^4\times 3\times 5=16\times 3\times 5=240 \text{ (mínimo común múltiplice)}$$

Se divide ahora el número 240 por cada uno de los números descompuestos, que son los denominadores, así:

$\frac{240}{12}=20$ (cociente 1º); $\frac{240}{20}=12$ (cociente 2º); $\frac{240}{16}=15$ (cociente 3º).

Se multiplica el primer cociente por el primer numerador, y da 60; después se multiplica el segundo cociente por el segundo numerador, y da 60; en seguida se multiplica el tercer cociente por el tercer numerador, y da 60; y á los productos se les pone por denominador el mínimo común múltiplice 240.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\frac{3\times 20}{240}+\frac{5\times 12}{240}+\frac{4\times 15}{240}=\frac{60+60+60}{240}=\frac{180}{240}=\frac{3}{4}$$

Como se ve, por cualquiera de los dos procedimientos se obtiene el mismo resultado.

Los quebrados primitivos no han cambiado de valor, porque se han multiplicado los términos de cada uno por un mismo número, según la quinta propiedad.

Los términos del primer quebrado se multiplican por el primer cociente 20, así:

$$\frac{3\times 20}{12\times 20}=\frac{60}{240}$$

Los términos del segundo quebrado se multiplican por el segundo cociente 12, así:

$$\frac{5\times 12}{20\times 12}=\frac{60}{240}$$

Los términos del tercer quebrado se multiplican por el tercer cociente 15, así:

$$\frac{4\times 15}{16\times 15}=\frac{60}{240}$$

Escolio.—Cuando uno de los denominadores de varios quebrados es múltiplo de todos los demás, dicho múltiplo es el denominador común.

Ejemplo. $\frac{5}{60}+\frac{3}{15}+\frac{2}{30}$

Como el denominador 60 es divisible exactamente por 15 y por 30, resulta que 60 es múltiplo, y es, por lo mismo, el denominador común.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir dos ó más quebrados á un común denominador por medio del mínimo común múltiplice, se descomponen los denominadores en sus factores primos. Una vez encontrado el mínimo común multíplice, se divide éste por cada uno de los denominadores, y se obtienen ciertos cocientes; después se multiplica el primer numerador por el primer cociente; luego el segundo numerador por el segundo cociente, y así en seguida; por último, se pone á estos productos por denominador común el mínimo común multíplice.*

Suma de quebrados.

La definición de suma, dada en la lección quinta, como también las verdades axiomáticas, se extienden á toda clase de números, ya sean enteros ó quebrados.

Casos que ocurren en la suma de quebrados.

Estos casos son tres:

1.° *Sumar dos ó más quebrados.*
2.° *Sumar un entero con un quebrado, ó viceversa.*
3.° *Sumar números mixtos.*

Primer caso.—Se quiere sumar $\frac{3}{4}$ con $\frac{6}{7}$ y con $\frac{2}{5}$

La operación se dispone así:

$$\frac{3}{4}+\frac{6}{7}+\frac{2}{5}$$

Explicación.—Como son de distinta especie, se reducen á un común denominador, así:

$$\frac{3\times7\times5}{4\times7\times5}+\frac{6\times4\times5}{4\times7\times5}+\frac{2\times4\times7}{4\times7\times5}=\frac{105}{140}+\frac{120}{140}+\frac{56}{140}$$

Como los tres últimos quebrados tienen ya un mismo denominador, se reunen en uno solo, según las verdades axiomáticas 1ª y 2ª de la lección quinta, así:

$$\frac{105+120+56}{140}=\frac{281}{140}=2+\frac{1}{140}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para sumar dos ó más quebrados, se reducen á un común denominador, si no lo tienen; luego se suman los numeradores, y á la suma se pone por denominador el denominador común. Si el quebrado es impropio, se sacan los enteros, dividiendo el numerador por el denominador.*

SEGUNDO CASO.—Se quiere sumar el entero 8 con $\frac{4}{5}$
La operación se dispone así: $8+\frac{4}{5}$

Explicación.—Se reduce el entero 8 á quintos; para lo cual, se multiplica y se divide el número 8 por el denominador 5, así:

$$\frac{8\times5}{5}+\frac{4}{5}=\frac{40}{5}+\frac{4}{5}$$

Se reunen en uno solo los dos últimos quebrados, según la 1ª verdad exiomática de la lección quinta, así:

$$\frac{40}{5}+\frac{4}{5}=\frac{44}{5}=8+\frac{4}{5}$$

Ejemplo 2.° Se quiere sumar $\frac{3}{4}$ con 6 enteros.
La operación se dispone así:

$$\frac{3}{4}+6$$

Explicación.—Se reduce el entero 6 á cuartos; para lo cual, se multiplica y se divide el número 6 por el denominador 4, asi:

$$\frac{3}{4}+\frac{6\times4}{4}=\frac{3}{4}+\frac{24}{4}$$

Según la misma verdad axiomática, se reunen en uno solo los dos últimos quebrados, así:

$$\frac{3}{4}+\frac{24}{4}=\frac{27}{4}=6+\frac{3}{4}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para sumar un entero con un quebrado ó viceversa, se multiplica el entero por el denominador del quebrado; al producto se agrega el numerador, y á la suma se pone por denominador el del quebrado. Si éste es impropio, se sacan los enteros, dividiendo el numerador por el denominador.*

TERCER CASO.—Se quiere sumar $12\frac{7}{8}$ con $6\frac{3}{5}$
La operación se dispone así:

$$12\frac{7}{8}+6\frac{3}{5}$$

Explicación.—Para hacer esta suma, hay dos procedimientos:

1.° *Se reducen los mixtos á quebrados, y luego se suman los que resulten, y se sacan los enteros si el quebrado es impropio.*

La suma se ejecuta así:

$$12\tfrac{7}{8}+6\tfrac{3}{5}=\tfrac{103}{8}+\tfrac{33}{5}$$

Para poder sumarlos, se reducen á un común denominador los dos últimos quebrados, y basta multiplicarlos en cruz, así:

$$\tfrac{103}{8}+\tfrac{33}{5}=\tfrac{515}{40}+\tfrac{264}{40}=\tfrac{779}{40}=19+\tfrac{19}{40}$$

2.° *Se suman los quebrados con los quebrados; después se suman los enteros con los enteros; y los enteros que resulten de los quebrados, si éstos son impropios, se agregan á la suma de los enteros.*

La operación se dispone así:

$$\tfrac{7}{8}+\tfrac{3}{5}=\tfrac{35}{40}+\tfrac{24}{40}=\tfrac{59}{40}=1+\tfrac{19}{40}$$

Agregando el entero 1 á la suma de los enteros, se tiene:

$$12+6+1=19+\tfrac{19}{40}$$

Escolio.—El tercer caso se resuelve también escribiendo los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan los quebrados con los quebrados, y los enteros con los enteros.

Ejemplo 1.°

$$\begin{array}{rl} 42 & \tfrac{3}{8} \\ 25 & \tfrac{2}{6} \\ 68 & \tfrac{1}{9} \\ \hline 135 & \tfrac{59}{72} \end{array}$$

Reduciendo los tres quebrados á un común denominador, para poder sumarlos, se tiene:

$$\frac{162+144+48}{432}=\frac{354}{432}$$

Dividiendo por 2 los términos de este último quebrado, para simplificarlo, se tiene: $\tfrac{177}{216}$

Dividiendo los términos de este quebrado por 3, para simplificarlo, se tiene: $\tfrac{59}{72}$

Ejemplo 2.°

$$\begin{array}{rl} 36 & \tfrac{2}{4} \\ 59 & \tfrac{8}{4} \\ 65 & \tfrac{5}{4} \\ \hline 163 & \tfrac{3}{4} \end{array}$$

Como los quebrados tienen un mismo denominador, basta sumar los numeradores y poner á la suma por donominador el denominador común, y da $\frac{15}{4}$, el que produce 3 enteros. Agregando éstos á la columna de los enteros, se obtiene 163.

Resta de quebrados.

La definición de resta, dada en la lección sexta, como también las verdades axiomáticas, se extienden á toda clase de números, sean enteros ó quebrados.

Los casos que ocurren en la resta son cuatro:

1.° *Restar un quebrado de otro quebrado.*
2.° *Restar un quebrado de un entero.*
3.° *Restar un entero de un quebrado.*
4.° *Restar números mixtos.*

Primer caso.—Se quiere restar el quebrado $\frac{5}{4}$ de $\frac{12}{4}$

La operación se dispone así:

$$\frac{12}{4}-\frac{5}{4}$$

Explicación.—Para hacer esta resta, no hay más que quitar los cinco cuartos de los doce cuartos, según la 1ª verdad axiomática de la lección sexta, así:

$$\frac{12}{4}-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}$$

Ejemplo 2.° Se quiere restar ahora $\frac{3}{8}$ de $\frac{6}{5}$

La operación se dispone así:

$$\frac{6}{5}-\frac{3}{8}$$

Explicación.—Como estos quebrados no tienen un denominador común, se los reduce á él, multiplicándolos en cruz, así:

$$\frac{6}{5}-\frac{3}{8}=\frac{48}{40}-\frac{15}{40}=\frac{48-15}{40}=\frac{33}{40}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para restar un quebrado de otro quebrado, se reducen á un común denominador, si no lo tienen; luego se restan los numeradores, y á la diferencia se pone por denominador el denominador común. Si el quebrado es impropio, se sacan los enteros.*

Segundo caso.—Se quiere restar el quebrado $\frac{8}{4}$ del entero 16.

La operación se dispone así:

$$16-\frac{8}{4}$$

Explicación.—Se reduce el entero á la misma denominación del quebrado, es decir, á cuartos; para lo cual, se multiplica y se divide el entero 16 por el denominador 4, así:

$$\frac{16\times4}{4}-\frac{8}{4}=\frac{64}{4}-\frac{8}{4}=\frac{56}{4}=14$$

Este procedimiento equivale á multiplicar el entero 16 por el denominador 4; restar del producto el numerador 8, y poner á la diferencia por denominador el del quebrado, así:

$$16-\frac{8}{4}=\frac{64-8}{4}=\frac{56}{4}=14$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para restar un quebrado de un entero, se multiplica el entero por el denominador del quebrado; del producto se resta el numerador, y á la diferencia se pone por denominador el del quebrado. Si éste es impropio, se sacan los enteros.*

Tercer caso.—Se quiere restar del quebrado $\frac{16}{4}$ el entero 3.
La operación se dispone así:

$$\frac{16}{4}-3$$

Explicación.—Se reduce el entero 3 á la misma denominación del quebrado, es decir, á cuartos; para lo cual, se multiplica y se divide el entero 3 por el denominador 4, así:

$$\frac{16}{4}-\frac{3\times4}{4}=\frac{16}{4}-\frac{12}{4}=\frac{16-12}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Como se ve, este tercer caso, lo mismo que el segundo, quedan reducidos al primero; y este procedimiento equivale á multiplicar el entero 3 por el denominador 4, restar el producto del numerador 16, y poner á la diferencia por denominador el del quebrado, así:

$$\frac{16}{4}-3=\frac{16-12}{4}=\frac{4}{4}=1$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para restar un entero de un quebrado, se multiplica el entero por el denominador; el producto se resta del nume-*

rador, y á la diferencia se pone por denominador el del quebrado. Si éste es impropio, se sacan los enteros.

Cuarto caso.—Se quiere restar del número mixto $8\frac{2}{3}$ el número mixto $5\frac{1}{4}$

La operación se dispone así:

$$8\tfrac{2}{3}-5\tfrac{1}{4}$$

Explicación.—Se reducen ambos números mixtos á quebrados, y este caso queda reducido al primero, así:

$$\tfrac{26}{3}-\tfrac{21}{4}$$

Reduciendo estos quebrados á un común denominador, para lo cual basta multiplicarlos en cruz, se tiene:

$$\frac{104}{12}-\frac{63}{12}=\frac{104-63}{12}=\frac{41}{12}=3+\frac{5}{12}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para restar un número mixto de otro mixto, se reducen ambos á quebrados, y luego se aplica la regla del primer caso.*

Escolio 1.º—Cuando en cualquiera de los cuatro casos resulte que una resta es imposible, no se hace otra cosa que indicarla.

Ejemplo. $\frac{12}{4}-\frac{20}{4}=\frac{12-20}{4}$

Escolio 2.º—Cuando se resta un quebrado de un entero ó viceversa, se pone también al entero la unidad por denominador; y el segundo ó tercer caso queda reducido al primero, y luego se aplica la regla de este caso.

Ejemplos. 1º $6-\frac{3}{4}=\frac{6}{1}-\frac{3}{4}=\frac{24-3}{4}=\frac{21}{4}=5+\frac{1}{4}$

2º $\frac{8}{5}-4=\frac{8-20}{5}$

Escolio 3.º—Cuando el minuendo es un número mixto, y el sustraendo es un entero ó viceversa, se reduce el mixto á quebrado, y la cuestión se reduce al segundo ó tercer caso, y se aplica respectivamente una ú otra regla.

Ejemplos. 1.º $21\frac{2}{3}-12=\frac{65}{3}-12=\frac{65-36}{3}=\frac{29}{3}=9+\frac{2}{3}$

2.º $36-4\frac{3}{8}=36-\frac{35}{8}=\frac{288-35}{8}=\frac{253}{8}=31+\frac{5}{8}$

Escolio 4.º—Cuando se resta un quebrado propio de un entero, se quita una unidad al entero; se la agrega al numerador, y la cuestión queda reducida á restar un quebrado de un número mixto.

Ejemplo. $8-\frac{3}{4}=7\ \frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{32}{4}-\frac{3}{4}=\frac{29}{4}=7+\frac{1}{4}$

Multiplicación de quebrados.

La definición de multiplicación, dada en la lección séptima, se extiende á toda clase de números, sean enteros ó quebrados.

Los casos que ocurren en la multiplicación de quebrados son tres.

1.º *Multiplicar un quebrado por un entero ó viceversa.*
2.º *Multiplicar un quebrado por otro quebrado.*
3.º *Multiplicar números mixtos.*

Primer caso.—*Ejemplo* 1.º Se quiere multiplicar el quebrado $\frac{2}{5}$ por 4 enteros.

La operación se dispone así:

$$\tfrac{2}{5}\times 4$$

Explicación.—Multiplicar á $\frac{2}{5}$ por 4, es hacer el quebrado $\frac{2}{5}$ cuatro veces mayor; para lo cual, basta multiplicar el numerador 2 por el entero 4, según la primera propiedad, así:

$$\tfrac{2}{5}\times 4=\tfrac{8}{5}$$

Ejemplo 2.º $8\times\frac{3}{4}$

Explicación.—Multiplicar el entero 8 por $\frac{3}{4}$, es tomar de 8 las $\frac{3}{4}$ partes; para lo cual, se toma primero una $\frac{1}{4}$ parte, y son $\frac{8}{4}$ partes.

Ahora, si la $\frac{1}{4}$ parte de 8 son $\frac{8}{4}$, es claro que las $\frac{3}{4}$ de 8 serán

$$\frac{8\times 3}{4}=\frac{24}{4}=6$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un quebrado por un entero ó viceversa, se multiplica el entero por el numerador, y al producto* *se pone por denominador el del quebrado. Si éste es impropio, se sacan los enteros.*

Segundo caso.—Se quiere multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{2}{4}$

La operación se dispone así:

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$$

Explicación.—Multiplicar á $\frac{3}{5}$ por $\frac{2}{4}$, equivale á tomar las $\frac{2}{4}$ partes de $\frac{3}{5}$; para lo cual, se toma primero una $\frac{1}{4}$ parte.

En efecto, la $\frac{1}{4}$ parte de $\frac{3}{5}$ son

$$\frac{3}{5\times4},$$

y si la $\frac{1}{4}$ parte de $\frac{3}{5}$ son

$$\frac{3}{5\times4},$$

es claro que las $\frac{2}{4}$ partes serán

$$\frac{3\times2}{5\times4}.$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un quebrado por otro, se multiplican los numeradores entre sí, y se tiene el numerador del producto; después se multiplican los denominadores entre sí, y se tiene el denominador del producto. Si el quebrado que resulta es impropio, se sacan los enteros.*

Tercer caso.—Se quiere multiplicar 12 $\frac{2}{3}$ por 5 $\frac{1}{6}$

La operación se dispone así:

$$12\,\tfrac{2}{3}\times5\,\tfrac{1}{6}$$

Explicación.— Reduciendo ambos mixtos á quebrados, se tiene:

$$\frac{38}{3}\times\frac{31}{6}$$

Como la cuestión queda reducida al segundo caso, se aplica directamente la regla anterior, así:

$$\frac{1.178}{18}=65+\frac{8}{18}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un número mixto por otro mixto,* *se reducen ambos á quebrados, y se multiplican éstos entre sí, según la regla del segundo caso.*

Escolio.—Cuando se multiplica un entero por un mixto ó viceversa, se reduce el mixto á quebrado, y la cuestión queda reducida á multiplicar un entero por un quebrado ó viceversa.

Ejemplos. 1.º $8\times4\frac{2}{3}=8\times\frac{14}{3}=\frac{112}{3}=37+\frac{1}{3}$

2.º $6\frac{2}{4}\times5=\frac{26}{4}\times5=\frac{130}{4}=32+\frac{2}{4}$

Se llama *fracción de fracción* una expresión que representa una ó varias partes iguales de un quebrado cualquiera.

Ejemplo. $\frac{3}{8}\times\frac{5}{4}\times\frac{2}{7}\times\frac{9}{10}=\frac{270}{2240}$

Explicación—Así como para multiplicar varios factores entre sí, se multiplica el primer factor por el segundo, después el producto que resulte por el tercer factor, etc., así también para multiplicar varios quebrados entre sí, se multiplica el primer numerador por el segundo, después el producto que resulte por el tercer numerador, y así sucesivamente. Con los denominadores se procede de igual manera.

División de quebrados.

Las definiciones de división, dadas en la lección octava, se extienden á toda clase de números.

Los casos que ocurren en la división de quebrados son cuatro:

1.º *Dividir un quebrado por un entero,*
2.º *Dividir un entero por un quebrado.*
3.º *Dividir un quebrado por otro quebrado.*
4.º *Dividir un número mixto por otro mixto.*

Primer caso.—Se quiere dividir el quebrado $\frac{12}{4}$ por 3

La operación se dispone así:

$$\frac{12}{4} : 3$$

Explicación.—Dividir á $\frac{12}{4}$ por 3, es hacerlo tres veces menor; para lo cual, basta multiplicar el denominador 4 por el entero 3, según la segunda propiedad, ó dividir también el numerador 12 por el entero 3, de acuerdo con la tercera propiedad, así:

$$\frac{12}{4\times3}=\frac{12}{12}=1 \qquad \text{ó también } \frac{12:3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el entero por el denominador, y al producto se pone por numerador el del quebrado. Si es impropio, se sacan los enteros.*

SEGUNDO CASO.—Se quiere dividir el entero 16 por $\frac{2}{3}$
La operación se dispone así:

$$16 : \tfrac{2}{3}$$

Explicación.—El cociente, multiplicado por el divisor $\frac{2}{3}$, debe producir el dividendo 16. Los $\frac{2}{3}$ del cociente deben ser iguales á 16, y una tercera parte del cociente debe ser igual á una tercera parte de 16, es decir, á $\frac{16}{2}$
Si una tercera parte del cociente es $\frac{16}{2}$, es claro que todo el cociente será tres veces mayor, esto es,

$$\frac{16\times 3}{2}=\frac{48}{2}=24$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador, y al producto se pone por denominador el numerador del quebrado. Si es impropio, se sacan los enteros.*

TERCER CASO.—Se quiere dividir el quebrado $\frac{12}{3}$ por $\frac{2}{5}$
La operación se dispone así:

$$\tfrac{12}{3} : \tfrac{2}{5}$$

Explicación.—El cociente, multiplicado por el divisor $\frac{2}{5}$, debe producir el dividendo $\frac{12}{3}$. Las $\frac{2}{5}$ partes del cociente deben ser iguales á $\frac{12}{3}$, y una quinta parte del cociente es igual á la mitad de $\frac{12}{3}$, esto es; á

$$\frac{12}{3\times 2}$$

Si una quinta parte del cociente es igual á

$$\frac{12}{3\times 2},$$

es claro que todo el cociente será cinco veces mayor, esto es;

$$\frac{12\times 5}{3\times 2}=\frac{60}{6}=10$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir un quebrado por otro, se divide el quebrado dividendo por el quebrado divisor invertido, esto es, se multiplica el numerador del quebrado dividendo por el denominador del quebrado divisor, y se tiene el numerador del cociente; después se multiplica el denominador del quebrado dividendo por el numerador del quebrado divisor, y se tiene el denominador del cociente. Si el quebrado es impropio, se sacan los enteros.*

CUARTO CASO.—Se quiere dividir $14\frac{3}{6}$ por $8\frac{2}{4}$

La operación se dispone así:

$$14\tfrac{3}{6} : 8\tfrac{2}{4}$$

Explicación.—Se reducen ambos mixtos á quebrados, y se tiene:

$$\frac{87}{6} : \frac{34}{4} = \frac{348}{204} = 1 + \frac{144}{204} \text{ ó } \frac{12}{17}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir un número mixto por otro mixto, se reducen ambos á quebrados, y se dividen éstos entre sí, según la regla del tercer caso.*

Escolio 1.º—Cuando ocurra el caso de dividir un entero por un mixto ó viceversa, se reduce el mixto á quebrado, y luego se aplican, respectivamente, las reglas del primero ó del segundo caso.

Ejemplo 1.º $18 : 4\frac{3}{2} = 18 : \frac{11}{2} = \frac{36}{11} = 3 + \frac{3}{11}$

Ejemplo 2.º $12\frac{3}{6} : 8 = \frac{75}{6} : 8 = \frac{75}{48} = \frac{25}{16} = 1 + \frac{9}{16}$

Escolio 2.º—Cuando se divide la unidad por un quebrado, sucede que, aplicando la regla del segundo caso, resultan cambiados los términos del quebrado.

Ejemplo. $1 : \frac{6}{12} = \frac{12}{6} = 2$

Escolio 3.º Para dividir dos quebrados que tienen un mismo denominador, basta dividir los numeradores entre sí, porque, al multiplicar en cruz dichos quebrados, según la regla del tercer caso, se obtiene siempre un mismo resultado.

Ejemplo. $\frac{20}{3} : \frac{5}{3} = \frac{20}{5} = 4$

Aplicando la regla del tercer caso, se tiene:

$$\frac{20}{3} : \frac{5}{3} = \frac{60}{15} = 4$$

Valuación de quebrados.

La valuación de quebrados se define de dos maneras:

1ª Se llama *valuar un quebrado* determinar su valor en unidades inferiores de una denominación concreta.

2ª Se llama *valuar un quebrado* averiguar las unidades sucesivas de especies diferentes, cuando se sabe la especie de unidad de que ha sido formado dicho quebrado.

Ejemplo 1.° Se quiere valuar el quebrado $\frac{29}{3}$ de quintal en arrobas, libras, etc.

Explicación.—Como el quebrado es impropio, se divide directamente el numerador por el denominador, y el cociente expresa quintales, así:

$$\begin{array}{r|l} 29 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 9 \text{ qq.} \end{array}$$

Sé multiplica el residuo 2 por 4 arrobas que tiene un quintal, y el producto se divide por el mismo divisor 3, así:

$$2\times4= \begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 2 \text{ @} \end{array}$$

Se multiplica el residuo 2 por 25 libras que tiene una arroba, y el producto se divide por el mismo divisor 3, así:

$$2\times25= \begin{array}{r|l} 50 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 16 \text{ lb} \\ 2 & \end{array}$$

Se multiplica el residuo 2 por 16 onzas que tiene una libra, y el producto de divide por el mismo divisor 3, así:

$$2\times16= \begin{array}{r|l} 32 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 10 \text{ onzas} \end{array}$$

Se multiplica el residuo 2 por 16 adarmes que tiene una onza, y el producto se divide por el mismo divisor 3, así:

$$2\times16= \begin{array}{r|l} 32 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 10 \text{ adarmes} \end{array}$$

Se multiplica el residuo 2 por 3 tomines que tiene un adarme, y el producto se divide por el mismo divisor 3, así:

$$2 \times 3 = 6 \;\big|\; 3$$
$$0 \quad\; 2 \text{ tomines}$$

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$\frac{29}{3}$=9 qq., 2@, 16 lb, 10 onzas, 10 adarmes, 2 tomines

Ejemplo 2.° Se quiere valuar el quebrado $\frac{3}{4}$ de sucre en reales, medios y cuartillos.

Explicación.—Como el quebrado es propio, se multiplica el numerador por 10 reales que tiene un sucre, y el producto se divide por el divisor 4, así:

$$3 \times 10 = 30 \;\big|\; 4$$
$$2 \quad\; 7 \text{ reales}$$

Se multiplica el residuo 2 por 2 medios que tiene un real, y el producto se divide por el mismo divisor 4, así:

$$2 \times 2 = 4 \;\big|\; 4$$
$$0 \quad\; 1 \text{ medio}$$

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$\frac{3}{4}$=7 reales, 1 medio

Ejemplo 3.° Se quiere valuar el quebrado $\frac{3}{5}$ de peso sencillo en reales, medios y cuartillos.

Explicación.—Como el quebrado es propio, se multiplica el numerador por 8 reales que tiene un peso sencillo, y el producto se divide por el divisor 5, así:

$$3 \times 8 = 24 \;\big|\; 5$$
$$4 \quad\; 4 \text{ reales}$$

Se multiplica el residuo 4 por 2 medios que tiene un real, y el producto se divide por el mismo divisor 5, así:

$$4 \times 2 = 8 \;\big|\; 5$$
$$3 \quad\; 1 \text{ medio}$$

Se multiplica el residuo 3 por 2 cuartillos que tiene un medio, y el producto se divide por el mismo divisor 5, así:

$$3 \times 2 = 6 \;\big|\; 5$$
$$1 \quad\; 1 \text{ cuartillo y } \tfrac{1}{5} \text{ de cuartillo}$$

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$\frac{3}{5}$=4 reales, 1 medio, 1 cuartillo

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para valuar un quebrado, se divide el numerador por el denominador, si dicho quebrado es impropio. Pero si es propio, se multiplica entonces el numerador por el valor de una unidad de la especie inmediatamente inferior; se divide el producto por el denominador, y el cociente indica las unidades de especie superior; después se multiplica el primer residuo por el valor de una unidad de la especie inmediatamente inferior; el producto se divide por el mismo denominador, que es el divisor, y el cociente indica las unidades de la segunda especie, y así sucesivamente, hasta que se obtenga un cociente exacto, ó se llegue á la última especie.*

PROBLEMAS

1.° Simplifíquense los quebrados $\frac{248}{164}$, $\frac{3888}{2140}$, $\frac{446}{234}$ y $\frac{978}{423}$

2.° Redúzcanse á un común denominador, por medio del mínimo común multíplice, los siguientes quebrados: $\frac{8}{24}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{9}{18}$ y $\frac{7}{48}$.

3.° Hoy se ha hecho $\frac{2}{3}$ de una obra, y ayer $\frac{4}{6}$. Cuánto se ha hecho por todo?

4.° Un albañil ha trabajado el día lunes 6 horas y $\frac{3}{4}$ de hora; el martes, 7 horas y $\frac{1}{2}$; el miércoles, 5 horas y $\frac{1}{4}$; el jueves, 3 horas $\frac{3}{4}$. Cuántas horas ha trabajado?

5.° De una pieza de paño se han vendido 36 varas y $\frac{2}{3}$; y habiendo sobrado 15 varas y $\frac{1}{3}$, se pregunta cuántas varas tenía la pieza.

6.° Un comerciante vende 8 varas de una pieza de grano de oro, y 76 varas $\frac{3}{4}$ de otra pieza. Cuánto ha vendido por todo?

7.° Un Escribano gana en un día 12 \$ con $\frac{3}{4}$ de sucre, y en otro día gana 16 \$ con $\frac{3}{5}$ de sucre. Cuál es la ganancia total?

8.° Un correo camina en una hora las $\frac{3}{4}$ partes de una legua. En cuánto tiempo caminará 12 leguas?

9.° De una pieza de liencillo, que constaba de 60 varas $\frac{2}{3}$, se han vendido 25 varas $\frac{2}{4}$. Cuánto ha sobrado todavía?

10. A un correo, que conducía 935 \$, se le pierden 342 con $\frac{2}{4}$ de sucre. Cuánto le ha quedado?

11. Una persona debe $\frac{9}{12}$ avos de sucre, y paga $\frac{3}{5}$. Cuánto debe todavía?

12. De 9.658 sucres $\frac{18}{20}$ avos de sucre, que debe un comerciante, paga 892 \$. Cuál es el resto de la deuda?

13. Cuál es el número que, sumado con 86 $\frac{2}{5}$, produce 184 $\frac{3}{8}$?
14. Una pieza de percal tiene 62 varas $\frac{3}{4}$, y otra tiene 43 $\frac{2}{3}$. Con cuántas varas es mayor la primera?
15. De 586 réstese el mixto 83 $\frac{18}{25}$.
16. De una pieza de zaraza, que tiene 60 yardas, se han vendido las $\frac{3}{8}$ partes. Cuánto sobra todavía?
17. Un individuo posee un terreno de 6.400 varas cuadradas, y vende las $\frac{3}{4}$ partes. Cuánto le sobra?
18. Un comerciante ha comprado 78 varas de paño, á razón de 4 \$ $\frac{3}{5}$ de sucre la vara. Cuánto debe pagar por todo?
19. Una persona ha vendido 204 metros y 6 decímetros de paño, á 2 \$ el métro. Cuánta cantidad debe recibir?
20. Con $\frac{7}{8}$ de sucre, se han comprado $\frac{2}{3}$ de merino. Cuánto hay que pagar?
21. Cuánto valen 334 varas $\frac{3}{4}$ de percal, á razón de 2 reales y $\frac{1}{2}$ la vara?
22. Cuál es el número que, multiplicado por $\frac{2}{5}$, produce 936?
23. Se quiere saber cuántas arrobas, libras, onzas, etc., están contenidas en $\frac{86}{13}$ avos de arroba.

LECCION UNDÉCIMA

De las fracciones decimales.

Cuando un quebrado tiene por denominador la unidad seguida de uno ó más ceros, se llama entonces *fracción decimal*; y cuando no tiene por denominador la unidad seguida de uno ó más ceros, se llama entonces *fracción ordinaria*. La fracción decimal se define así:

Se llama *fracción decimal* la representación especial de un quebrado que tiene por denominador la unidad seguida de uno ó más ceros.

Ejemplo. $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{5}{1000}$, y se leen: cuatro décimos, tres centésimos y cinco milésimos.

Ejemplos de fracciones ordinarias. $\frac{2}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{6}{12}$, y se leen: dos octavos, siete novenos y seis doceavos.

Formación de las fracciones decimales.

Si se toma un sucre, y se lo cambia con diez reales sueltos; y si uno de éstos se repite cinco veces, por ejemplo, se origina la fracción *cinco décimos*, que se escribe así: $\frac{5}{10}$

Explicación 1ª—El numerador indica que de los diez reales, ó sean décimos, se han tomado cinco; y el denominador expresa el número total de reales ó décimos.

Si el mismo sucre se lo cambia con cien centavos sueltos; y si uno de éstos se repite nueve veces, se origina la fracción *nueve centésimos*, que se escribe así: $\frac{9}{100}$

Las fracciones decimales se representan también de este otro modo, y sean las mismas anteriores: 05 y 009

Para leer estas fracciones, se escribe una coma después del primer cero de la izquierda, así: 0,5; 0,09; y se leen: cinco décimos, nueve centésimos.

Explicación 2ª—A la primera fracción le faltan 5 décimos, ó sean 5 reales, para formar una unidad entera, que es un sucre; y puesto que no hay una unidad entera, se escribe un cero, para llenar este lugar. La parte que queda á la izquierda de la coma, se llama *entera*; la que queda á la derecha de la coma, se llama *parte decimal*; y las cifras que forman esta parte, se llaman *cifras decimales*.

Si el 5 del primer ejemplo representa los décimos, ó sean reales, es claro que el cero de la parte decimal del segundo ejemplo representa los décimos, esto es, representa valores diez veces menores que la parte entera, que está antes de la coma; y si el cero de la parte decimal representa valores diez veces menores con respecto al lugar que ocupa la parte entera, es claro que el 9 representa valores diez veces menores con respecto al cero de la misma parte decimal, y representa valores cien veces menores con respecto á la parte entera; luego el 9 representa los centésimos ó centavos.

Como se ve, en las fracciones decimales sucede que toda cifra, colocada á la derecha de otra, representa valores diez veces menores, es decir, va disminuyendo de diez en diez. En los números enteros sucede lo contrario, esto es, toda cifra colocada á la izquierda de otra, representa valores diez veces mayores, es decir, va aumentando de diez en diez.

De aquí se deduce esta ley general:

En los números ó fracciones decimales, toda cifra colocada á la derecha de otra representa valores diez veces menores.

Según esta ley, las siguientes fracciones se escriben y se leen de esta manera:

$\frac{1}{10}$ ó 0,1 = décimo ó décima

$\frac{1}{100}$ ó 0,01 = centésimo ó centésima

$\frac{1}{1000}$ ó 0,001 = milésimo ó milésima

$\frac{1}{10000}$ ó 0,0001=diezmilésimo ó diezmilésima

$\frac{1}{100000}$ ó 0,00001=cienmilésimo ó cienmilésima

$\frac{1}{1000000}$ ó 0,000001=millonésimo ó millonésima

$\frac{1}{10000000}$ ó 0,0000001=diezmillonésimo ó diezmillonésima

$\frac{1}{100000000}$ ó 0,00000001=cienmillonésimo ó cienmillonésima

$\frac{1}{1000000000}$ ó 0,000000001 =milmillonésimo ó milmillonésima,

y así en adelante.

Explicación 3ª—Los décimos ocupan el primer lugar de la parte decimal, á partir de la coma para la derecha; los centésimos, el segundo lugar; los milesimos, el tercer lugar; los diezmilésimos, el cuarto lugar; los cienmilésimos, el quinto lugar; los millonésimos, el sexto lugar; los diezmillonésimos, el séptimo lugar; los cienmillonésimos, el octavo lugar; los milmillonésimos, el noveno lugar, y así en adelante.

Escritura de las fracciones decimales.

La fracción ocho enteros, veinticuatro cienmilésimos, se escribe así: 8,00024

Explicación.—Por cuanto se han dictado ocho unidades enteras, se escribe la cifra respectiva, y después, una coma. Una vez que la cifra 4 ocupa el quinto lugar, es claro que representa cienmilésimos, según la explicación 3ª, y se la escribe en este lugar; como la cifra 2 ocupa el cuarto lugar, es claro que representa diezmilésimos, y se la escribe en este lugar; pero como no se han dictado décimos, centésimos ni milésimos, y como no pueden quedar vacíos estos lugares, claro está que se llenan con tres ceros.

La fracción cero entero, seis milésimos, treinta y dos cienmillonésimos, se escribe así:

0,00600032

Explicación.—Como no se han dictado unidades enteras, se escribe un cero en este lugar; como los milésimos ocupan el tercer lugar, se escribe la cifra 6 en éste, y se escriben dos ceros en los de los décimos y centésimos, para que no queden vacíos estos lugares,

La cifra 3 ocupa el séptimo lugar, y representa diezmillonésimos; la cifra 2 ocupa el octavo lugar, y representa cienmillonésimos. Ahora, como no se han dictado diezmilésimos, cienmilésimos ni millonésimos, es claro que se escriben tres ceros para llenar estos lugares.

La fracción tres enteros, cuarenta y seis milmillonésimos, se escribe así:

3,000000046

La fracción cuatrocientos veinticinco enteros, dos mil quinientos sesenta cienmilésimos, se escribe así:

425,02560

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para escribir una fracción decimal, se escribe primero el número que se enuncia antes de la palabra* ENTEROS, *y después se pone una coma; en seguida se escribe la parte decimal, como si fuera número entero, de tal manera que la última cifra decimal ocupe el lugar correspondiente al orden de unidades que se ha expresado, y se llenan con ceros los lugares vacíos, cuando no se han dictado cifras significativas.*

Lectura de las fracciones decimales.

La fracción 5.726,007298 se lee así: cinco mil setecientos veintiséis enteros, siete mil doscientos noventa y ocho millonésimos.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para leer una fracción decimal, se menciona primero la parte que está antes de la coma, y después se menciona la palabra* ENTEROS, *ó el orden de unidades que representa la última cifra; en seguida se menciona la parte decimal, como si fuera número entero, y se concluye mencionando el orden de unidades que representa la última cifra decimal.*

Una fracción decimal se escribe de dos modos: ó en forma de quebrado, ó suprimiendo el denominador y modificando el numerador, cuando sea necesario.

Ejemplos. 1º El quebrado $\frac{5}{100}$ puede escribirse también 0,05, y se lee: cinco centésimos.

2º El quebrado $\frac{8}{1000}$ puede escribirse también 0,008, y se lee: ocho milésimos.

3º El quebrado $\frac{368}{10000}$ puede escribirse también 0,0368, y se lee: trescientos sesenta y ocho diezmilésimos.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dar la forma de fracción decimal á un quebrado que tiene por denominador la unidad seguida de uno ó más ceros, se escribe aparte el numerador; y partiendo de la última cifra de la derecha se separan con una coma, para la izquierda, tantas cifras cuantos ceros tenga el denominador, y se llenan con ceros los lugares que resulten vacíos,*

Propiedades de las fracciones decimales.

De la misma estructura de las fracciones decimales se deducen las siguientes propiedades:

PRIMERA PROPIEDAD.—Una fracción decimal no cambia de valor, si á la derecha se le agregan uno ó más ceros.

Ejemplo. La fracción 3,27 es igual á 3,270 y también á 3,2700 y á 3,27000

Explicación.—Las tres fracciones últimas son iguales á la primera, porque las cifras decimales 2 y 7 permanecen en el mismo lugar, y por consiguiente, representan el mismo valor.

Puesto que no altera de valor una fracción decimal, agregándole á la derecha uno ó más ceros, es claro que tampoco altera de valor al quitarle uno ó más ceros, porque las cifras significativas permanecen en el mismo lugar, y por consiguiente, representan el mismo valor.

Ejemplo. La fracción 26,43000 es igual á 26,4300, á 26,430 y á 26,43

De aquí se deduce la siguiente

CONSECUENCIA.—*Una fracción decimal no altera de valor, al quitarle uno ó más ceros de la derecha.*

SEGUNDA PROPIEDAD.—Si en una fracción decimal se corre la coma uno ó más lugares á la derecha, la fracción se hace diez, cien, mil, etc., veces mayor.

Ejemplo. 21,504

Si se corre la coma un lugar á la derecha, la fracción se hace diez veces mayor, así: 215,04.

Explicación.—La cifra 1, que antes representaba las unidades simples, ahora representa las decenas; la cifra 2, que antes representaba las decenas, ahora representa las centenas; luego cada cifra se ha hecho diez veces mayor, y por tanto, toda la fracción se ha hecho diez veces mayor.

Si se corre la coma un lugar más á la derecha, la fracción se hace otras diez veces mayor, así: 2150,4

La explicación es la misma.

Si se corre la coma un lugar más á la derecha, la fracción se hace otras diez veces mayor, así: 21504

Si se quiere hacer la fracción otras diez veces mayor, y como no hay más cifras, se agrega entónces un cero á la derecha, y así en adelante.

TERCERA PROPIEDAD.—Si en una fracción decimal se corre la coma uno ó más lugares á la izquierda, la fracción se hace diez, cien, mil, etc., veces menor.

Ejemplo. 504,21

Si se corre la coma un lugar á la izquierda, la fracción se hace diez veces menor, así: 50,421

Explicación.—El cero, que antes representaba las decenas, ahora representa las unidades simples; la cifra 5, que antes representaba las centenas, ahora representa las decenas; luego cada cifra se ha hecho diez veces menor, y por tanto, toda la fracción se ha hecho diez veces menor.

Si se corre la coma un lugar más á la izquierda, la fracción se hace otras diez veces menor, así: 5,0421

La explicación es la misma.

CUARTA PROPIEDAD.—Si en una fracción decimal se borra la la coma, se hace tantas veces mayor cuantas cifras tenga la parte decimal.

Ejemplo. 45,327

Si se borra la coma, la fracción se hace mil veces mayor, porque equivale á correr la coma hasta después del 7, así: 45327

Explicación.—La cifra 7, que antes representaba los milésimos, ahora representa las unidades simples; la cifra 2, que antes representaba los centésimos, ahora representa las decenas; la cifra 3, que antes representaba los décimos, ahora representa las centenas; la cifra 5, que antes representaba las unidades simples, ahora representa las unidades de millar; y la cifra 4, que antes representaba las decenas simples, ahora representa las decenas de millar; luego cada cifra se ha hecho mil veces mayor, y por tanto, toda la fracción se ha hecho mil veces mayor.

Conversión de una fracción decimal en fracción ordinaria.

Ejemplo. $45{,}0028=\frac{450028}{10000}$

Explicación.—Se borra la coma, y se ponen todas las cifras como numerador, y como denominador se pone la unidad seguida de cuatro ceros, puesto que la parte decimal tiene cuatro cifras.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para convertir una fracción decimal en fracción ordinaria, se prescinde de la coma, y se ponen todas las cifras como numerador; y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tenga la parte decimal.*

Suma de fracciones decimales.

Ejemplo.

$$\begin{array}{r} 348{,}008 \\ 236{,}30769 \\ 547{,}002 \\ \hline 1131{,}31769 \end{array}$$

Según la primera propiedad, los sumandos 1º y 3º pueden escribirse así:

$$\begin{array}{r} 348{,}00800 \\ 236{,}30769 \\ 547{,}00200 \\ \hline 1131{,}31769 \end{array}$$

A los sumandos 1º y 3º se han agregado dos ceros á la derecha, á fin de que todos tengan igual número de cifras decimales.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para sumar fracciones decimales, se escriben los sumandos unos debajo de otros, como si fueran números enteros, teniendo el cuidado de que las comas queden en columna, y teniendo también el cuidado de que la coma de la suma se corresponda con las de los sumandos.*

Resta de fracciones decimales.

Ejemplos. 1º

$$\begin{array}{r} 328{,}042 \\ 46{,}275 \\ \hline 281{,}767 \end{array}$$

2º

$$\begin{array}{r} 732{,}04 \\ 514{,}38964 \\ \hline 217{,}65036 \end{array}$$

Según la primera propiedad, el minuendo de este ejemplo puede escribirse así: 732,04000

La operación se dispone entonces de esta otra manera:

$$\begin{array}{r} 732{,}04000 \\ 514{,}38964 \\ \hline 217{,}65036 \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para restar fracciones decimales, se ejecuta la operación como si fueran números enteros, teniendo el cuidado de escribir la coma en el residuo de tal modo que forme columna con las del minuendo y sustraendo. Si el minuendo tiene menos cifras, se escriben los ceros necesarios á la derecha, para igualar el número de cifras decimales que hay en el sustraendo, ó viceversa, y luego se hace la resta.*

Escolio 1.º No es indispensable escribir ceros en el minuendo ó en el sustraendo; basta suponerlos escritos.

Escolio 2.º La coma se escribe solamente en los decimales, pero nunca en los números enteros. En éstos se escribe *un punto*, para señalar *los miles ó millares.*

Multiplicación de fracciones decimales.

Esta operación comprende tres casos:

1.º *Multiplicar una fracción decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros.*

2.º *Multiplicar una fracción decimal por un número entero ó viceversa.*

3.º *Multiplicar una fracción decimal por otra fracción decimal.*

Primer caso.—Este se resuelve aplicando la siguiente

Regla.—*Para multiplicar una fracción decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros, se corre la coma á la derecha de la fracción tantos lugares cuantos ceros acompañen á la unidad, de acuerdo con la segunda propiedad.*

Ejemplo. 243,567×1000=243567

Segundo caso.—Este se resuelve aplicando la siguiente

Regla.—*Para multiplicar una fracción decimal por un número entero ó viceversa, se prescinde de la coma, y se ejecuta la operación como si fueran números enteros, y en el producto se separan con una coma, de derecha á izquierda, tantas cifras cuantas tenga la fracción decimal.*

Ejemplos. 1º

```
 25,416
     32
-------
  50832
 76248
-------
 813,312
```

2º

```
    423
   6,72
-------
    846
  2961
 2538
-------
 2842,56
```

Tercer caso.—Este se resuelve aplicando la siguiente

Regla.—*Para multiplicar una fracción decimal por otra decimal, se prescinde de las comas, y se ejecuta la operación como si fueran números enteros, y en el producto se separan con una coma, de derecha á izquierda, tantas cifras cuantas decimales tengan las dos fracciones.*

Ejemplo.

```
   23,485
    6,32
---------
    46970
   70455
 140910
---------
 148,42520
```

División de fracciones decimales.

Esta operación comprende cuatro casos:

1.° *Dividir una fracción decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros.*
2.° *Dividir una fracción decimal por un número entero.*
3.° *Dividir un número entero por una fracción decimal.*
4.° *Dividir una fracción decimal por otra fracción decimal.*

PRIMER CASO.—Este se resuelve aplicando la siguiente

REGLA.—*Para dividir una fracción decimal por la unidad seguida de uno ó más ceros, se corre la coma tantos lugares á la izquierda cuantos ceros acompañen á la unidad, de acuerdo con la tercera propiedad.*

Ejemplo. 53684,021 : 100=536,84021

SEGUNDO CASO.—Este se resuelve aplicando la siguiente

REGLA.—*Para dividir una fracción decimal por un número entero, se prescinde de la coma del dividendo, de acuerdo con la cuarta propiedad, y se hace la división como si fueran números enteros, y en el cociente se separan con una coma, de derecha á izquierda, tantas cifras cuantas decimales tenga el dividendo.*

Ejemplo.

```
42,9568  | 31
119       1,3857
 265
  176
   218
     1  (residuo)
```

Para resolver este segundo caso, se aplica también esta

REGLA.—*Para dividir una fracción decimal por un número entero, se ejecuta la división como si el dividendo fuera también un número entero; pero tan pronto como la primera cifra decimal haga parte de un dividendo parcial, se escribe una coma en el cociente, y en seguida se continúa la división.*

TERCER CASO.—Este se resuelve aplicando la siguiente

REGLA.—*Para dividir un número entero por una fracción decimal, se prescinde de la coma del divisor, de acuerdo con la cuarta propiedad, y se hace la división como si fueran números enteros, y en el cociente se separan con una coma, de derecha á izquierda, tantas cifras cuantas decimales tenga el divisor.*

Ejemplo.

```
67893  | 4,26
2529     1,59
 3993
  159  (residuo)
```

CUARTO CASO.—Este se resuelve aplicando la siguiente

REGLA.—*Para dividir una fracción decimal por otra fracción decimal, se iguala el número de cifras decimales, agregando los ceros necesarios á la que tenga menos, de acuerdo con la primera propiedad; se prescinde de las comas, y se hace la división como si fueran números enteros, y el cociente no altera de valor.*

Ejemplo. 76,425 | 4,7

Según la regla, se dispone la operación así:

76425 | 4700

y el problema queda reducido á una simple división de números enteros.

Al agregar dos ceros al divisor, la fracción no altera, según la primera propiedad. Al borrar la coma del dividendo, la fracción se hace mil veces mayor, según la cuarta propiedad; y al borrar la coma del divisor, la fracción se hace mil veces mayor, según la misma propiedad; y por tanto, el cociente no altera de valor.

Aplicación de los decimales.

Cuando una división de números enteros no es exacta, se la aproxima por medio de decimales, á fin de continuarla.

Ejemplo.

```
9875 | 27
177    365
 155
  20 (residuo)
```

Explicación.—Se multiplica el residuo 20 enteros por 10, para reducirlo á décimos, y basta agregarle un cero á la derecha, así: 200 décimos.

Ahora se escribe en el cociente una coma después del 5, y se divide el número 200 por 27, así:

```
200 | 27
 11   7
```

Ahora se multiplica el residuo 11 por 10, para reducirlo á centésimos, así: 110. Luego se divide el número 110 por 27, así:

```
110 | 27
  2   4
```

Se multiplica el residuo 2 por 10, para reducirlo á milésimos, así: 20. Como este número no es divisible por 27, se escribe un cero en el cociente, y se multiplica el mismo 20 por 10 para reducirlo á diezmilésimos, el cual se divide por 27, así:

$$\begin{array}{r|l} 200 & 27 \\ \cline{2-2} 11 & 07 \end{array}$$

De esta manera se aproximan por decimales las divisiones inexactas. La operación queda así:

$$9875 : 27 = 365{,}7407$$

Conversión de una fracción ordinaria en fracción decimal.

Ejemplo 1º Se quiere convertir el quebrado ó fracción ordinaria $\frac{9}{4}$ en fracción decimal.

Explicación.—Puesto que es un quebrado impropio, se divide directamente el numerador por el denominador, así:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \text{ enteros} \end{array}$$

Se escribe una coma después del cociente 2, y se convierte el residuo 1 en décimos. Para esto, se lo multiplica por 10 décimos que vale una unidad entera:, el producto se divide por el mismo 4, y el cociente expresa décimos, así:

$$\begin{array}{r|l} 1 \times 10 = 10 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 2 \text{ décimos} \end{array}$$

Se convierte ahora el residuo 2 en centésimos. Para esto, se lo multiplica por 10 centésimos que vale un décimo; el producto se divide por el mismo 4, y el cociente expresa centésimos, así:

$$\begin{array}{r|l} 2 \times 10 = 20 & 4 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \text{ centésimos} \end{array}$$

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 4 \\ \cline{2-2} 10 & 2{,}25 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Ejemplo 2º Se quiere convertir el quebrado ó fracción ordinaria $\frac{2}{8}$ en fracción decimal.

Explicación.—Se divide el numerador por el denominador; pero como el quebrado es propio, se escribe primero un cero en el cociente y á continuación una coma. Después se convierte el numerador 2 en décimos: para esto, se lo multiplica por 10 décimos que vale una unidad entera; el producto se divide por el número 8, y el cociente expresa décimos, así:

$$\begin{array}{r|l} 2\times10=20 & 8 \\ \hline 4 & 0{,}2 \text{ décimos} \end{array}$$

Se convierte ahora el residuo 4 en centésimos. Para esto, se lo multiplica por 10 centésimos que vale un décimo; el producto se divide por él mismo 8, y el cociente expresa centésimos, así:

$$\begin{array}{r|l} 4\times10=40 & 8 \\ \hline 0 & 5 \text{ centésimos} \end{array}$$

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 8 \\ \hline 40 & 0{,}25 \text{ centésimos} \\ 0 & \end{array}$$

Dé aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para convertir una fracción ordinaria en fracción decimal, se divide directamente el numerador por el denominador, si la fracción es impropia; pero si es propia, se escribe entonces un cero en el cociente, y á continuación una coma; después se agrega un cero al numerador, el producto se divide por el mismo denominador, y el cociente expresa décimos. Al residuo se agrega otro cero; el producto se divide por el mismo denominador, y el cociente expresa centésimos, y así sucesivamente.*

PROBLEMAS

1.º Escríbanse las siguientes fracciones decimales: Cero entero, trescientos veintiuno diezmilésimos; ocho enteros, cuatro cienmilésimos; cuarenta y nueve enteros, veintiséis millonésimos.

2.º Léanse las siguientes fracciones: 36,003; 0,0368; 486,003920

3.° Conviértanse en fracciones ordinarias las siguientes decimales: 75,003; 0,3864.
4.° Súmense las siguientes fracciones: 858,9876 con 3,954 y con 0,13067.
5.° Réstese de 976,4085 la fracción 95,760; de 584 réstese 25,473; de 0,7924 réstese 0,0032.
6.° Multiplíquese 68,096 por 1000; 432;1205 por 74; 3427 por 0,326.
7.° Divídase 58796;23 por 10, 100, 1000.
8.° Divídase 978,4086 por 432; 128,32045 por 3,962.

LECCION DUODÉCIMA

De las fracciones decimales periódicas.

Cuando se convierte una fracción ordinaria en fracción decimal, y se obtiene un número limitado de cifras, se llama entonces *fracción decimal finita.*

Cuando se obtiene un número ilimitado de cifras decimales, es decir, cuando una cifra ó un grupo de cifras decimales empiezan á repetirse desde la coma para adelante, de una manera indefinida, se llama entonces *fracción decimal periódica simple infinita.* La cifra ó grupo de cifras que se repiten, se llama *período ó parte periódica.*

Ejemplo 1° $\frac{2}{3}$

Explicación.—Se aplica la regla de convertir una fracción ordinaria en fracción decimal, y se ejecuta la operación así:

```
20  | 3
 20  0,666  (fracción decimal periódica simple infinita)
  20
   2
```

Como los dividendos parciales se repiten indefinidamente, resulta que las cifras del cociente se repiten también de una manera indefinida.

El período ó parte periódica se compone de una sola cifra, que es 6; y como el período principia á repetirse después de la coma, indefinidamente, la fracción es *periódica simple infinita.* Como no es posible hacer desaparecer los dividendos parciales,

17

Resulta que se repite en el cociente la misma cifra, y por tanto, la división no se acaba jamás.

La cifra ó cifras que se repiten, se escriben en un paréntesis, así;

20	3
2	0,(6)

Ejemplo 2º $\frac{8}{11}$

Explicación.—Convirtiendo este quebrado ó fracción ordinaria en fracción decimal, según la regla de conversión, se tiene:

80	11	
30	0,7272	(fracción decimal periódica simple infinita)
80		
30		
8		

El grupo de cifras que se repite es 72; y se escribe en un paréntesis, para indicar que la fracción es infinita, así:

80	11
30	0,(72)

Cuando se obtiene un número ilimitado de cifras decimales, es decir, cuando después de la coma se obtiene una cifra ó un grupo de cifras que no se repiten, y se obtiene á continuación una cifra ó un grupo de cifras que se repiten indefinidamente, la fracción se llama *infinita periódica mixta.* La cifra ó grupo de cifras que no se repiten, se llama *parte no periódica ó parte irregular;* y la cifra ó grupo de cifras que se repiten indefinidamente, se llama *período ó parte periódica.*

Ejemplo. $\frac{17}{24}$

Convirtiéndola en fracción decimal, se tiene:

170	24	
200	0,7083	(fracción decimal periódica mixta infinita)
80		
8		

Explicación.—La parte no periódica ó irregular se compone de las cifras 708; y el período ó parte periódica que se repite indefinidamente, se compone de una sola cifra, que es 3, y se la escribe en un paréntesis, para indicar que la fracción es *infinita,* así:

$$
\begin{array}{r|l}
170 & 24 \\ \cline{2-2}
200 & 0{,}708(3) \\
80 & \\
8 &
\end{array}
$$

De aquí se deducen las siguientes definiciones;

1ª Se llama *fracción decimal finita* la que tiene un número limitado de cifras decimales.

2ª Se llama *fracción decimal periódica simple infinita* la que tiene un número ilimitado de cifras decimales, y el período principia después de la coma.

3ª Se llama *fracción decimal periódica mixta infinita* la que tiene un número ilimitado de cifras decimales, las que se componen de una parte no periódica y de una parte periódica.

Recapitulación.

Sea la fracción $\frac{3}{8}$

Explicación.—Multiplicar el numerador 3 por 10, para poder hacer la división, es multiplicarlo por los factores de 10, que son 2 y 5. Ahora, el denominador 8 se descompone en sus factores primos, que son 2, 2 y 2.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\frac{3\times2\times5}{2\times2\times2}$$

Suprimiendo el factor 2 en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$\frac{3\times5}{2\times2}$$

Multiplicar por 10 el numerador de este quebrado, que es residuo de la división, es multiplicarlo por los factores 2 y 5, así:

$$\frac{3\times5\times2\times5}{2\times2}$$

Suprimiendo el factor 2 en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$\frac{3\times5\times5}{2}$$

Multiplicar el numerador por 10, es multiplicarlo por los factores 2 y 5, así:

$$\frac{3\times5\times5\times2\times5}{2}$$

Suprimiendo el factor 2 en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$3\times5\times5\times5 \text{ (resultado final)}$$

Como se ve, los factores 2, 2 y 2 del numerador se destruyen con los factores 2, 2 y 2 del denominador; por tanto, desapareciendo los dividendos parciales, queda terminada la división, y se obtiene un cociente exacto.

Haciendo las multiplicaciones indicadas en el resultado final, se tiene:

$$3\times5\times5\times5=15\times5\times5=75\times5=0{,}375$$

Los factores del denominador 8 son 2, 2 y 2, que se indican así:

$$2\times2\times2=2^3$$

Ahora se observa que el número de cifras decimales es igual al exponente 3 del factor 2.

Haciendo, pues, la división por el método ordinario, se obtiene el mismo número de cifras decimales, así:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0{,}375 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Ejemplo 2.° de fracción decimal finita. Sea $\frac{18}{125}$.

Explicación.—Multiplicar el numerador 18 por 10, para poder hacer la división, es multiplicarlo por los factores de 10, que son 2 y 5. Se descompone el denominador 125 en sus factores primos, que son 5, 5 y 5.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\frac{18\times2\times5}{5\times5\times5}$$

Suprimiendo el factor 5 en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$\frac{18\times2}{5\times5}$$

Multiplicar el numerador por 10, es multiplicarlo por los factores 2 y 5, así:

$$\frac{18\times2\times2\times5}{5\times5}$$

Suprimiendo el factor 5 en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$\frac{18\times2\times2}{5}$$

Multiplicar el numerador por 10, es multiplicarlo por los factores 2 y 5, así:

$$\frac{18\times2\times2\times2\times5}{5}$$

Suprimiendo el factor 5 en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$18\times2\times2\times2 \text{ (resultado final)}$$

Como se ve, los factores 5, 5 y 5 del numerador se destruyen con los factores 5, 5 y 5 del denominador; por tanto, desapareciendo los dividendos parciales, queda terminada la división, y se obtiene un cociente exacto.

Haciendo las multiplicaciones indicadas en el resultado final, se tiene:

$$18\times2\times2\times2=36\times2\times2=72\times2=0{,}144$$

Los factores del denominador 125 son 5, 5 y 5, que se indican así:

$$5\times5\times5=5^3$$

Ahora se observa que el número de cifras decimales es igual al exponente 3 del factor 5.

Haciendo, pues, la división por el método ordinario, se obtiene el mismo número de cifras decimales, así:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 125 \\ \cline{2-2} 550 & 0{,}144 \\ 500 & \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Cuando en el denominador de un quebrado irreductible figuran solamente los factores 2 y 5, ó uno de éstos, entonces la fracción decimal es finita; y el número de cifras decimales es igual al mayor exponente del factor 2 ó del factor 5.*

Ejemplo de fracción decimal periódica simple infinita. Sea $\frac{8}{11}$

Explicación.—Al multiplicar el numerador 8 por 10, se introducen los factores 2 y 5; pero como en el denominador no figura ninguno de estos factores, resulta que no es posible destruír el denominador, que sirve de divisor; por tanto, la división no tiene fin, y las cifras que se repiten después de la coma forman el *período ó parte periódica.*

Haciendo la división por el método ordinario, se tiene:

$$\begin{array}{l|l} 80 & 11 \\ \cline{2-2} \;\;30 & 0{,}72 \text{ (período ó parte periódica)} \\ \;\;\;\;80 & \end{array}$$

Para indicar que la fracción es infinita, se encierra el período 72 en un paréntesis, así:

$$\begin{array}{l|l} 80 & 11 \\ \cline{2-2} \;\;30 & 0{,}(72) \\ \;\;\;\;80 & \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Cuando en el denominador de un quebrado irreductible no figura ninguno de los factores* 2 *y* 5, *la fracción decimal es periódica simple infinita.*

Ejemplo de fracción decimal periódica mixta infinita. Sea $\frac{17}{24}$

Explicación.—Se multiplica el numerador 17 por 10, lo cual equivale á introducir los factores 2 y 5. Se descompone ahora el denominador 24 en sus factores primos, que son 2, 2, 2 y 3.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\frac{17 \times 2 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 3}$$

Suprimiendo el factor 2 en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$\frac{17 \times 5}{2 \times 2 \times 3}$$

Al multiplicar el numerador por 10, se introducen los factores 2 y 5, así:

$$\frac{17 \times 5 \times 2 \times 5}{2 \times 2 \times 3}$$

Suprimiendo el factor 2 en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$\frac{17\times5\times5}{2\times3}$$

Al multiplicar el numerador por 10, se introducen los factores 2 y 5, así:

$$\frac{17\times5\times5\times2\times5}{2\times3}$$

Suprimiendo el factor 2 en el numerador y en el denominador, se tiene:

$$\frac{17\times5\times5\times5}{3}$$

Al multiplicar el numerador por 10, se introducen los factores 2 y 5; pero como en el numerador no figura un solo factor 3, con el cual pueda destruírse el denominador, resulta que dicho denominador 3 no desaparece jamás, y por tanto, la división no tiene fin.

Haciendo la división por el método ordinario, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 170 & 24 \\ \cline{2-2} 200 & 0{,}70833 \\ 80 & \\ 80 & \end{array}$$

El número 708, que no se repite, forma la *parte no periódica*; y la cifra 3, que se repite indefinidamente, forma la *parte periódica.*

Los factores del denominador 24 son 2, 2, 2 y 3, que se indican así:

$$2\times2\times2\times3=2^3\times3$$

Ahora se observa que la parte no periódica tiene un número de cifras igual al exponente 3 del factor 2.

Escolio.—Si el factor 5 figurara en el denominador, se procedería lo mismo que con el factor 2; y si en el denominador figuraran los dos factores 2 y 5, se destruirían con los del numerador; pero como en el denominador figura el factor 3, y no es posible que desaparezca, la división es infinita.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Cuando en el denominador figuren los factores 2 y 5, ó uno de éstos, pero combinados con otro ú otros factores diferentes, entonces la fracción es periódica mixta infinita, y el nú-*

mero de cifras decimales de la parte no periódica es igual al mayor exponente del factor 2 ó del factor 5.

Se llama *fracción generatriz* la fracción ordinaria que origina una fracción decimal cualquiera.

Problema. 1.° Encontrar la fracción generatriz de una fracción decimal finita.

Ejemplo. 0,375 milésimos

Explicación. — Se ponen como numerador las tres cifras decimales 375, y como denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tiene la parte decimal, así:

$$\frac{375}{1000}$$

Dividiendo por 5 los dos términos de este quebrado, según el carácter de divisibilidad por 5, se tiene:

$$\frac{75}{200}$$

Dividiendo por 5 este quebrado, según el mismo carácter, se tiene:

$$\frac{15}{40}$$

Dividiendo por 5 este quebrado, según el mismo carácter, se tiene:

$\frac{3}{8}$, fracción generatiz, esto es, $0,375 = \frac{3}{8}$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para convertir una fracción decimal finita en fracción ordinaria, se pone por numerador las cifras decimales, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tenga la parte decimal, y se simplifica el quebrado que resulte.*

Problema 2.° Encontrar la fracción generatriz de una fracción decimal periódica simple infinita.

Ejemplo. 0,72727272

Explicación.—Designando por F la fracción generatriz buscada, se tiene:

F = 0,72727272. . . . (1ª igualdad)

El período se compone de las dos cifras 7 y 2; por consiguiente, multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tiene el período, es decir, por 100, se tiene:

$$100\,F = 72{,}727272 \quad \text{(2ª igualdad)}$$

Para multiplicar el segundo miembro de la igualdad 1ª por 100, basta correr la coma dos lugares á la derecha, de acuerdo con la 2ª propiedad de las fracciones decimales, y resulta la igualdad 2ª

Restando miembro á miembro las igualdades 1ª y 2ª, y poniendo la 2ª como minuendo, y la 1ª como sustraendo, se tiene:

$$\begin{array}{r} 100\,F = 72{,}727272 \\ F = 0{,}727272 \\ \hline 99\,F = 72 \end{array}$$

Si de cien efes se quita una efe, quedan noventa y nueve efes; si de setenta y dos enteros se quita cero enteros, quedan los mismos setenta y dos enteros. Los períodos del minuendo y del sustraendo se destruyen, por ser iguales entre sí, y dan cero por diferencia.

Se deja ahora la efe en el primer miembro, y se pasa el número 99 como divisor del segundo miembro, así:

$$F = \tfrac{72}{99}$$

Dividiendo por 3 los dos términos de este quebrado, á fin de simplificarlo, se tiene:

$$F = \tfrac{24}{33}$$

Dividiendo por 3 este quebrado, se tiene:

$$F = \tfrac{8}{11} \text{ (fracción generatriz), esto es;}$$

$$0{,}72 = \tfrac{8}{11}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para convertir una fracción decimal periódica simple infinita en fracción ordinaria, se ponen por numerador las cifras que forman el período, y por denominador un número compuesto de tantos nueves cuantas cifras tenga el período, y se simplifica el quebrado que resulte.*

Problema 3.° Encontrar la fracción generatriz de una fracción decimal periódica mixta infinita.

Ejemplo. 0,3181818

Explicación.—Designando por F la fracción generatriz buscada, se tiene:

$$F=0,3181818 \quad (1^{a} \text{ igualdad})$$

La parte no periódica es 3, y la parte periódica es 18. Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tengan la parte no periódica y la parte periódica, es decir, por 1000, se tiene:

$$1000F=318,181818 \quad (2^{a} \text{ igualdad})$$

Multiplicando ahora la misma igualdad 1ª por la unidad seguida de tantos ceros cuantas cifras tiene la parte no periódica, es decir, por 10, se tiene:

$$10\,F=3,181818 \quad (3^{a} \text{ igualdad})$$

Restando miembro á miembro las igualdades 2ª y 3ª, y poniendo la 2ª como minuendo y la 3ª como sustraendo, se tiene:

$$\begin{array}{r} 1000\,F=318,181818 \\ 10\,F=3,181818 \\ \hline 990\,F=315 \end{array}$$

Según la explicación del problema anterior, se tiene:

$$F=\tfrac{315}{990}=\tfrac{63}{198}=\tfrac{21}{66}=\tfrac{7}{22} \text{ (fracción generatriz,) esto es,}$$

$$315=\tfrac{7}{22}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para convertir una fracción decimal periódica mixta infinita en fracción ordinaria, se pone por numerador la parte no periódica seguida de la parte periódica, y restada toda ésta de la parte no periódica; por denominador se pone un número compuesto de tantos nueves cuantas cifras tiene el período, seguidos los nueves de tantos ceros cuantas cifras tiene la parte no periódica, y se simplifica el quebrado que resulte.*

PROBLEMAS

1.º Búsquese la generatriz de la fracción decimal periódica simple infinita 0,323232

2.º Búsquese la generatriz de la fracción decimal periódica simple infinita 0,272727

3.° Búsquese la generatriz de la fracción decimal periódica mixta infinita 0,45308308

4.° Qué fracción decimal origina el quebrado $\frac{1}{4}$?

5.° Qué fracción decimal origina el quebrado $\frac{4}{9}$?

6.° Qué fracción decimal origina el quebrado $\frac{3}{16}$?

LECCION DÉCIMATERCERA

De los números complejos ó denominados.

Se llaman *números complejos ó denominados* los que constan de unidades de diferentes especies, reductibles á una sola.

Se llaman *números incomplejos* los que no constan de unidades de diferentes especies, reductibles á una sola.

Los números complejos se escriben en orden descendente, esto es, unos á continuación de otros, y se pone encima ó á la derecha de cada uno la inicial de la palabra que indica la especie á que pertenece.

Ejemplo. El número 8 toneladas, 12 quintales, 3 arrobas, 9 libras y 14 onzas es un complejo, y se escribe así:

8t., 12qq., 3@, 9℔, 14 onzas

Reducción de un complejo á quebrado.

Ejemplo. Se quiere reducir á quebrado el complejo 6 quintales, 2 arrobas, 13 libras.

Explicación.—Según el 4º uso de la multiplicación, se multiplica el número 6 por 4 arrobas que tiene un quintal, y se agregan al producto las 2 arrobas, de este modo: $6\times4=24+2=26$ arrobas.

En seguida se multiplican las 26 arrobas por 25 libras que tiene una arroba, y al producto se agregan las 13 libras, de este modo: $26\times25=650+13=663$ libras

Se toma ahora una unidad de la especie superior, esto es, un quintal: éste se reduce á arrobas, que son 4 @; por último, se reducen estas arrobas á libras, que son 100 ℔, y se pone este número como denominador de 663, así: $\frac{663}{100}$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir un complejo á quebrado, se lo* *reduce á la última especie, según el 4º uso de la multiplicación; y al resultado se pone por denominador una unidad de la especie superior reducida á la inferior.*

Ejemplos de números complejos.

1.° Una tonelada tiene 20 quintales; un quintal, 4 arrobas; una arroba, 25 libras; una libra, 16 onzas; una onza, 16 adarmes; y un adarme, 8 tomines.

2.° Un siglo ó centuria tiene 100 años; un lustro, 5 años; un año, 12 meses; un mes, 4 semanas ó 30 días; un día, 24 horas; una hora, 60 minutos; y un minuto, 60 segundos.

3.° Una legua tiene 60 ½ cuadras; una cuadra, 100 varas; una vara, 4 cuartas ó 3 tercias; una cuarta, 9 pulgadas; una pulgada, 12 líneas; y una línea, 12 puntos.

4.° Un sucre vale 10 reales; un real, 2 medios ó 4 cuartillos; un medio, 2 cuartillos.

5.° Una circunferencia se divide en 360 partes, que se llaman *grados*; un grado, en 60 minutos; y un minuto, en 60 segundos.

6.° Una libra esterlina, que es unidad de moneda inglesa de oro, tiene 20 chelines; y un chelín, 12 peniques.

Escolio.—Tanto por desarrollar esta lección con los respectivos ejemplos, cuanto porque en las transacciones mercantiles se usan todavía las denominaciones de *pesos*, *reales*, *medios y cuartillos*, en virtud de que la gente del pueblo no comprende el sistema monetario decimal sino el antiguo, vamos á emplear dichas denominaciones; pero en el Sistema Métrico, y en la parte que dice "UNIDADES MONETARIAS", consignamos los términos prescritos por la ley, á saber: *sucres, décimos y centavos.*

Suma de números complejos.

Ejemplo. Se quiere sumar 18 toneladas, 12 quintales, 3 arrobas y 14 onzas, con 36 toneladas, 15 quintales, 1 arroba, 17 libras y 9 onzas.

La operación se dispone así:

18t.	12qq.	3@	0lb	14 onzas
36	15	1	17	9
55t.	8qq.	0@	18lb	7 onzas

Explicación.—Se hace la operación como suma de números enteros, esto es, se comienza á sumar por la derecha, y se colocan los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan las diferentes especies de unidades.

La primera columna da 23 onzas; y según el 4º uso de la división, se divide el número 23 por 16 onzas que tiene una libra, para reducirlas á la especie superior inmediata, y se obtiene 1 libra por cociente, y sobran 7 onzas.

Se escriben estas 7 onzas debajo de la línea horizontal y en frente de la primera columna, y se agrega la libra á la columna siguiente.

La segunda columna da 18 libras, y no se hace ninguna división, porque no alcanzan á componer una arroba, que es la especie superior inmediata, y por lo mismo, se escribe el número 18 en frente de esta segunda columna, y no se lleva nada á la siguiente.

La tercera columna da 4 arrobas, que hacen un quintal; y después de escribir cero en frente de esta columna, puesto que no sobra nada, se agrega el quintal á la columna que sigue.

La cuarta columna da 28 quintales, en los que hay una tonelada y sobran 8 quintales; y se agrega la tonelada á la columna que sigue.

La quinta columna da 55 toneladas.

Escolio 1.º Los sumandos pueden ser varios, y se procede del mismo modo.

Escolio 2.º En el primer sumando no hay libras, y por esto se escribe cero para llenar el vacío; y siempre que no se dicten unidades de una especie cualquiera, se escribe cero.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para sumar números complejos, se escriben unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie. Se comienza á sumar por la columna de la derecha, y se hace la reducción de unidades inferiores á superiores, agregando á las superiores inmediatas lo que resultare de las inferiores.*

Resta de números complejos.

Ejemplo. Un comerciante debe 50 libras esterlinas, 9 chelines y 7 peniques; y habiendo pagado 36 libras, 11 chelines y 5 peniques, desea saber cuánto adeuda todavía.

La operación se dispone así:

50 £	9 ch.	7 p.
36	11	5
13 £	18 ch.	2 p.

Explicación.—La primera columna de la derecha no presenta ninguna dificultad. La segunda columna no puede restarse, porque el minuendo es menor que el sustraendo. Entonces se toma una libra, que vale 20 chelines, los cuales, sumados con los 9, dan 29: haciendo la resta, da 18 por diferencia. La resta de la tercera columna da 13 por diferencia.

La operación se plantea de esta otra manera, á causa de las modificaciones que ha sufrido el minuendo:

49 £	29 ch.	7 p.
36	11	5
13 £	18 ch.	2 p.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para restar números complejos ó denominados, se escribe el sustraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de la misma especie. Se comienza á restar por la columna de la derecha, como si fueran números enteros; y si alguna especie del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo, se toma entonces una unidad de la especie superior inmediata, teniendo el cuidado de disminuír á dicha especie la unidad tomada.*

Multiplicación de números complejos.

Esta operación comprende tres casos:
1.° *Multiplicar un complejo por un incomplejo.*
2.° *Multiplicar un incomplejo por un complejo.*
3.° *Multiplicar un complejo por otro complejo.*

Primer caso.—Sabiendo que una arroba de azúcar vale 5 sucres, 3 reales y $\frac{1}{2}$, se quiere averiguar cuánto valen 46 arrobas.

La operación se dispone así:

5 $	3rs.	1m.
		46 @

Para resolver este caso, hay dos procedimientos: *El de reducción á quebrado, y el de multiplicaciones parciales.*

Primer procedimiento.—Reduciendo el complejo á quebrado, según la regla de reducción, se tiene:

$$\frac{107}{20}\times 46=\frac{4922}{20}=\frac{2461}{10}=246{,}10$$

Explicación.—Multiplicando los 5 sucres por 10 reales, y agregando los 3 reales al producto, se obtiene 53; multiplicando este número por 2 medios, y agregando el medio al producto, se obtiene 107. A este número se pone por denominador un sucre reducido á medios, que son 20; por último, se multiplica este quebrado por 46, para lo cual basta multiplicar el numerador por el entero, y se obtiene por resultado final que las 46 arrobas valen 246 sucres con un décimo de sucre, esto es, con un real, ó sean 10 centavos.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un complejo por un incomplejo, se convierte el complejo en quebrado, y la operación queda reducida á multiplicar un quebrado por un entero, y luego se valúa el quebrado que resulte en unidades del complejo.*

Segundo procedimiento.—Se multiplican las 46 arrobas por 1 medio, que es el multiplicando, y se obtienen 46 medios por producto, y éste es de la especie del multiplicando. En 46 medios hay 23 reales, según el cuarto uso de la división.

Después se multiplican las 46 arrobas por 3 reales, y se obtiene 138 por producto, que, con los 23, hacen 161 reales, en los que hay 16 sucres y 1 real.

Por último, se multiplican las 46 arrobas por 5 sucres, y se obtiene 230 por producto, que, con los 16, hacen 246 sucres.

Como se ve, este resultado es igual al anterior.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un complejo por un incomplejo, se multiplica el incomplejo por cada una de las especies del complejo, y se reducen las unidades inferiores á superiores, según el 4º uso de la división, puesto que los productos son de la especie del complejo, que es el multiplicando.*

Segundo caso.—Sabiendo que un quintal de azúcar vale 12 sucres, se pregunta cuánto valen 38 quintales, 2 arrobas, 14 libras y 12 onzas.

La operación se dispone así:

			12 $
38 qq.	2 @	14 lb	12 onzas

Explicación.—Reduciendo el complejo á quebrado, según la regla de reducción, se obtiene en definitiva:

$$12 \times \frac{61836}{1600} = \frac{742032}{1600} = 463 \text{ sucres } 77 \text{ centavos}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un incomplejo por un complejo, se convierte el complejo en quebrado, y la operación queda reducida á multiplicar un entero por un quebrado, y luego se valúa el quebrado en unidades del incomplejo.*

Modo de distinguir el multiplicando y el multiplicador.

Para distinguir el multiplicando y el multiplicador, se deben tener en cuenta las siguientes advertencias:

1ª En el ejemplo del primer caso, se busca el total de lo que valen las 46 arrobas de azúcar, esto es, se buscan el total de sucres, el de reales y el de medios; y puesto que el producto es de la especie de la del multiplicando, es necesario poner como tal el número complejo.

2ª En el ejemplo del segundo caso, se busca el total de lo que valen los 38 quintales, las 2 arrobas, las 14 libras y las 12 onzas, esto es, se busca el total de sucres; y puesto que el producto es de la especie de la del multiplicando, es necesario poner como tal el número incomplejo.

3ª Cuando el multiplicando es incomplejo, se aplica directamente la regla anterior, puesto que el procedimiento de multiplicaciones parciales es muy largo.

Tercer caso.—Se quiere saber cuánto valen 28 quintales de azúcar, 2 arrobas y 14 libras, sabiendo que un quintal vale 16 pesos sencillos, 5 reales y medio.

La operación se dispone así:

16 ps. 5rs. 1m.
28 qq. 2@ 14lb

Explicación.—Reduciendo el primer complejo á quebrado, según la regla de reducción, se tiene:

$\frac{267}{16}$; y reduciendo el segundo complejo á quebrado, se tiene:

$$\frac{2864}{100}$$

La operación se plantea definitivamente así:

$$\frac{267}{16} \times \frac{2864}{100}$$

Multiplicando estos quebrados entre sí, se obtiene como producto de los numeradores 764688, y como producto de los denominadores se obtiene 1600, y se escribe el quebrado producto así: $\frac{764688}{1600}$

Se simplifica este quebrado, para lo cual se dividen los dos términos por 4, y resulta $\frac{191172}{400}$

Dividiendo los dos términos de este quebrado por 4, para simplificarlo más, resulta $\frac{47793}{100}$

Dividiendo el numerador por el denominador, para sacar los enteros, puesto que es un quebrado impropio, se obtienen 477 pesos con $\frac{93}{100}$ avos de peso.

Para valuar este quebrado en reales, se multiplica el numerador por 8 reales que tiene un peso, y el producto 744 se divide por 100, que da 7 reales por cociente, y sobran $\frac{44}{100}$ avos de real, y se desprecia este quebrado.

Los 28 qq. 2@ y 14℔ valen, pues, 477 pesos, 7 reales.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar un complejo por otro complejo, se reducen ambos á quebrados; después se multiplican éstos entre sí, y se valúa el quebrado que resulte en unidades del complejo multiplicando.*

Caso especial de multiplicación.

Ejemplo. Se quiere saber cuánto valen 12 qq. de azúcar, 3 @, 20 ℔ y 10 onzas, sabiendo que una libra vale 2 reales.

Explicación 1ª—Conviene advertir que el multiplicando es el incomplejo 2 reales, puesto que se busca el total de sucres, de reales, de medios y de cuartillos, como valor del complejo.

La operación se dispone así:

2 rs.
12 qq. 3 @ 20 ℔ 10 onzas

Explicación 2ª—Como el precio 2 reales se refiere á la tercera especie del complejo, se reduce éste hasta llegar á libras, y se hace figurar esta especie como superior, y toma entonces la forma que sigue:

2 reales
1295 ℔ 10 onzas

Se reduce ahora este complejo á la última especie, que da 20730; á este producto se pone por denominador una libra reducida á onzas, así:

$$\frac{20730}{16}\times 2=\frac{41460}{16}=2591 \text{ reales, 1 cuartillo}$$

Si el precio se refiriera á la segunda especie, se reduciría entonces el complejo hasta llegar á arrobas, y hacer figurar esta especie como superior, así:

$$\frac{2 \text{ reales}}{51\ @\ 20\ \text{lb}\ 10\ \text{onzas}}$$

Si el precio se refiriera á la última especie, se reduciría el complejo á ésta, y se la haría figurar como única superior.

Si no se tuviera en cuenta este caso especial, entonces se reduciría el complejo á la última especie, y se pondría al producto por denominador una unidad de la especie superior reducida á la inferior, así:

$$\tfrac{20730}{1600}\times 2=\tfrac{41460}{1600}=25 \text{ reales con } \tfrac{1460}{1600} \text{ avos de real,}$$

lo cual es un despropósito; y el dueño del azúcar resultaría perjudicado.

División de números complejos.

Esta operación comprende cuatro casos:

1.° *Dividir un complejo por un incomplejo.*
2.° *Dividir un incomplejo por un complejo.*
3.° *Dividir dos complejos de una misma especie.*
4.° *Dividir dos complejos de distinta especie.*

Primer caso.—Sabiendo que 24 arrobas de azúcar valen 105 pesos, 7 reales y 1 medio, se quiere saber cuánto vale una arroba.

Este caso se resuelve por dos procedimientos: *Por divisiones parciales, ó reduciendo el complejo á quebrado.*

Primer procedimiento.—Para mayor claridad, la operación se dispone así:

105 ps. 7 rs. 1 m. | 24 @
4 ps. 3rs. 0 medios 1 cuatillo

Explicación.—Se divide el número 105, que representa pesos, por el número 24, que representa arrobas, y se obtienen 4 pesos por cociente, y sobran $\frac{9}{24}$ avos de peso.

Para valuar este quebrado en reales, se multiplica el numerador por 8, y al producto 72 se agregan los 7 reales del complejo, y son 79. Dividiendo este número por el mismo divisor 24, se obtienen 3 reales por cociente, y sobran $\frac{7}{24}$ avos de real.

Para valuar este quebrado en medios, se multiplica el numerador por 2, y al producto 14 se agrega el medio del complejo, y son 15. Como este número es menor que 24, no puede hacerse la división; entonces se lo multiplica por 2, para reducirlo á cuartillos, y el producto 30 se divide por el mismo divisor 24, y se obtiene 1 cuartillo por cociente, y sobran $\frac{6}{24}$ avos de cuartillo, y puede despreciarse.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir un número complejo por un incomplejo, se divide primero la especie superior por el incomplejo, y se obtiene cierto cociente. Si sobra algún residuo, se lo reduce á la especie inmediatamente inferior, se le agregan las unidades de la respectiva especie, y luego se hace la división; pero si no sobra ningún residuo, entonces se divide directamente la segunda especie inferior por el incomplejo, y así en seguida, y el cociente es de la especie de la del complejo.*

Segundo procedimiento.—Reduciendo el complejo á quebrado, según la regla de reducción, se tiene:

$$\frac{1695}{16} : 24$$

Explicación.—Multiplicando el número 105 por 8, para reducirlo á reales, se obtienen 840 reales, que, sumados con los 7 del complejo, hacen 847 reales.

Multiplicando ahora el número 847 por 2, para reducirlo á medios, se obtienen 1694, que, sumados con el medio del complejo, hacen 1695. A este número se pone por denominador una unidad de la especie superior reducida á la inferior, que son 16 medios; por último, se divide este quebrado por 24, para lo cual se multiplica el denominador por el entero, y á este producto se pone por numerador el del quebrado, así:

$$\frac{1695}{16} : 24 = \frac{1695}{384} = 4 \text{ ps. } 3 \text{ rs. } 0 \text{ medios } 1 \text{ cuartillo.}$$

Dividiendo el numerador por el denominador, se obtienen 4 pesos por cociente, y sobran $\frac{159}{384}$ avos de peso.

Para valuar este quebrado en reales, se multiplica el numerador por 8, y el producto 1272 se divide por el mismo divisor 384, y se obtienen 3 reales por cociente, y sobran $\frac{120}{384}$ avos de real.

Para valuar este quebrado en medios, se multiplica el numerador por 2, y el producto 240 se divide por el mismo divisor; pero como la división es imposible, se escribe un cero en el cociente, y se multiplica el número 240 por 2, para reducirlo á cuartillos, y se obtiene 480 por producto, el cual, dividido por 384, da 1 cuartillo por cociente, y sobran $\frac{96}{384}$ avos de cuartillo, los cuales se desprecian.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir un complejo por un incomplejo, se convierte el complejo en quebrado, y la operación queda reducida á dividir un quebrado por un entero, y luego se valúa el quebrado que resulte en unidades del complejo.*

Segundo caso.—Sabiendo que 12 varas de paño y $\frac{3}{4}$ del mismo cuestan 85 pesos sencillos, se pregunta cuánto vale una vara.

La operación se dispone así:

$$84 : 12\tfrac{3}{4}$$

Explicación.—Reduciendo el complejo divisor á quebrado, se tiene $\frac{51}{4}$; y la operación queda reducida á dividir un entero por un quebrado, así:

$$84 : \tfrac{51}{4} = \tfrac{336}{51} = \tfrac{112}{17} = 6 \text{ pesos, 4 reales, 1 medio}$$

Multiplicando el número 84 por 4, se obtiene 336 por producto, y se le pone por denominador el numerador 51.

Se dividen los términos del segundo quebrado por 3 para simplificarlo, y se obtiene el tercer quebrado. Dividiendo el numerador por el denominador, para sacar los enteros, se obtienen 6 pesos por cociente, y sobran $\frac{10}{17}$ avos de peso.

Para valuar este quebrado en reales, se multiplica el numerador por 8, y el producto 80 se divide por 17, que da 4 reales por cociente, y sobran $\frac{12}{17}$ avos de real.

Para valuar este quebrado en medios, se multiplica el numerador por 2, y el producto 24 se divide por 17, que da 1 medio por cociente, y sobran $\frac{7}{17}$ avos de medio, los cuales se desprecian.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir un número incomplejo por un complejo, se convierte el complejo divisor en quebrado, y la operación queda reducida á dividir un entero por un quebrado, y luego se valúa el quebrado que resulte en unidades del incomplejo dividendo.*

Tercer caso.—Sabiendo que con 3 libras esterlinas, 5 chelines y 2 peniques se compran 2 quintales de hierro, se pregunta cuántos quintales se comprarán con 32 libras esterlinas, 14 chelines y 10 peniques.

La operación se dispone así:

32 £ 14 ch. 10 p. : 3 £ 5 ch. 2 p.

Explicación 1ª—Reduciendo el complejo dividendo á quebrado, resulta $\frac{7858}{240}$

Reduciendo el complejo divisor á quebrado, resulta $\frac{782}{240}$

Ahora se dividen estos dos quebrados entre sí, para lo cual se divide el numerador del primero por el numerador del segundo; porque cuando dos quebrados tienen un mismo denominador, basta dividir los numeradores, así:

$$\begin{array}{r|l} 7858 & 782 \\ \hline & 10 \text{ qq. } 0 \text{ @ } 4 \text{ lb } 13 \text{ onzas } 11 \text{ adarmes} \end{array}$$

Explicación 2ª—Dividiendo el número 7858 por 782, se obtienen 10 qq. por cociente, y sobran $\frac{38}{782}$ avos de quintal.

Para valuar este quebrado en arrobas, se multiplica el numerador por 4, que da 152 por producto.

Como el número 152 no es divisible por 782, se escribe entonces un cero en el cociente, y se multiplica dicho número por 25 libras, que da 3800 por producto, y dividido por 782, se obtienen 4 lb por cociente, y sobran $\frac{672}{782}$ avos de libra.

Para valuar este quebrado en onzas, se multiplica el numerador por 16, y el producto 10752 se divide por 782, y se obtienen por cociente 13 onzas, y sobran $\frac{586}{782}$ avos de onza.

Para valuar este quebrado en adarmes, se multiplica el numerador por 16, y el producto 9376 se divide por 782, y se obtienen 11 adarmes por cociente, y sobran $\frac{774}{782}$ avos de adarme, y se desprecian éstos.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para dividir dos complejos de una misma especie, se reducen ambos á quebrados, y se dividen éstos entre sí*

CUARTO CASO.—Sabiendo que 9 arrobas, 15 libras y 9 onzas de azúcar valen 45 pesos sencillos, 6 reales y 2 cuartillos, se pregunta cuánto vale una arroba.

La operación se dispone así:

45 ps. 6 rs. 2 cuartillos : 9 @ 15 lb 9 onzas

Explicación.—Reduciendo el complejo dividendo á quebrado, resulta $\frac{1466}{32}$

Reduciendo el complejo divisor á quebrado, resulta $\frac{3849}{400}$; y dividiendo estos quebrados entre sí, para lo cual basta multiplicarlos en cruz, se tiene:

$$\frac{1466}{32} : \frac{3849}{400} = \frac{586400}{123168}$$

Dividiendo por 4 los dos términos del último quebrado, á fin de simplificarlo, se obtiene $\frac{146600}{30792}$

Dividiendo por 4 los dos términos de este quebrado, se obtiene $\frac{36650}{7698}$

Dividiendo por 2 los dos términos de este quebrado, se obtiene $\frac{18325}{3849}$

Dividiendo el numerador de este quebrado por el denominador, para sacar los enteros, se tiene:

$$18325 \div 3849 = 4 \text{ pesos, } 6 \text{ reales}$$

Al hacer la división, se obtienen 4 pesos por cociente, y sobran $\frac{2929}{3849}$ avos de peso.

Para valuar este quebrado en reales, se multiplica el numerador por 8, y el producto 23432 se divide por el mismo divisor, 3849, que da 6 reales por cociente, y sobran $\frac{338}{3849}$ avos de real, y se desprecian

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para dividir complejos de distinta especie, se reducen ambos á quebrados; en seguida se dividen estos quebrados entre sí, para lo cual basta multiplicarlos en cruz, y se valúa el quebrado que resulte en unidades del complejo dividendo.*

Reducción de libras esterlinas, chelines y peniques á sucres ó pesos fuertes.

Una libra esterlina vale 5 sucres; un chelín, 2 reales y $\frac{1}{2}$; y un penique, 2 centavos con un $\frac{1}{12}$ avo de centavo.

Explicación.—Puesto que una libra esterlina tiene 20 chelines y un chelín 12 peniques, se hacen los siguientes raciocinios:

1º Si una libra esterlina vale 5 sucres, esto es, si 20 chelines valen 50 reales, se pregunta cuánto vale un chelín.

Para esto, no hay más que dividir el número 50 por 20, y da 2 $\frac{1}{2}$ por cociente, de acuerdo con el 2º uso de la división.

2º Si un chelín vale 2 reales y $\frac{1}{2}$, esto es, si 12 peniques valen 25 centavos, se pregunta cuánto vale un penique.

Para esto, no hay más que dividir el número 25 por 12, y da por cociente 2 centavos con $\frac{1}{12}$ avo de centavo, y se desprecia este quebrado.

Ejemplo. Se quiere saber cuántos sucres valen 18 libras esterlinas, 12 chelines y 8 peniques.

Explicación. 1ª—Se multiplica el número 18 por 5 sucres que vale una libra esterlina, y el producto 90 expresa sucres. Después se duplica el número 12, que da 24, y se agrega á este duplo la mitad del mismo 12, esto es, se le agrega el número 6; y el resultado 30 expresa décimos de sucre, esto es, expresa reales; por último, se duplica el número 8, que da 16, y se agrega una unidad á este duplo, que da 17, puesto que el número 8 pasa de 6, y el resultado 17 expresa centavos.

Explicación 2ª—La razón de duplicar el número de los chelines y agregar al duplo la mitad de los mismos, se funda en que hay que multiplicar los chelines por 2 décimos y $\frac{1}{2}$ de sucre, esto es, por 2 reales y $\frac{1}{2}$; de consiguiente, se obtiene el mismo resultado por cualquiera de los dos procedimientos. Se prefiere el procedimiento de duplicar los chelines, etc., por ser más rápido.

La razón de duplicar los peniques y agregar al duplo una unidad, cuando éstos pasan de 6, se funda en que hay que multiplicar los peniques por 2 centavos y $\frac{1}{12}$ avo de centavo; de consiguiente, se obtiene el mismo resultado por cualquiera de los dos procedimientos. Se prefiere el procedimiento de duplicar los peniques, etc., por ser más rápido.

La razón de agregar una unidad al duplo de los peniques, cuando éstos pasan de 6, es con el objeto de disminuír el error que se comete al despreciar la fracción $\frac{1}{12}$ avo de centavo.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\begin{array}{rl} 18\times 5= & 90 \text{ sucres} \\ 12+12+6= & 3{,}0 \text{ sucres} \\ 8+\ 8+1= & 0{,}17 \text{ centavos} \\ \hline \text{Suma} & 93{,}17 \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir libras esterlinas, chelines y peniques á sucres ó pesos fuertes, se multiplica por 5 el número de libras, y el producto expresa sucres; después se duplica el número de chelines, y se agrega al duplo la mitad de los mismos, y el producto expresa décimos de sucre, esto es, reales; por último, se duplica el número de peniques, y se agrega al duplo una unidad, cuando éstos pasan de 6, y el producto expresa centavos.*

Escolio.—Cuando el número de peniques no pasa de 6, entonces no se agrega nada al duplo.

PROBLEMAS

1.° Un padre de familia tiene dos hijos: al primero le da 15 quintales de azúcar, 2 arrobas, 16 libras y 14 onzas, para que los venda y disponga del producto; al segundo le da 18 quintales, 1 arroba, 14 libras. Se pregunta á cuánto ascienden las cosas regaladas.

2.° Un jugador gana en una noche 25 libras esterlinas, 9 chelines y 11 peniques; y se desea saber cuántas le han sobrado, puesto que á la noche siguiente pierde 15 libras, 18 chelines y 9 peniques.

3.° ¿Cuánto importan 18 varas y $\frac{3}{4}$ de paño, sabiendo que la vara vale 4 sucres?

4.° Un quintal de anís vale 20 pesos. Cuánto valdrán 35 quintales, 3 arrobas, 9 libras y 8 onzas?

5.° ¿Cuánto valen 16 varas $\frac{3}{4}$ de zaraza, sabiendo que una vara vale 2 reales y $\frac{1}{4}$?

6.° ¿Cuánto valen 25 quintales de arroz, 3 arrobas, 17 libras y 3 onzas, á razón de que un quintal vale 18 sucres, 60 centavos?

7.° ¿Cuánto vale una arroba de azúcar, sabiendo que 12 @, 18 ℔ y 9 onzas valen 70 sucres?

8.° Sabiendo que 29 @ de cacao importan 294 sucres, 30 centavos, se desea saber cuánto importa una arroba.

9.° Si con 20 libras esterlinas, 16 chelines y 9 peniques, se compran 200 quintales de café, ¿cuántos se comprarán con 47 libras, 12 chelines y 11 peniques?

10 Sabiendo que 14 arrobas, 12 libras y 9 onzas de anís, cuestan 100 pesos, 4 reales, 1 cuartillo, se pregunta cuánto vale una arroba.

11. Redúzcanse á sucres 15 libras esterlinas, 12 chelines y 7 peniques.

LECCION DÉCIMACUARTA

Sistema Métrico decimal francés.

Como el Sistema Métrico decimal francés tiene relación directa con algunos puntos de Cosmografía, es necesario darlos á conocer, á fin de evitar cualquiera duda ú oscuridad, y poder exponer dicho Sistema lo más claro posible.

La Tierra tiene una forma casi esférica, es decir casi redonda, y está dividida por una línea imaginaria, que se llama *ecuador*, en dos partes exactamente iguales.

Estas dos partes se llaman *hemisferios:* el uno, *hemisferio del Norte;* y el otro, *hemisferio del Sur.*

Explicación 1ª—Cuando se tiene la cara vuelta á la parte por donde aparece ó se levanta el sol, sucede que la parte que queda á la mano izquierda se llama *Norte ó Setentrión;* la parte que queda á la mano derecha, *Sur ó Mediodía;* la parte que queda á la espalda, esto es, al lado por donde se oculta el sol, *Occidente, Poniente, Oeste ú Ocaso;* y la parte que queda al lado por donde sale el sol, *Oriente, Este ó Levante.*

Por tanto, toda la parte que queda al lado de la mano izquierda, cuando se tiene la cara vuelta al Oriente, se llama *hemisferio del Norte ó boreal;* y toda la parte que queda al lado de la mano derecha, se llama *hemisferio del Sur ó austral.*

Los extremos de la Tierra, partiendo de Norte á Sur, se llaman *polos*: el uno, *polo norte;* y el otro, *polo sur.*

El *ecuador* atraviesa la Tierra de Oriente á Occidente, y se llama también *línea ecuatorial ó línea equinoccial.*

Se llama *meridiano* una línea imaginaria que, pasando por ambos polos, divide la Tierra en dos partes exactamente iguales, llamadas *hemisferio oriental y hemisferio occidental.*

De consiguiente, hay tantos meridianos cuantos puedan pasar por ambos polos, y cada país tiene su meridiano.

Un meridiano, cualquiera que sea, tiene 40 millones de partes iguales.

Explicación 2ª—Si se toma una naranja, por ejemplo, y se traza una línea, de modo que pase por los extremos de aquélla, se tiene entonces un *meridiano.* La línea que parte de un extremo á otro de la naranja, y que pasa por la parte superior de ésta, es la mitad del meridiano; y la línea que parte de un extremo á otro de la naranja, y que pasa por la parte inferior de la misma naranja, es la otra mitad del meridiano.

Así, pues, cada mitad del meridiano tiene 20 millones de partes; la mitad de 20 son 10 millones, y estos 10 millones son la distancia que hay del ecuador á cualquiera de los dos polos.

Puesto que los meridianos son varios, resulta que Quito, capital de la República del Ecuador, tiene su meridiano; Bogotá, capital de Colombia, tiene su meridiano; Londres, capital de Inglaterra, tiene su meridiano; y París, capital de Francia, tiene asimismo su meridiano.

Escolio—La República del Ecuador recibe su nombre de la *línea ecuatorial,* que pasa por la falda meridional del nevado de Cayambe.

Definición de Sistema Métrico.

Se llama *Sistema Métrico,* en general, cualquier método que se adopte para medir cantidades de toda especie.

Todo Sistema Métrico, para que sea perfecto, debe llenar dos condiciones:

1ª *Que tenga una unidad para cada especie de cantidad que haya que medir.*

2ª *Que cada unidad tenga los múltiplos* (1) *y submúltiplos necesarios para medir cualquiera cantidad.*

Explicación.—Para medir una cantidad, es preciso elegir una unidad de la misma especie; por tanto, todo Sistema Métrico debe constar de tantas unidades cuantas especies de cantidades haya que medir. Así, pues, debe constar de unidades de *longitud, de superficie, de volumen, de capacidad y de peso.*

Por otra parte, como las cantidades pueden ser muy grandes ó muy pequeñas, es claro que todo Sistema Métrico debe tener los múltiplos y submúltiplos necesarios de cada unidad, para medir cualesquiera cantidades en un momento dado.

Se llama *múltiplo ó multíplice* el número que es divisible exactamente por otro.

Ejemplos. 1.º El número 24 contiene al 3 ocho veces exactas; luego 24 es el múltiplo.

2.º El número 35 contiene al 7 cinco veces exactas; luego 35 es el múltiplo.

El dividendo se llama *múltiplo ó multíplice;* y el divisor, *submúltiplo, submultíplice, factor ó parte alícuota,* siempre que la división sea exacta.

Origen del Sistema Métrico decimal francés.

Casi todos los pueblos civilizados habían adoptado las medidas de longitud, superficie, volumen, capacidad y peso, las cuales tenían íntimas relaciones entre sí, y el conjunto formaba un Sistema Métrico más ó menos completo.

El Sistema primitivo de las medidas egipcias era sencillo y lógico. La unidad de longitud era el *codo;* el cubo, construído sobre el semicodo, formaba *la unidad de volumen*; el mismo cubo, lleno de agua, *la unidad de peso*; y este peso en plata, *la unidad monetaria.*

Cuando los israelitas salieron de Egipto, conservaron en toda su pureza el Sistema Métrico egipcio, y éste pasó á los griegos, á los romanos, á los árabes y á los persas, sufriendo modificaciones sucesivas más ó menos considerables.

Los países de Europa donde se establecían los romanos, adoptaban total ó parcialmente el Sistema Métrico de éstos.

En Francia prevaleció el Sistema Romano hasta la época de Carlomagno, quien lo sustituyó con otro nuevo, tomado, en su

(1) Los múltiplos y submúltiplos equivalen, respectivamente, á los aumentativos y diminutivos de que trata la Gramática.

mayor parte, del de los árabes; pero no tardó en sufrir notables alteraciones.

De aquí provino una multitud de sistemas, que complicaban y embarazaban las transacciones comerciales. Para evitar, pues, esta variedad de sistemas, la Francia resolvió crear un Sistema Métrico, que tuviera una base fundamental como unidad de longitud; que siguiera la ley decimal, y tuviese relación directa con las dimensiones del globo terrestre.

Pero antes de pasar adelante, y para mayor claridad, vamos á hacer la siguiente exposición histórica:

En 1669, Picard había medido el arco del meridiano comprendido entre Malvoisine y Amiéns, ciudades de Francia, empleando el método de triangulación, y había encontrado que la longitud del arco era de 57.060 toesas (1).

En 1683, Domingo Cassini, y luego en 1700, Santiago Cassini, ayudado de Felipe Maraldi y de Lahire–su hijo–prolongaron la medida hasta la frontera del Norte, y la concluyeron en 1718. En 1750, Lacaille midió un arco de más de un grado en el Africa, esto es, en el Cabo (2) de Buena Esperanza. Richer había observado que un reloj astronómico, arreglado en París, retardaba en Cayena dos minutos por día, así como el péndulo simple, que señala los segundos, era más corto en Cayena (3) que en París.

Los geómetras y los astrónomos se dividieron en dos partidos: unos, juntamente con los ingleses, sostenían que la Tierra era aplanada en los polos; otros, especialmente los que contaban en Francia con la influencia de Cassini, sostenían que la Tierra era levantada en el *ecuador*.

Para decidir esta *cuasi* controversia, puesto que unos y otros sostenían la verdad, convenía medir una extensión más considerable que la de la Francia; porque sobre un arco de algunos grados, ligeros errores podían ser de gravísimo perjuicio, é impedir hallar el verdadero resultado. Por consiguiente, en 1734, la Academia de Ciencias de París acordó hacer medir un arco de meridiano cerca del *ecuador*, y otro cerca del polo norte.

En efecto, Luis XV, Rey de Francia, destinó á los académicos Luis Godin, Pedro Bouguer y Carlos Mª de Lacondamine, para que viniesen al país, que hoy se llama *República del Ecuador*, á verificar las operaciones respectivas. Para medir al mismo tiempo dos grados de meridiano en el Norte de Europa, esto es, en la Laponia, fueron destinados Maupertuis, Clairaut, Camus, Lemnnier y Outhier, y hallaron que tenía 57.422 toesas.

---

(1) La toesa era unidad francesa de longitud. Se dividía en 6 pies; el pie, en 12 pulgadas; y la pulgada, en 12 líneas.

(2) En 1486, Bartolomé Díaz, que llegó á este extremo meridional, lo llamó "Cabo de las tormentas"; y Juan II, Rey de Portugal, lo llamó para siempre "Cabo de Buena Esperanza."

(3) Es capital de la Guayana francesa. Esta y las otras Guayanas inglesa, holandesa y portuguesa se hallan situadas al Nor-Este de la América Meridional.

Los académicos salieron de Francia en Mayo de 1735, y se dirigieron á la isla Martinica, que queda en la Guayana francesa; después pasaron á Santo Domingo (1), y luego á Cartagena, (2) en donde se encontraron con los oficiales Jorge Juan y Antonio Ulloa, enviados por el Rey de España, para que asistiesen á todas las operaciones que practicaran, y las fuesen apuntando. De Cartagena siguieron la marcha á Panamá; y el 10 de Mayo de 1736 llegaron á la Bahía de Manta (3), y se separaron el 13 del mismo mes.

Bouguer se ocupó en determinar el valor de la refracción de la luz en la zona tórrida (4), para corregir la tabla de refracciones [5]. Lacondamine determinó la longitud del péndulo simple en el ecuador y en la superficie del mar.

Lacondamine llegó á Quito el 4 de Junio de 1736, pocos días antes que Bouguer; y el 10 del mismo Junio se reunieron todos para empezar los trabajos.

En 1739, Cassini de Thury y Lacaille rectificaron las medidas efectuadas en Francia por Picard, y tuvieron la satisfacción de encontrar exactos los resultados que alcanzó el último en 1669. En virtud de la comparación de los respectivos trabajos, dedujeron las siguientes dimensiones para la longitud del grado:

En el Ecuador, 56.750 toesas
En la Francia, 57.060 toesas
En la Laponia, 57.422 toesas

De aquí se coligió que la longitud del grado aumentaba del ecuador al polo.

Volvamos á los académicos franceses. En Mayo de 1740, construyeron dos pirámides en las llanuras de Puembo y Yaruquí, denominadas *Caraburo y Oyambaro*, respectivamente, para que les sirviesen de base fundamental en sus operaciones geodésicas (6). Caraburo formaba el término setentrional, y Oyambaro el meridional.

En el cerro *Pambamarca*, que se halla sobre el pueblo del

---

(1) Una de las grandes islas del "Mar de las Antillas."

(2) Capital del Departamento de Bolívar, en la República de Colombia.

(3) Queda en la costa de la provincia de Manabí.

(4) Es un espacio comprendido entre el trópico de Cáncer y el de Capricornio. La línea ecuatorial pasa por la mitad de esta zona. El trópico de Cáncer es un círculo paralelo al ecuador; y queda al Norte de éste; el de Capricornio es otro círculo paralelo al ecuador, y queda al Sur de éste.

(5) Se llama *refracción de la luz* el cambio de dirección que sufren los rayos luminosos, al pasar de un medio á otro. Cuando un rayo de luz pasa del aire, que es un medio, al agua, que es otro medio, se observa que no sigue una línea recta, sino que cambia de dirección. Lo mismo sucede cuando atraviesa una vidriera cristalina.

(6) *Geodesia* es una parte de la Geometría que trata de la medida del terreno en general.

Quinche, fijaron el vértice del primer triángulo (1). De dicho vértice tiraron una línea hasta llegar á uno de los picachos del Pichincha; de aquí tiraron otra que, pasando por encima de la torre del templo de la Merced, fué á dar en la hacienda *Sangallí*, situada en la parroquia de Píntag, formando así el segundo triángulo.

Para medir la base de Caraburo, Godin y Jorge Juan se colocaron en este llano; Bouguer, Lacondamine y Antonio Ulloa, en Oyambaro, para mayor facilidad y seguridad. La medida duró casi un mes, y obtuviéron el siguiente résultado:

Longitud de la base,
según Bouguer y Lacondamine, 6.272 toesas, 4 pies, 3 pulgadas, 3 líneas.

Según Jorge Juan, medida
por Godin, 6.272 toesas, 4 pies, 2 pulgadas, 2 líneas.

Godin y Jorge Juan llevaron la triangulación hasta Cuenca; Bouguer y Lacondamine, más adelante, esto es, hasta Tarqui, donde establecieron su observatorio para determinar la posición astronómica.

Godin regresó á Quito, y llevó la triangulación hasta el pueblo de Mira, en la provincia del Carchi, donde estableció su observatorio.

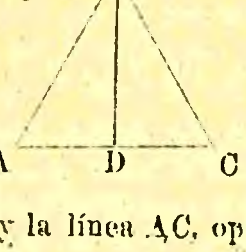
Bouguer y Lacondamine fijaron su segundo observatorio en la hacienda *Cochasquí*, contigua á Malchinguí y á Tocachi.

Comparando el resultado de las medidas geométricas con el de las observaciones astronómicas, vieron que la longitud del arco del meridiano en el ecuador era la siguiente:

Según Bouguer,	56.753	toesas al nivel del mar.
Según Lacondamine,	56.775	,, ,, ,, de Caraburo.
	y 56.750	,, ,, ,, del mar.
Según Jorge Juan,	56.767	

De esta manera quedó resuelto el gran problema que se propuso la Academia de Ciencias de París, á saber: que la Tierra era

(1) *Triángulo* es una superficie plana limitada por tres líneas rectas, que se llaman *lados*. *Altura* es la perpendicular bajada desde el vértice de uno de sus ángulos al lado opuesto, llamado *base*, según se ve en la figura que sigue:



La línea BD es la altura; y la línea AC, opuesta á la altura, es la base.

levantada en el ecuador y aplanada en los polos, según lo había asegurado Newton [Isaac].

Este celebérrimo matemático, filósofo y físico inglés, que nació el 23 de Diciembre de 1642, fué quien descubrió la gravitación universal, que es una *fuerza en virtud de la cual todos los cuerpos del universo se atraen, incesantemente, unos á otros.* Cuando dicha fuerza solicita á los cuerpos hacia el centro de la Tierra, se llama *gravedad, pesantez ó fuerza centrípeta;* cuando se ejerce entre las moléculas de los cuerpos y las une, se llama *atracción molecular*; y cuando se ejerce entre los astros, se llama *gravitación.*

Por esta ley única, que la descubrió *pensando siempre,* explicó el movimiento de los planetas al rededor del sol; el de la luna al rededor de la Tierra, como también el curso de los cometas, y el flujo y reflujo del mar. Por ella explicó igualmente que todos los cuerpos se atraen en razón directa de las masas, é inversa del cuadrado de la distancia, es decir, un cuerpo que contiene dos ó tres veces más materia que otro, está dos ó tres veces más atraído por la Tierra, ó mejor dicho, pesa dos ó tres veces más; pero un mismo cuerpo que se separara de la Tierra, mediante la *fuerza centrífuga,* pesaría cuatro ó nueve veces menos, si estuviese dos ó tres veces más distante de su centro y no de su superficie.

Fuerza centrífuga es la que tiende á separar á los cuerpos del centro de la Tierra.

El exceso de la fuerza centrípeta sobre la centrífuga hace que caigan los cuerpos.

La Tierra gira al rededor de un eje imaginario; pero en este movimiento de rotación no están animados de la misma velocidad todos los puntos de la superficie terrestre, porque no todos describen caminos iguales. Al separarse del ecuador, dichos puntos describen círculos más y más pequeños, hasta llegar á los polos. A causa del movimiento de rotación, se produce una fuerza centrífuga mucho mayor en el ecuador que en cualquiera otro punto de la superficie terrestre, la cual fuerza disminuye gradualmente del ecuador á los polos, donde desaparece por completo. Esta es la razón científica con la cual se prueba que la Tierra es levantada en el ecuador, y aplanada en los polos.

Siguiendo adelante con nuestra narración, sucedió que, á fines del siglo pasado, esto es, en 1788, fué vehemente el deseo de introducir en Francia un Sistema Métrico uniforme, que no tuviera los caprichos y complicaciones del que estaba adoptado.

Una vez que los franceses se hallaban dispuestos á aceptar todas las reformas que fuesen útiles, la Asamblea Constituyente, acogiendo la proposición de Falleyrand, expidió un decreto relativo á ordenar que el Rey suplicara, por escrito, á su Majestad Británica acordase que el Parlamento de Inglaterra concurriera con la Asamblea á fijar la *unidad natural* de las pesas y medidas, á fin de que, mediante los auspicios de las dos Naciones, los Comisionados de las Academias de Ciencias se reuniesen en el lugar más conveniente, en número igual al de los miembros escogidos por la Sociedad Real de Londres, para determinar la latitud de 45 grados, ó de cualquiera otra latitud que fuera preferible á la longitud del péndulo [1], y de este modo fijar una base invariable.

Con tal motivo, una Comisión compuesta de Borda, Lagrange, Monge, Laplace y Condorcet, designó en 1792 á Delambre y á Méchain, para que midieran el arco del meridiano comprendido entre Dunkerque, ciudad de Francia, y Barcelona, ciudad de España, que es la cuarta parte de la distancia del polo norte al *ecuador*.

En efecto, de 1792 á 1798, se ocuparon en medir dicho arco por medio de operaciones geodésicas muy delicadas; y por muerte de Méchain, las concluyeron Arago y Biot. Dividieron este arco en diez millones de partes iguales; en seguida formaron una vara de platina de la extensión de una de aquellas partes, y á dicha vara le dieron el nombre de *metro*, que quiere decir *medida*.

De esta manera es como quedó establecida la base del Sistema Métrico decimal francés.

Metro es la diezmillonésima parte que hay de la distancia del ecuador al polo norte ó al polo sur.

Se llama *Sistema Métrico decimal francés* el que tiene por base el *metro*, y sigue la ley decimal en las divisiones y subdivisiones.

Escolio.—Al decir que el *metro* sigue la ley decimal, significa que aumenta de diez en diez, ó disminuye de diez en diez.

Ventajas del Sistema Métrico decimal francés.

Cuatro son las ventajas por las cuales ha sido adoptado en la mayor parte de los países civilizados:

1ª *La base es un elemento invariable.*
2ª *Está conforme con el sistema de numeración decimal.*
3ª *Hay uniformidad en todas las divisiones y subdivisiones.*
4ª *Todas las unidades tienen relación con el metro.*

Unidades del Sistema Métrico.

Son las siguientes:
El *metro*, para medir las longitudes.

[1] *Péndulo* es cualquier cuerpo grave, pendiente de un hilo ó cadenilla, y que puede moverse libremente con vaivenes, oscilaciones ó vibraciones. Sirve para demostrar que la *gravedad* atrae á todos los cuerpos con la misma intensidad.

El *metro cuadrado*, para medir las superficies.
El *metro cúbico*, para medir los volúmenes.
El *litro*, para medir las capacidades.
El *gramo*, para medir los pesos.
El *sucre*, unidad monetaria en el Ecuador.

Formación de los múltiplos y submúltiplos del metro.

REGLA.—*Para formar los múltiplos, se escribe la palabra* METRO *á la derecha de las palabras griegas* DECA, HECTO, KILO *y* MIRIA, *que significan, respectivamente, diez, ciento, mil y diez mil. Para formar los submúltiplos, se escribe la palabra* METRO *á la derecha de las palabras latinas* DECI, CENTI *y* MILI, *que significan, respectivamente, décimo de, centésimo de, milésimo de.*

Unidades de longitud.

Se llaman *unidades de longitud* las que sirven para medir la extensión considerada como línea.

Múltiplos del metro.

El *decámetro*, que vale 10 metros.
El *hectómetro*, que vale 100 „
El *kilómetro*, que vale 1.000 „
El *miriámetro*, que vale 10.000 metros.

Submúltiplos del metro.

El *decímetro*, que es la décima parte del metro.
El *centímetro*, que es la centésima parte del metro.
El *milímetro*, que es la milésima parte del metro.
El *diezmilímetro*, que es la diezmilésima parte del metro.

Explicación 1ª—Un miriámetro tiene 10 kilómetros; un kilómetro, 10 hectómetros; un hectómetro, 10 decámetros; un decámetro, 10 metros; un metro, 10 decímetros; un decímetro, 10 centímetros; un centímetro, 10 milímetros.

Explicación 2ª—Para obtener los resultados que anteceden, se divide el número 10.000 metros que tiene un miriámetro, por 1.000 metros que tiene un kilómetro, y el cociente expresa 10 kilómetros. Dividiendo el número 1.000 metros que tiene un kilómetro, por 100 metros que tiene un hectómetro, resultan 10 hectómetros por cociente, y así en adelante.

Explicación 3ª—Los múltiplos del metro sirven para medir longitudes más ó menos considerables. Por el contrario, los submúltiplos sirven para medir longitudes relativamente pequeñas.

En el comercio y en las sastrerías, el metro está representado por cintas de tela graduadas. Los carpinteros y otros artesanos usan metros de metal ó de madera, también graduados.

Explicación 4ª—Las palabras *deca, hecto, kilo y miria* equivalen á las *decenas, centenas, millares y decenas de millar* de la unidad á que se anteponen, así como las palabras *deci, centi y mili* equivalen á las *décimas, centésimas y milésimas.*

Ejemplo 1.° El número 3 kilómetros, 6 hectómetros, 4 decámetros y 5 metros, se escribe así: 3645 metros

Ejemplo 2.° El número 6 decámetros, 3 metros, 9 decímetros y 7 centímetros, se escribe así: 63,97

Ejemplo 3.° El número 8 metros, 6 decímetros, 5 centímetros y 4 milímetros, se escribe así: 8,654

De aquí se deduce la siguiente

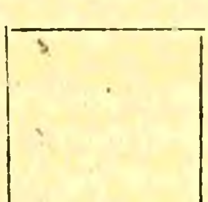
Regla.—*Para escribir un número cualquiera, se escriben los múltiplos y submúltiplos como si fuesen cantidad decimal, esto es, se escribe coma antes de los submúltiplos. En el lugar correspondiente se escriben los múltiplos y submúltiplos, y se expresa al fin la especie de unidades que representa la última cifra de la derecha.*

Unidades de superficie.

Superficie es una extensión en que sólo se consideran la longitud y la latitud, y sobre ella puede aplicarse una línea recta en todas direcciones.

Se llaman *unidades de superficie* las que sirven para medir la extensión considerada en sus dos dimensiones: *longitud y latitud.*

Cuadrado es una figura que consta de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.



Metro cuadrado es un cuadrado que tiene un metro por cada lado.

Múltiplos del metro cuadrado.

El decámetro cuadrado tiene 100 metros cuadrados.
El hectómetro cuadrado tiene 10.000 metros cuadrados.
El kilómetro cuadrado tiene 1'000.000 de metros cuadrados.
El miriámetro cuadrado tiene 100'000.000 de „ „

Submúltiplos del metro cuadrado.

El decímetro cuadrado es la centésima parte del metro cuadrado, así: $\frac{1}{100}$
El centímetro cuadrado es la diezmilésima parte del metro cuadrado, así: $\frac{1}{10000}$
El milímetro cuadrado es la millonésima parte del metro cuadrado, así: $\frac{1}{1000000}$

Explicación 1ª—Multiplicando el número 10 metros que tiene un decámetro, por sí mismo, se obtienen 100 metros cuadrados, así: $10^2 = 10 \times 10 = 100$ m. c.

Iguales operaciones se hacen para obtener los números siguientes, porque la segunda potencia ó cuadrado de un número es el producto de dicho número tomado dos veces como factor.

Explicación 2ª—Un miriámetro cuadrado tiene 100 kilómetros cuadrados; un kilómetro cuadrado, 100 hectómetros cuadrados; un hectómetro cuadrado, 100 decámetros cuadrados; un decámetro cuadrado, 100 metros cuadrados, y así en adelante.

Dividiendo el número 100'000.000 de metros cuadrados que tiene un miriámetro cuadrado, por 1'000.000 de metros cuadrados que tiene un kilómetro cuadrado, se obtienen 100 kilómetros cuadrados. Iguales operaciones se hacen para obtener los números siguientes.

El metro cuadrado es igual á 1 centiárea.
El decámetro cuadrado es igual á 1 área.
El hectómetro cuadrado es igual á 1 hectárea.
El kilómetro cuadrado es igual á 100 hectáreas.
El miriámetro cuadrado es igual á 10.000 hectáreas.

Según la extensión que se trate de medir, se aplica uno de los múltiplos ó, de los submúltiplos. Para medir, por ejemplo, un cantón, una provincia ó una República, se aplica el kilómetro ó el miriámetro, y se llaman *medidas topográficas*, por ser considerables las superficies que deben ser medidas.

Escolio 1.° El área y la hectárea se llaman *medidas agra-*

rias, porque sirven para medir los terrenos cultivados, como cañaverales, cafetales, cacaotales, &ª

Escolio 2.º Los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado son, sucesivamente, 100 veces mayores ó 100 veces menores unos que otros, ó mejor dicho, aumentan de 100 en 100, á partir de la derecha para la izquierda, porque cada unidad de superficie tiene 100 veces más extensión que la inferior inmediata, razón por la cual se escriben con dos cifras todos los números que expresan múltiplos ó submúltiplos, ó unos y otros á la vez. Si los números se expresan con una cifra, entonces se escribe un cero antes de dicha cifra, menos antes de la primera de la izquierda.

Ejemplo 1º El número 19 hectómetros cuadrados ó 19 hectáreas, 4 decámetros cuadrados ó 4 áreas, y 26 metros cuadrados, se escribe así:

190426 m. c.

El número 4 decámetros cuadrados está expresado con una sola cifra, y por esto se escribe un cero antes del 4.

Ejemplo 2º El número 6 hectómetros cuadrados ó 6 hectáreas, 18 decámetros cuadrados ó 18 áreas, y 3 centiáreas, se escribe así: 61803

Se escribe cero antes del 3, porque este número está expresado con una sola cifra.

Ejemplo 3º El número 6 metros cuadrados ó 6 centiáreas, 32 decímetros cuadrados y 45 centímetros cuadrados, se escribe así: 6,3245

Ejemplo 4º El número 3 decímetros cuadrados se escribe así: 0,03

Se escribe un cero antes del 3, porque este número está expresado con una sola cifra. El cero que está antes de la coma, ocupa el lugar de los metros cuadrados.

Ejemplo 5º El número 7 centímeros cuadrados se escribe así: 0,0007

En el lugar de los decímetros cuadrados se escriben dos ceros, y otro antes del 7, porque este número está expresado con una sola cifra.

Ejemplo 6º El número 5 decímetros cuadrados y 8 centí metros cuadrados, se escribe así: 0,0508

Medidas de agua.

Las unidades para medir las aguas que corren son el buey, el molino, el riego y la paja.

Buey de agua es la cantidad que pasa por el orificio de una vara cuadrada.

Molino de agua es la cantidad que pasa por el orificio de un pie cuadrado.

Riego de agua es la cantidad que pasa por el orificio de seis pulgadas cuadradas.

Paja de agua es la cantidad que pasa por el orificio de una pulgada cuadrada.

Un buey de agua tiene 9 molinos; un molino, 4 riegos; y un riego, 36 pajas.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para escribir un número cualquiera, se escriben con dos cifras los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado, ó se escriben dos ceros en el lugar respectivo, si no hay cifras significativas; y cuando la cifra es una sola, se escribe un cero antes de ésta. Por último, se escribe coma después de los metros cuadrados, y se expresa al fin la especie de unidades que representan las dos últimas cifras de la derecha.*

Escolio. Los decímetros cuadrados expresan centésimas partes del metro cuadrado; los centímetros cuadrados, diezmilésimas partes del metro cuadrado; y los milímetros cuadrados, millonésimas partes de idem.

Unidades de volumen.

Unidades de volumen son las que sirven para medir la extensión considerada en sus tres dimensiones: *longitud, latitud y profundidad.*

Cubo es un cuerpo sólido que tiene la forma de un *dado,* y consta de seis caras cuadradas é iguales.

Metro cúbico es un cubo que tiene un metro por cada lado.

El metro cúbico puede representarse por medio de un cajón que tenga un metro de profundidad, uno de largo y otro de ancho.

Múltiplos del metro cúbico.

El decámetro cúbico tiene 1.000 metros cúbicos.
El hectómetro cúbico tiene 1'000.000 de metros cúbicos.

El kilómetro cúbico tiene 1.000'000.000 de metros cúbicos.
El miriámetro cúbico tiene 1^{2}000.000'000.000 de „ „

Submúltiplos del metro cúbico.

El decímetro cúbico es la milésima parte del metro cúbico, y se escribe así: $\frac{1}{1000}$

El centímetro cúbico es la millonésima parte del metro cúbico, y se escribe así: $\frac{1}{1000000}$

El milímetro cúbico es la milmillonésima parte del metro cúbico, y se escribe así: $\frac{1}{1000000000}$

Explicación 1ª Multiplicando tres veces por sí mismo el número 10 metros, que tiene un decámetro, se obtiene el producto 1.000 metros cúbicos, así: $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1.000$
Iguales operaciones se hacen para obtener los números siguientes, porque la tercera potencia ó cubo de un número es el producto de dicho número tomado tres veces como factor.

Explicación 2ª—Un miriámetro cúbico tiene 1.000 hectómetros cúbicos; un hectómetro cúbico, 1.000 decámetros cúbicos; un decámetro cúbico, 1.000 metros cúbicos; un metro cúbico, 1.000 decímetros cúbicos, &ª

Explicación 3ª—Dividiendo el número 1^{2}000.000'000.000 de metros cúbicos que tiene un miriámetro cúbico, por 1.000'000.000 de metros cúbicos que tiene un kilómetro cúbico, se obtienen 1.000 kilómetros cúbicos. Iguales operaciones se hacen con los números que siguen.

Explicación 4ª—Los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico son, sucesivamente, 1.000 veces mayores ó menores unos que otros, ó mejor dicho, aumentan de 1.000 en 1.000, á partir de la derecha para la izquierda; por esta razón, se escriben con tres cifras todos los números que expresan múltiplos ó submúltiplos, ó unos y otros á la vez. Si los números se expresan con una sola cifra, entonces se escriben dos ceros antes de dicha cifra; si se expresan con dos cifras, entonces se escribe un cero antes de ellas, menos antes de la primera ó dos primeras de la izquierda.

Ejemplo 1.º 26 hectómetros, 2 decámetros y 124 metros se escriben así: 26002124 metros cúbicos.
Se escriben dos ceros antes de los 2 decámetros, porque este número está expresado con una sola cifra.

Ejemplo 2.º El número 7 hectómetros, 16 decámetros y 135 metros cúbicos se escribe así: 7016135

Ejemplo 3.° El número 38 kilómetros y 236 decámetros cúbicos se escribe así: 38,000236

En el lugar de los hectómetros se escriben tres ceros, porque no hay cifras significativas.

Ejemplo 4.° 2 metros cúbicos y 4 decímetros cúbicos se escriben así: 2,004

Se escriben dos ceros antes del 4, porque este número está expresado con una sola cifra.

Ejemplo 5.° El número 36 metros cúbicos y 46 decímetros cúbicos se escribe así: 36,046

Ejemplo 6.° El número 8 metros cúbicos y 431 centímetros cúbicos se escribe así: 8,000431

En el lugar de los decímetros se escriben tres ceros, porque no hay cifras significativas.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para escribir un número cualquiera, se escriben con tres cifras los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico, ó bien se escriben uno, dos ó tres ceros en los lugares correspondientes, si no hay cifra ó cifras significativas. Por último, se escribe coma después de los metros cúbicos, y se expresa al fin la especie de unidades que representan las tres últimas cifras de la derecha.*

Escolio 1.° Los decímetros cúbicos expresan milésimas partes del metro cúbico; los centímetros cúbicos expresan millonésimas partes; y los milímetros cúbicos, milmillonésimas partes.

Escolio 2.° Los múltiplos del metro cúbico se emplean rara vez, porque ni es posible formarlos. En cuanto á los submúltiplos, se aplica uno de éstos, según el volumen que se trate de medir.

Respecto de los múltiplos, otra vez, pueden tomarse por unidad el miriámetro, el kilómetro y el decámetro cúbicos, cuando se quiere expresar volúmenes de grande extensión, como el del sol, el de la Tierra, el de las aguas del mar, el de una montaña, etc.

Unidades de capacidad.

Unidades de capacidad son las que sirven para medir los líquidos, como el agua, la leche, el vino, el aguardiente, etc.; pero la medida usual es el litro, y también la botella.

Litro es la capacidad de un decímetro cúbico, esto es, de un cubo hueco que tenga un decímetro por cada lado interior.

(Los múltiplos y submúltiplos llevan el acento ortológico en la sílaba *li*).

Múltiplos del litro.

El decalitro tiene 10 litros.
El hectolitro tiene 100 litros.
El kilolitro tiene 1.000 litros.
El mirialitro tiene 10.000 litros.

Submúltiplos del litro.

El decilitro es la décima parte del litro, así: $\frac{1}{10}$
El centilitro es la centésima parte del litro, así: $\frac{1}{100}$
El mililitro es la milésima parte del litro, así: $\frac{1}{1000}$

Los múltiplos de uso constante son el decalitro y el hectolitro. Respecto de los submúltiplos, el decilitro y el centilitro.

Según la capacidad que se trate de medir, se usa el litro, ó uno de los múltiplos ó submúltiplos. Como la forma cúbica nó es á propósito para los usos del comercio, se suele dar al litro la forma de un cilindro, sin que disminuya la capacidad, y se hacen de hoja de lata ó de estaño, de porcelana ó vidrio, según el uso que tenga.

Cuando el litro sirve para medir granos y materias secas, tiene la forma de un cilindro de madera, cuya profundidad ó altura es igual al diámetro de la base, y se construyen de nogal, de encina ó de otra materia adecuada.

Para mejor comodidad en la práctica, se construyen cilindros de cobre ó de hierro batido. Unos pesan 20, 10, 5 y 2 litros; otros pesan 1 litro, 5 decilitros, 2 decilitros, 1 decilitro, 5 centilitros, 2 centilitros, 1 centilitro. Todas estas medidas tienen marcado el número correspondiente.

Ejemplo 1.° El número 42 hectolitros y 6 decalitros se escribe así: 426

Ejemplo 2.° El número 6 decalitros, 4 litros, 3 decilitros y 1 centilitro, se escribe así: 64,31

Ejemplo 3.° El número 3 kilolitros, 5 litros y 2 decilitros se escribe así: 3005,2

Se escribe un cero en el lugar de los hectolitros, y otro en el de los decalitros, puesto que no se han dictado cifras significativas.

Ejemplo 4.° El número 7 decalitros y 3 centilitros se escribe así: 70,03

Se escribe un cero en el lugar de los litros, y otro en el de los decilitros.

Ejemplo 5.° El número 103 litros y 4 mililitros se escribe así: 103,004

Se escriben dos ceros en los lugares de los decilitros y centilitros, respectivamente.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para escribir un número cualquiera, se escriben con una sola cifra los múltiplos y submúltiplos del litro, esto es, como si fuesen cantidad decimal, y además, se escribe coma antes de los submúltiplos. Cuando no se dictan cifras significativas, se escriben ceros en los lugares respectivos, y se expresa al fin la especie de unidades que representa la última cifra de la derecha.*

Unidades de peso.

Unidades de peso son las que sirven para pesar las cosas por medio de una balanza ó de otro instrumento equivalente.

(Los múltiplos y submúltiplos del gramo llevan el acento ortológico en la sílaba *gra*).

Múltiplos del gramo.

El decagramo tiene 10 gramos.
El hectogramo tiene 100 gramos.
El kilogramo tiene 1.000 gramos.
El miriagramo tiene 10.000 gramos.
El quintal métrico tiene 100.000 gramos ó 100 kilogramos.
La tonelada métrica tiene 10 quintales métricos ó 1.000 kilogramos.

Submúltiplos del gramo.

El decigramo es la décima parte del gramo.
El centigramo es la centésima parte del gramo.
El miligramo es la milésima parte del gramo.

El *gramo* es el peso en el vacío (y al nivel del mar), de un centímetro cúbico de agua destilada, á la temperatura de cuatro grados centígrados sobre cero.

Explicación.—Se ha elegido el agua, por ser el líquido que más fácilmente puede conseguirse puro, y por ser el que se halla más esparcido sobre la tierra. Se dice *agua destilada*, con el fin de quitarle toda clase de sustancias, para que el peso sea invariable.

Se toma el peso en el *vacío*, porque el agua pierde en el aire una parte de su peso, según el estado de presión ó de humedad de la atmósfera. Se dice *al nivel del mar*, porque el peso de un mismo volumen de agua disminuye á medida que aumenta la altura del lugar. Se fija la temperatura de *cuatro grados sobre cero*, porque dicha temperatura es el máximum de densidad.

La densidad del agua aumenta, á medida que la temperatura sigue bajando, hasta pasar del límite de cuatro grados.

Temperatura es el grado de mayor ó menor calor sensible de los cuerpos.

Explicación.—Si la cantidad de calor aumenta ó disminuye, se dice que sube ó baja la temperatura, á partir de un término medio comparativo, establecido en la escala del termómetro.

Termómetro es un instrumento que sirve para medir la temperatura.

El más usual es el termómetro de mercurio.

Explicación.—Se compone de un tubo capilar de vidrio, ensanchado en la parte inferior, á modo de pequeño depósito, y contiene mercurio, el cual, dilatándose ó contrayéndose por el aumento ó disminución del calor, señala los grados de temperatura en una escala puesta al lado del tubo, y dividida en 100 partes iguales, que se llaman *grados*. Estos están comprendidos entre dos puntos: el uno, que es *cero*, se halla en la parte inferior del tubo; y el otro, que es 100, en la parte superior. Por esta razón, la escala se llama *centígrada*. Las divisiones se prolongan por debajo del punto *cero*, y por encima del punto *ciento*.

La *atmósfera* es una capa de aire que rodea á la Tierra, y gira con ésta al rededor del sol.

El *aire* es una mezcla de dos gases: *ázoe y oxígeno*.

En la atmósfera hay, además, vapor de agua, y unas 3 ó 6 diezmilésimas de ácido carbónico.

El aire es diáfano y transparente; pero á grandes distancias, toma el *hermoso color azul* que vémos.

Volviendo á las unidades de peso, decimos que, según las cosas que deban pesarse, se aplica uno de los múltiplos ó de los submúltiplos.

Para pesar mercancías, por ejemplo, se usan pesas de hierro colado y de forma cilíndrica. Todas estas medidas tienen marcado el número correspondiente sobre la pesa.

Ejemplo 1.° El número 6 kilogramos, 2 hectogramos, 5 decagramos y 3 gramos se escribe así: 6253

22

Ejemplo 2.° El número 48 kilogramos y 3 decagramos se escribe así: 48,03

Se escribe coma después del 8, porque se considera el kilogramo como unidad de peso; y se escribe cero antes del 3, para que ocupe el lugar de los hectogramos, que no se han dictado.

Ejemplo 3.° El número 6 gramos, 3 decigramos y 5 centigramos se escribe así: 6,35

Ejemplo 4.° El número 7 gramos y 2 centigramos se escribe así: 7,02

Se escribe cero antes del 2, para que ocupe el lugar de los decigramos que no se han dictado.

Ejemplo 5.° El número 45 kilogramos y 3 decagramos se escribe así: 45,03

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para escribir un número cualquiera, se escriben con una sola cifra los múltiplos y submúltiplos del gramo, esto es, como si fuesen cantidad decimal, y además, se escribe coma antes de los submúltiplos. Cuando no se dictan cifras significativas, se escriben ceros en los lugares respectivos, y se expresa al fin la especie de unidades que representa la última cifra de la derecha.*

Escolio 1.° Un miriagramo tiene 10 kilogramos; un kilogramo, 10 hectogramos; un hectogramo, 10 decagramos; un decagramo, 10 gramos; un gramo, 10 decigramos; un decigramo, 10 centigramos; y un centigramo, 10 miligramos.

Escolio 2.° Puesto que un gramo es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada, claro está que 1.000 centímetros cúbicos, que hacen un decímetro cúbico, esto es, un litro, pesan 1.000 gramos ó un kilogramo.

Ahora bien, si un litro pesa 1.000 gramos, claro está que 10 litros pesarán 10.000 gramos, ó 10 kilogramos.

Equivalencia de litros á gramos.

Un litro de aguardiente, ó de cualquier cuerpo líquido, y que es igual á un decímetro cúbico de agua, pesa 1 kilogramo.

Un decalitro, que es igual á 10 decímetros cúbicos, pesa 10 kilogramos.

Un hectolitro, que es igual á 100 decímetros cúbicos, pesa 100 kilogramos.

Un kilolitro, que es igual á 1.000 decímetros cúbicos, pesa 1.000 kilogramos.

Un decilitro, que es igual á 100 centímetros cúbicos, pesa 100 gramos.

Un centilitro, que es igual á 10 centímetros cúbicos, pesa 10 gramos.

Un mililitro, que es igual á 1 centímetro cúbico, pesa 1 gramo.

La libra métrica pesa 500 gramos.

Reducción de libras métricas á kilos.

Ejemplo. ¿Cuántos kilos pesan 64 libras de hierro?

Explicación.—El número 64 se multiplica por 500 gramos que pesa una libra; el producto 32.000 gramos se divide por 1.000 que tiene un kilogramo, y el cociente 32 expresa kilos ó kilogramos.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$64 \times 500 = 32000 : 1000 = 32 \text{ kilos ó kilogramos}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir libras métricas á kilos, se multiplica el número de libras por* 500 *gramos que pesa una libra; el producto se divide por* 1.000 *gramos que tiene un kilogramo, según el* 5º *uso de la división, y el cociente expresa kilos ó kilogramos.*

Escolio. Si el número se compone de toneladas, quintales y arrobas, se reduce este complejo á libras, y luego se aplica la regla anterior.

Reducción de kilos á libras métricas.

Ejemplo. ¿A cuántas libras equivalen 85.000 gramos?

Explicación.—El número 85.000 se divide por 500 gramos que pesa una libra, y el cociente 170 expresa libras, en las cuales hay 6 @ 20 ℔

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$85.000 : 500 = 170 \text{ libras} = 6 \text{ @ } 20 \text{ ℔}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir kilos á libras métricas, se divide el número de gramos por* 500 *gramos que pesa una libra, y el cociente expresa libras.*

Escolio. Si el número se compone de miriagramos, kilogramos, hectogramos y decagramos, se reduce este complejo á gramos, y luego se aplica la regla anterior.

La libra española pesa 460 gramos.

Reducción de libras españolas á kilos.

Ejemplo. ¿Cuántos gramos pesan 350 libras?

Explicación.—Se multiplica el número 350 por 460; el producto 161.000 se divide por 1.000 gramos que tiene un kilogramo, y el cociente 161 expresa kilos.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir libras españolas á kilos, se multiplica el número de libras por* 460, *y el producto se divide por* 1000.

Reducción de kilos á libras españolas.

Ejemplo. ¿A cuántas libras equivalen 161.000 gramos?

Explicación.—Se divide el número 161.000 por 460, y el cociente 350 expresa libras.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir kilos á libras, se divide el número de gramos por* 460, *y el cociente expresa libras.*

Unidades Monetarias.

Unidades monetarias son las que sirven para valuar el precio de las cosas.

Antes de exponer el *Sistema Monetario*, vamos á dar las definiciones de algunos metales, cuyo conocimiento está íntimamente relacionado con dicho Sistema.

El *oro* es un metal precioso, amarillo y brillante; el más pesado después del platino.

La *plata* es un metal blanco, sonoro y dúctil; el más precioso después del oro y del platino.

El *platino* es un metal de color de plomo, aunque menos brillante, pero más pesado que el oro y la plata.

El *cobre* es un metal de color rojo y brillante; más duro que el oro y la plata, á los cuales comunica consistencia en las aleaciones.

El *níkel* es un metal blanco, cuando está puro, y entra en algunas aleaciones.

El *estaño* es un metal más duro y brillante que el plomo, y de color semejante al de la plata.

El *plomo* es un metal pesado, blando, fusible y de color gris.

Alcación ó ligación es la combinación de metales fundidos.

En el Ecuador.

La unidad de moneda de plata es el *sucre*, que vale 10 décimos ó 100 centavos.

Los submúltiplos son las piezas que siguen: el medio sucre, que vale 5 décimos ó 50 centavos; los 2 décimos, 20 centavos; el décimo, 10 centavos; y el medio décimo, 5 centavos.

Escolio No hay moneda de oro.

Monedas de vellón.

Las monedas de cobre son las que se llaman *monedas de vellón*.

Explicación.—El medio décimo de níkel vale 5 centavos. Hay, además, centavos y medios centavos de níkel, como también de cobre puro ó aleado.

El sucre, que contiene 900 milésimos de plata y 100 de cobre, pesa 25 gramos; el medio sucre, 12 gramos y 5 decigramos; los 2 décimos, 5 gramos; el décimo, 2 gramos y 5 decigramos; el medio décimo, 1 gramo y 25 centigramos.

Escolio. Todas estas piezas contienen también 900 milésimos de plata y 100 de cobre.

Exposición de la ley que ordena la acuñación de moneda nacional.

Tanto porque los intereses del comercio y de la industria exigían la regularización del Sistema Monetario, base obligada de los cambios, cuanto por evitar abusos perjudiciales en extremo á la riqueza pública, la Convención Nacional de 1884 expidió un decreto el 1º de Abril, sobre emisión y acuñación de moneda nacional.

El 28 de Mayo de 1884, un Decreto Ejecutivo determinó el diámetro, el sello y la forma que debía tener la *moneda sucre*. El 13 de Enero de 1885, otro Decreto Ejecutivo declaró vigente el de la Convención Nacional.

En el anverso lleva dicha moneda el busto del General *Antonio José de Sucre*; y en el reverso, el escudo de armas de la República.

En Venezuela.

La unidad de moneda de plata es el *bolívar*, que vale 20 centavos, y pesa 5 gramos.

Las otras piezas son las siguientes: la de 2 bolívares, que vale 40 centavos; la de 2 ½ bolívares, que vale 50 centavos; la de 5 bolívares, que vale 100 centavos. También hay piezas de 10 y de 5 centavos.

La unidad de moneda de *oro* es la pieza de 20 bolívares.

Las otras piezas son las siguientes: la de 25 bolívares y la de 100 bolívares. Tanto las piezas de plata como las de oro llevan el busto del *Libertador*.

Escolio. En Venezuela circula el oro de todo el mundo.

En Francia.

La unidad de moneda de plata es el *franco*, que vale 20 centavos. El franco se divide en 10 décimos; y el décimo, en 10 céntimos. El franco pesa cinco gramos; contiene 9 partes de plata y 1 de cobre.

Las otras piezas son las siguientes: la de 5 francos, que vale 1 fuerte; la de 2 francos, que vale 40 centavos; la de 50 céntimos y la de 20 céntimos.

Las piezas de oro son las siguientes: la de 100 francos, la de 50 id., la de 20 id., la de 10 id. y la de 5 francos.

Escolio. En Bélgica, en Suiza y en Italia circulan las mismas monedas que en Francia, en virtud de un tratado que, con esta Nación, celebraron aquéllas el 23 de Diciembre de 1865; pero en Italia, el franco se llama *lira*.

En Inglaterra.

La unidad de moneda de plata es la *corona*, que vale 1 fuerte, y se divide en 5 chelines. La otra pieza es el *florín*, que se divide en 2 chelines; y el chelín, en 12 peniques.

La unidad de moneda de oro es la *libra esterlina*, que se divide en 20 chelines; y el chelín, en 12 peniques. La *guinea* es otra pieza que se divide en 21 chelines.

La libra esterlina vale 5 *fuertes* intrínsecamente; el chelín, 25 centavos; y el penique, 2 centavos con $\frac{1}{12}$. La libra esterlina se llama también *soberano*. Los chelines son de plata, y los peniques de cobre.

En España.

La unidad de moneda de plata es el *duro*, que vale 20 reales de vellón.

Las otras piezas son: el medio duro, que vale 10 reales de vellón; la peseta, que vale 4 reales de id.; la media peseta, que vale 2 reales de id.; el real, que se divide en 34 maravedís, maravedises ó maravedíes.

La unidad de moneda de oro es el *doblón*, que vale 100 reales de vellón, ó sean 5 duros.

En Alemania.

La unidad de moneda de plata es el *marco* de 20 peniques; y el *marco* de 100 peniques.

Un marco vale intrínsecamente 25 centavos.
Un marco vale 1 franco y 25 céntimos.
Un marco vale 1 chelín, y éste 25 centavos.
Veinte marcos valen 1 libra esterlina.
Cuatro marcos hacen un peso fuerte.

Las piezas de níkel son dos: el marco de 10 peniques y el marco de 5 peniques.

Las piezas de cobre son las de 5 peniques para abajo.

Las piezas de *oro* son cuatro: la de 5 marcos, la de 10 marcos, la de 20 marcos y la de 100 marcos.

En los Estados Unidos de América.

La unidad de moneda de plata es el *dollar*, que vale 10 décimos ó dimes, ó sean 100 centavos. Las otras piezas son: el medio dollar, que vale 50 centavos; y el dime, que vale 10 centavos.

La unidad de moneda de oro es el *águila*, que vale 20 dollars. Las otras piezas son: la doble águila, la media águila, el cuarto de águila, el dollar y el doble dollar. Una águila vale 20 *fuertes*.

SUPLEMENTO.

El Sistema Métrico decimal francés, no obstante haber sido adoptado por la ley de 5 de Diciembre de 1856, no ha sustituído completamente al sistema antiguo. Por esta razón, vamos á exponer las principales unidades inglesas y españolas.

La yarda es unidad inglesa de longitud, y equivale á 91 centímetros. Se divide en 3 pies; y el pie, en 12 pulgadas. El pole ó perche consta de 5 yardas y media; y el furlong, de 220 yardas.

La vara de Castilla ó de Burgos es unidad de longitud, y se usa todavía en el comercio. Se divide en 4 cuartas; la cuarta, en 9 pulgadas; la pulgada, en 12 líneas; y la línea, en 12 puntos. También se divide en 3 tercias, 3 pies ó 5 quintos. Equivale á 8 decímetros y 359 diezmilímetros, ó sean 84 centímetros, para lo cual se agrega un centímetro al número 3, y se desprecian las cifras 5 y 9.

La legua métrica equivale á 5 kilómetros ó 5000 metros.

Así la estima el Sr. Dr. Francisco Andrade Marín, según consta en su "Itinerario de la República" que dió á luz el 10 de Agosto de 1893, y que está adoptado por el Gobierno. Haciendo las respectivas operaciones, resulta que dicha legua equivale á 62 ½ cuadras; la cuadra, á 100 varas; y la vara, á 8 decímetros.

Explicación.—Multiplicando el número 5.000 por 10 decímetros que tiene un metro, resultan 50.000 decímetros. Dividiendo éstos por 8 decímetros en que ha sido apreciada la vara, se obtienen 6250 varas. Dividiendo éstas por 100 varas que tiene una cuadra, resultan 62 cuadras, y sobran 50 varas que hacen media cuadra.

La legua española, que es medida itineraria, se compone de 100 cuadras, y la cuadra de 100 varas.

La legua colombiana tenía 60 cuadras, según lo dispuesto por la ley que expidió el Congreso de Cúcuta, el 2 de Octubre de 1821. Se dividía en 3 millas; y la milla, en 2.000 varas.

La legua terrestre de 25 al grado tiene 4444 metros.

Explicación.—Para obtener este resultado, se divide el número 40'000.000 de metros, que tiene el arco del meridiano comprendido entre el ecuador y el polo norte ó el polo sur, por 360 grados que tiene toda circunferencia; el cociente 111.111 se divide por el número 25, y resulta el número 4444.

La legua marítima de 20 al grado tiene 5.555 metros.

Para obtener este resultado, se divide el número 111.111 por el número 15.

Los agrimensores se sirven, para la mensura de las tierras, de las unidades llamadas *caballerías*, las cuales son aún de uso constante.

La caballería se compone de 16 cuadras cuadradas; una cuadra, de 4 solares; y un solar, de 2.500 varas cuadradas.

La tonelada, que es medida de capacidad ó volumen, pesa 20 quintales de agua; y un lastre, 2 toneladas

Pesas usadas en las boticas.

La libra se divide en 12 onzas; la onza, en 8 dracmas; y la dracma, en 4 gramos. La onza pesa 30 gramos, más ó menos.

Pesas para el oro.

La libra se divide en 2 marcos; el marco, en 50 castellanos;

el castellano, en 8 tomines; y el tomín, en 12 granos en peso de metal. El medio tomín tiene 6 granos.

La onza de oro tiene 6 castellanos y 2 tomines.

El oro puro tiene de 22 á 24 quilates; el quilate pesa 4 granos.

Escolio 1.° Las unidades de peso para el oro, según nos han enseñado los plateros, son cuadrados de metal muy pequeños, y cada uno tiene inscrito el respectivo número del peso. Cada cuadrado de metal, que pesa un grano, equivale al peso de 2 granos de trigo, más ó menos.

Escolio 2.° Cuando se dice que un diamante, por ejemplo, tiene 2 quilates, se entiende que pesa $\frac{2}{5}$ de gramo. Cuando se dice: éste es oro de 22 quilates, por ejemplo, se ha de comprender que contiene 22 partes de oro puro y 2 de cobre. Según se ve, el quilate significa *peso* para las perlas y algunas piedras preciosas, como el diamante, la esmeralda y el rubí; pero para el oro, significa *calidad*.

Pesas para la plata.

La libra se divide en 2 marcos; el marco, en 8 onzas; la onza, en 4 cuartas ú 8 ochavas; la ochava, en 2 adarmes; el adarme, en 3 tomines; y el tomín, en 12 granos.

Escolio. Las unidades de medida para la plata son de metal; tienen forma cónica, y cada una lleva inscrito el número correspondiente.

Pesas para los áridos ó granos.

La fanega se divide en 2 medias; la media, en 2 cuartillas; y la cuartilla, en 2 almudes.

Para vender ó comprar vino, aguardiente y cerveza, se usa la botella de 83 á 85 centilitros, como unidad de medida.

Varias unidades

Una resma de papel de imprenta tiene 20 manos; y una mano, 25 pliegos.

Una resma de papel común tiene 80 cuadernillos; y un cuadernillo, 5 pliegos. La mano de papel de imprenta es un conjunto de 25 pliegos.

Una gruesa de pañuelos, por ejemplo, tiene 12 docenas; una gruesa mayor ó gran gruesa, 12 gruesas.

Reducción de varas españolas á metros longitudinales, y viceversa.

El metro tiene 100 centímetros; luego la relación de la vara española al metro es de 84 á 100, así: $\frac{84}{100}$

Simplificando este quebrado, según los caracteres de divisibilidad, queda reducido á $\frac{21}{25}$.

Ejemplo. ¿A cuántos metros equivalen 64 varas?

Explicación.—Multiplicando el número 64 por 21, resultan 1344 centímetros, los cuales, divididos por 25, hacen 53 metros y 76 centímetros.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$64 \times 21 = 1344 : 25 = 53{,}76$$

Viceversa. ¿A cuántas varas españolas equivalen 53 metros y 76 centímetros?

Explicación.—Multiplicando el número 53,76 por 25, resultan 134.400 diezmilímetros, esto es, 1.344 centímetros, los cuales, divididos por 21, hacen 64 varas.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$53{,}76 \times 25 = 134.400 : 21 = 64$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir varas españolas á metros longitudinales, se multiplica por* 21 *el número de varas; el producto se divide por* 25, *y el cociente indica metros. Viceversa, para reducir metros á varas españolas, se multiplica por* 25 *el número de metros; el producto se divide por* 21, *y el cociente indica varas.*

Reducción de varas de 8 decímetros á metros longitudinales, y viceversa.

Ejemplo. ¿A cuántos metros equivalen 68 varas?

Explicación.—Se multiplica el número 68 por 8 decímetros que tiene la vara de la legua métrica; el producto se divide por 10 decímetros que tiene el metro, y resultan 54 metros y 4 decímetros, así:

$$68 \times 8 = 544 : 10 = 54{,}4$$

Viceversa. ¿A cuántas varas de 8 decímetros equivalen 54 metros y 4 decímetros?

Explicación.—Multiplicando 54 por 10 decímetros que tiene el metro, y agregando al producto los 4 decímetros, resultan 544 decímetros. Dividiendo éstos por 8 decímetros que tiene la vara, resultan 68 varas, así:

$$54 \times 10 = 540 + 4 = 544 : 8 = 68 \text{ varas}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir varas de 8 decímetros á metros longitudinales, se multiplica por 8 el número de varas, y el producto se divide por 10 decímetros que tiene el metro. Viceversa, para reducir metros longitudinales á varas de 8 decímetros, se multiplica por 10 el número de metros, y el producto se divide por 8 decímetros que tiene la vara.*

Escolio 1º En Colombia se usa actualmente la legua de 62 cuadras y ½, esto es, la legua de 5 kilómetros ó sean 5.000 metros, la misma que se usa en el Ecuador.

Escolio 2º Una vez que la vara española, empleada hasta hoy en el comercio, equivale á 84 centímetros, claro está que sólo le faltan 16 centímetros para 100, que hacen un metro. En las transacciones mercantiles sucede que algunos comerciantes, al reducir metros á varas en la operación de venta, cargan al número de metros un 18 por 100, ó un 19 por 100, ó un 19 y ½ por 100, ó un 20 por 100, es decir, por cada 100 centímetros cargan 18, ó 19, ó 19 y ½, ó 20 centímetros al número de metros que venden. Esta operación injusta é ilegal, por no decir *este robo*, perjudica sobre manera al pobre comprador, puesto que debe cargarse el 16 por 100 á los metros vendidos, esto es, tan sólo los 16 centímetros que faltan á los 84 centímetros que tiene la vara, para completar 100. El 18 por 100 es el mínimum, y el 20 por 100 es el máximum, según la ley bárbara establecida por los comerciantes *sin conciencia*. En la reducción de metros á yardas, cargan el 9, y hasta el 10 por 100; en la de yardas á varas, cargan el 8 por 100.

Reducción de metros cuadrados á varas cuadradas de 8 decímetros.

Cuadrando los 8 decímetros, resultan 64 decímetros, así:

$$8^2 = 8 \times 8 = 64 \text{ decímetros cuadrados}$$

Cuadrando los 10 decímetros que tiene el metro, resultan 100 decímetros, así:

$$10^2 = 10 \times 10 = 100 \text{ decímetros cuadrados}$$

Ejemplo. ¿A cuántas varas cuadradas equivalen 320 metros cuadrados?

Explicación.—Multiplicando 320 por 100 decímetros cuadrados que tiene el metro cuadrado, resultan 32.000 decímetros cuadrados. Dividiendo éstos por 64 decímetros cuadrados que tiene la vara cuadrada, resultan 500 varas cuadradas.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir metros cuadrados á varas cuadradas, se multiplica por* 100 *el número de metros; el producto se divide por* 64, *y el cociente expresa varas cuadradas.*

Reducción de varas cuadradas de 8 decímetros á metros cuadrados.

Ejemplo. ¿A cuántos metros cuadrados equivalen 500 varas cuadradas?

Explicación.—Multiplicando el número 500 por 64 decímetros cuadrados que tiene la vara cuadrada, resultan 32.000 decímetros cuadrados. Dividiendo éstos por 100 decímetros cuadrados que tiene el metro cuadrado, resultan 320 metros cuadrados.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir varas cuadradas á metros cuadrados, se multiplica por* 64 *el número de varas; el producto se divide por* 100, *y el cociente expresa metros cuadrados.*

Reducción de yardas á metros, y viceversa.

Ejemplo. ¿Cuántos metros hacen 50 yardas?

Explicación.—Multiplicando el número 50 por 91 centímetros que tiene la yarda, resultan 4.550 centímetros, los cuales, divididos por 100 centímetros que tiene el metro, hacen en definitiva 45 metros y 50 centímetros, así:

$$50 \times 91 = 4550 : 100 = 45 \text{ metros y } 50 \text{ centímetros}$$

Viceversa. ¿A cuántas yardas equivalen 45 metros y 50 centímetros?

Explicación.—Multiplicando el número 45 por 100 centímetros que tiene el metro, resultan 4.500 centímetros. Agregando á éstos el número 50, resultan en definitiva 4.550, los cuales, divididos por 91 centímetros que tiene la yarda, dan por cociente 50 yardas, así:

$$45 \times 100 = 4.500 + 50 = 4.550 : 91 = 50 \text{ yardas}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir yardas á metros, se multiplica el número de yardas por* 91; *el producto se divide por* 100, *y el cociente expresa metros. Viceversa, para reducir metros á yardas, se multiplica el número de metros por* 100; *el producto se divide por* 91, *y el cociente expresa yardas.*

Reducción de yardas á varas, y viceversa.

Ejemplo. ¿A cuántas varas equivalen 60 yardas?

Explicación.—Multiplicando el número 60 por 91 centímetros, resultan 5.460 centímetros, los cuales, divididos por 84 centímetros que tiene la vara, hacen en definitiva 65 varas, así:

$60 \times 91 = 5.460 : 84 = 65$ varas

Viceversa. ¿A cuántas yardas equivalen 65 varas?

Explicación.—Multiplicando el número 65 por 84 centímetros que tiene la vara, resultan 5.460 centímetros, los cuales, divididos por 91 centímetros que tiene la yarda, dan por cociente 60 yardas, así:

$65 \times 84 = 5.460 : 91 = 60$ yardas

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir yardas á varas, se multiplica el número de yardas por* 91; *el producto se divide por* 84, *y el cociente expresa varas. Viceversa, para reducir varas á yardas, se multiplica el número de varas por* 84; *el producto se divide por* 91, *y el cociente expresa varas.*

Advertencia.—Prescindimos del cambio en las siguientes reducciones de monedas, porque es muy útil y conveniente ejercitarnos en las reducciones á la par. En la lección 19 ponemos un Suplemento, que trata de la reducción de monedas con inclusión del cambio.

Reducción de sucres á pesos sencillos, y viceversa.

Ejemplo. ¿Cuántos pesos sencillos hacen 240 sucres?

Explicación.—Multiplicando el número 240 por 10 décimos que vale el sucre, resultan 2.400 décimos, los cuales, divididos por 8 décimos que vale un peso sencillo, hacen en definitiva 300 pesos sencillos, así:

$240 \times 10 = 2.400 : 8 = 300$

Viceversa. ¿Cuántos sucres hacen 300 pesos sencillos?

Explicación.—Multiplicando el número 300 por 8 décimos que vale el peso sencillo, resultan 2400 décimos, los cuales, divididos por 10 décimos que vale el sucre, hacen en definitiva 240 sucres, así:

$300 \times 8 = 2400 : 10 = 240$ sucres

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir sucres á pesos sencillos, se multiplica el número de sucres por 10; el producto se divide por 8, y el cociente expresa pesos sencillos. Viceversa, para reducir pesos sencillos á sucres, se multiplica el número de pesos por 8; el producto se divide por 10, y el cociente expresa sucres.*

Reducción de sucres á francos, y viceversa.

Ejemplo. ¿Cuántos francos hacen 648 sucres?

Explicación.—Multiplicando el número 648 por 5 francos que vale un sucre, resultan 3240 francos, así: $648 \times 5 = 3240$

Viceversa. ¿Cuántos sucres hacen 3240 francos?

Explicación.—Dividiendo el número 3240 por 5 francos que vale el sucre, resultan 648 sucres.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir sucres á francos, se multiplica el número de sucres por 5, y el producto expresa francos. Viceversa, para reducir francos á sucres, se divide el número de francos por 5, y el cociente expresa sucres.*

Reducción de sucres á libras esterlinas, y viceversa.

Ejemplo. ¿Cuántas libras esterlinas compraremos con 1710 sucres?

Explicación.—Dividiendo el número 1710 por 5 sucres que vale la libra esterlina, resultan 342 libras.

Viceversa. ¿Cuántos sucres pagaremos por 342 libras esterlinas?

Explicación.—Multiplicando el número 342 por 5 sucres que vale la libra esterlina, resultan 1710 sucres.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir sucres á libras esterlinas, se divide el número de sucres por 5, y el cociente expresa libras esterlinas. Viceversa, para reducir libras esterlinas á sucres, se multiplica el número de libras por 5, y el producto expresa sucres.*

Reducción de sucres á pesetas españolas.

Ejemplo. ¿A cuántas pesetas equivalen 3'200.000 sucres?

Explicación.—Multiplicando el número 3'200.000 por 10 reales que vale el sucre, resultan 32'000.000 de reales. Dividiendo éstos por 4 reales que vale la peseta española, resultan 8'000.000 de pesetas.

Si se quiere reducir á *duros*, se divide el número 32'000.000 de reales por 20 reales que vale el duro, y resultan 1'600.000 duros.

Si se quiere reducir á *doblones*, se divide el número 32'000.000 de reales por 100 reales que vale el doblón, y se obtienen 320.000 doblones.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir sucres á pesetas españolas, se multiplica el número de sucres por* 10 *reales que vale el sucre; el producto se divide por* 4 *reales que vale la peseta, y el cociente indica pesetas, ó se divide el número de reales por* 20 *reales que vale el duro, y el cociente expresa duros, ó bien se divide el número de reales por* 100 *reales que vale el doblón, y el cociente expresa doblones.*

Reducción de pesetas españolas á sucres.

Ejemplo. ¿A cuántos sucres equivalen 8'000.000 de pesetas españolas?

Explicación.—Multiplicando el número 8'000.000 por 4 reales que vale la peseta, resultan 32'000.000 de reales. Dividiendo éstos por 10 reales que vale el sucre, resultan 3'200.000 sucres.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir pesetas españolas á sucres, se multiplica el número de pesetas por* 4 *reales que vale la peseta; el producto se divide por* 10 *reales que vale el sucre, y el cociente expresa sucres.*

Escolio. Si son duros, se multiplica el número de éstos por 20, y el producto se divide por 10; si son doblones, se multiplica el número de éstos por 100, y el producto se divide por 10.

Reducción de sucres á marcos.

Ejemplo. ¿A cuántos marcos equivalen 5375 sucres?

Explicación.—Multiplicando 5375 por 100 centavos que tiene el sucre, resultan 537.500 centavos. Dividiendo éstos por 25 centavos que vale el marco, se obtienen 21.500 marcos.

Viceversa. ¿A cuántos sucres equivalen 21.500 marcos?

Explicación.—Multiplicando 21.500 por 25 centavos que vále el marco, se obtienen 537.500 centavos. Dividiendo éstos por 100 centavos que tiene el sucre, resultan 5.375 sucres.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir sucres á marcos, se multiplica el número de sucres por* 100 *centavos que tiene el sucre; el producto se divide por* 25 *centavos que vale el marco, y el cociente expresa marcos. Viceversa, para reducir marcos á sucres, se multiplica el número de marcos por* 25 *centavos que vale el marco; el producto se divide por* 100 *centavos que tiene el sucre, y el cociente expresa sucres.*

Reducción de sucres á oro americano, esto es, á águilas americanas, y viceversa.

Ejemplo. ¿Cuántas águilas americanas comprará un comerciante con 1.260 sucres?

Explicación.—Dividiendo el número 1260 por 20 sucres ó fuertes que vale una águila, resultan 63 águilas.

Viceversa. ¿Cuánta cantidad daremos en moneda de ley por 63 águilas?

Explicación.—Multiplicando el número 63 por 20 sucres que vale una águila, resultan 1.260 sucres.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir sucres á águilas americanas, se divide el número de sucres por* 20 *sucres que vale una águila, y el cociente expresa águilas. Viceversa, para reducir águilas americanas á sucres, se multiplica el número de águilas por* 20 *sucres que vale una águila, y el producto expresa sucres.*

Escolio 1.° Un dollar vale un fuerte ó un sucre, que es lo mismo.

Escolio 2.° El oro sellado en Norte-América, aunque se lo lleve de otras partes en polvo, pero con el fin de sellarlo allí, es el que se conoce con el nombre de *oro americano.*

PROBLEMAS

1.° Escríbase el número 6 metros cuadrados y 7 milímetros cuadrados.

2.° Léase el número 20 m.^{2},00530012.

3.° Escríbase el número 23 metros cúbicos, 4 centímetros cúbicos y 8 diezmilímetros cúbicos.

4.° Léase el número 9m.³,007000016008.

5.° Escríbase el número 14 hectáreas, 6 áreas y 15 centímetros cuadrados.

6.° Escríbase el número 32 litros, 5 centilitros y 6 mililitros.

7.° Escríbase el número 5 kilolitros, 3 litros y 2 centilitros.

8.° Escríbase el número 27 kilogramos y 22 gramos.

9.° Escríbase el número 8 kilogramos, 4 decagramos y 7 miligramos

10 Una pieza de "tela ecuatoriana" tiene 264 varas. Cuántos metros hacen?

11 ¿Qué número de varas habrá en una pieza de lienzo "Pichincha", que se compone de 221 metros y 76 centímetros?

12 ¿Cuántos metros cuadrados tendrá una sementera de maíz, cuya superficie es de 128 varas cuadradas, de 8 decímetros la vara?

13 Una plazuela de mercado tiene 90 metros cuadrados, 31 decímetros cuadrados y 68 centímetros cuadrados. ¿A cuántas varas cuadradas de 8 decímetros equivalen?

14 Una pieza de grano de oro consta de 82 yardas. Cuántos metros tiene dicha pieza?

15 Se desea saber cuántas yardas tendrá una pieza de "género de familia", que mide 74 metros y 62 centímetros.

16 ¿Cuántas varas hacen 264 yardas que tienen 6 piezas de casinete "Cuba"?

17 En 4 piezas de merino hay 268 varas. Cuántas yardas hacen?

18 Un individuo compra una casa por 260 sucres. Cuánto debe pagar en pesos sencillos?

19 Un recaudador del tres por mil entrega al Colector de Quito la cantidad de 4.075 pesos sencillos. Por cuánto en moneda de ley debe darle recibo el Colector?

20 ¿Qué número de francos recibirá en París un viajero que compra una letra en Guayaquil por 3.800 sucres á la par?

21 ¿Cuántos sucres debe recibir en el Banco Comercial y Agrícola una persona que viene de Francia, y trae una letra que vale 19.000 francos?

22 Un Ministro de Inglaterra, que ha residido algún tiempo en Quito, regresa á su país. En el "Banco del Ecuador" compra á la par una letra por 12.960 sucres. ¿Cuántas libras esterlinas debe entregarle uno de los bancos de Londres á su llegada?

23 Un comerciante compra una letra en el "Banco Comercial" por 16.840 sucres sobre la plaza de Nueva York. ¿Cuántas águilas americanas debe recibir en dicha plaza, en el supuesto de que la compra de la letra es á la par?

Modo de encontrar los días comprendidos entre dos fechas de un mismo año, ó de años diferentes.

Siempre que se forma una cuenta corriente con intereses, ó se hace un descuento ó una liquidación, es necesario averiguar el número de días comprendidos entre dos fechas; pero ante todo, vamos á dar las definiciones de algunos puntos de Cosmografía, por considerarlas indispensables para la mejor inteligencia de lo que pretendemos enseñar

Se llama *año* el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta al rededor del sol.

Se llama *mes* el tiempo que tarda la luna en dar una vuelta al rededor de la Tierra.

Se llama *día* el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta sobre sí misma, esto es, al rededor de una línea imaginaria, que se llama *eje*, y se considera que éste pasa por el centro de la Tierra.

Explicación.—Del movimiento de la Tierra sobre su eje, llamado movimiento de *rotación ó diurno*, y que se verifica de Occidente á Oriente, resultan los días y las noches. En el *ecuador*, la duración del día, y la de la noche, es siempre de 12 horas; en los polos hay un día de *seis meses*, y una noche de *otros seis meses*.

Durante los seis meses que está alumbrado el polo norte, por ejemplo, el polo sur está en tinieblas, y viceversa.

Año bisiesto es el que consta de 366 días; *año civil ó común*, el de 365; *año sideral*, el de 365 días, 5 horas, 48 minutos y 49 segundos; *año comercial*, el de 360 días; y, *mes comercial*, el de 30 días.

El sabio sacerdote polaco, Nicolás Copérnico, que nació en 1473, fué quien descubrió que el sol ocupa el centro de nuestro sistema planetario; que todos los planetas giran al rededor del sol; que la Tierra ejecuta dos movimientos, uno al rededor del sol, llamado *movimiento de traslación ó revolución;* y otro al rededor de sí misma, llamado *movimiento de rotación.*

Se llama *órbita de la Tierra* la línea curva que describe al rededor del sol, y emplea 365 días y 6 horas.

Explicación.—De estas 6 horas resulta cada cuatro años un nuevo día, el cual se agrega á los 28 que tiene el mes de Febrero, y resultan 29 días, y se obtiene un año bisiesto. Al completarse el nuevo día, la Tierra se halla precisamente en el punto donde se considera que principia á recorrer su órbita.

Para saber si un año es bisiesto, se divide el respectivo número por 4. Si es exactamente divisible, el año es bisiesto; en caso contrario, el año no es bisiesto.

Ejemplo. El año 1884 fué bisiesto, lo mismo que 1888 y 1892. En el año 1893, la Tierra tardó 365 días y 6 horas en dar una vuelta al rededor del sol; en el año 1894, tardó otras 6 horas, á más de los 365; en 1895, otras 6 horas; y en el año de 1896, tardó otras 6 horas, á más de los 365 días.

Sumando 4 veces el número 6, se obtienen 24 horas, que hacen un día, el cual se agrega á los 365, y resulta un año de 366 días; luego el año de 1896 fué bisiesto.

Escolio. El último año de cada siglo no es bisiesto.

En las naciones cristianas, el año civil comienza el 1º de Enero, en virtud de un edicto que, en 1563, expidió Carlos IX, relativo á ordenar que se fijase el 1º de Enero, como principio del año.

Se llama *Calendario* la descripción del año civil, determinado por el movimiento aparente del sol, y dividido en meses, semanas y días. Decimos *movimiento aparente*, porque no es el sol el que se mueve de Oriente á Occidente, según nos enseña el sentido de la vista, sino la Tierra la que se mueve de Occidente á Oriente; pero no sentimos dicho movimiento, á causa de ser vertiginosa la velocidad.

Según el calendario antiguo de los romanos, el primero de los meses era *Marzo*, consagrado á Marte, dios de la guerra.

El segundo era *Abril*, llamado así, porque en el clima de Italia parece entonces abrirse la naturaleza, para dar á luz los nuevos frutos de la tierra.

El tercero era *Mayo*, del nombre de Maya, madre de Mercurio; y éste, dios á la vez de los comerciantes, viajeros y pastores.

El cuarto era *Junio*, consagrado á Juno, esposa de Júpiter y reina del cielo.

El quinto era *Julio*, dedicado á Julio César, conquistador de las Galias, y reformador del Calendario.

El sexto era *Agosto*, en honor de Augusto, primer Emperador romano.

El séptimo era *Septiembre*; el octavo, *Octubre*; el noveno, *Noviembre*; el décimo, *Diciembre*, cuyos nombres se derivan de los números siete, ocho, nueve y diez, respectivamente.

El undécimo era *Enero*, en honor del dios Jano.

El duodécimo era *Febrero*, en recuerdo de los sacrificios dedicados á las almas de los difuntos, esto es, en honor de *Februa*, diosa de las purificaciones.

Este orden se alteró muy pronto, y se fijó el 1º de Enero como principio del año civil, según el edicto de Carlos IX.

En cuanto al número de días, era el mismo de ahora, ó mejor dicho, el período semanal es institución de los hebreos. Los romanos dieron á los días los nombres de los siete astros que contaban en el número de sus divinidades, que eran las mismas de los griegos, á saber: el Sol, la Luna, Marte, Mercurio, Júpiter, Venus y Saturno.

Así, el primer día es el *domingo*; antes se llamaba día del sol; hoy está consagrado al Señor y á su culto.

El segundo es el *lunes*, dedicado á la luna, satélite de la Tierra.

El tercero es el *martes*, consagrado á Marte. Como planeta, es de color rojizo.

El cuarto es el *miércoles*, en honor de Mercurio.

El quinto es el *jueves*, consagrado á Júpiter, padre y soberano de los dioses y de los hombres en la religión de los griegos y de los romanos. Como planeta, es el más grande de todos; su luz es *de oro*, y le acompañan cuatro satélites.

El sexto es el *viernes*, consagrado á Venus, diosa de la hermosura. Como planeta, es de intenso resplandor, y es el lucero principal de la mañana y de la tarde.

El séptimo es el *sábado*, llamado antes día de Saturno. Como planeta, está rodeado de dos anillos, y le acompañan ocho satélites.

Una vez dadas estas definiciones, entramos á enseñar el modo de contar los días comprendidos entre dos fechas, por medio de los respectivos ejemplos; pero advertimos que el año adoptado en el comercio es el de 360 días; y el mes comercial, el de 30 días.

Ejemplo 1º ¿Cuántos días hay desde el 24 de Abril hasta el 6 de Diciembre de 1894? 222

Explicación.—Del mes de Abril, que es el 4º en el orden natural, al de Diciembre, que es el 12º, van 8 meses, es decir, $12-4=8$ Multiplicando por 30 el número 8, se obtienen 240 días.

El número 18, que resulta de restar la fecha menor 6 de la mayor 24, se resta de 240, así:

$$24-6=18 \qquad 240-18=222 \text{ (días buscados)}$$

Comprobación.—Se apuntan los 6 días que faltan para terminar el mes de Abril; después se cuentan los meses siguientes, diciendo Mayo, Junio, Julio, Agosto, Setiembre, Octubre y Noviembre, que hacen 7; luego se multiplica este 7 por 30 días que tiene el mes comercial, y se obtienen 210 días por producto; en seguida se apuntan los 6 de Diciembre; y por último, se suman dichos días, de este modo:

$$6+210+6=222 \text{ (días buscados)}$$

Ejemplo 2º ¿Cuántos días hay desde el 8 de Mayo hasta el 28 de Octubre de 1895? 170

Explicación.—Del mes de Mayo, que es el 5º, al de Octubre, que es el 10º, van 5 meses, es decir, 10—5=5 Multiplicando por 30 este número 5, se obtienen 150 días. El número 20, que resulta de restar la fecha menor 8 de la mayor 28, se suma con 150, así:

$$150+20=170 \text{ (días buscados)}$$

Comprobación.—Se apuntan los 22 días que faltan para terminar el mes de Mayo; después se cuentan los meses siguientes, diciendo Junio, Julio, Agosto y Septiembre, que hacen 4, y se obtienen 120 días por producto; en seguida se apuntan los 28 de Octubre; y por último, se suman dichos días entre sí, de esta manera:

$$22+120+28=170 \text{ (días buscados)}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para contar los días comprendidos entre dos meses de un mismo año, y cuando la primera fecha es mayor, se resta el número que indica el primer mes del que indica el segundo; la diferencia expresa meses, los cuales se reducen á días, multiplicándolos por 30, y del producto se resta la diferencia de las fechas; pero si la primera de éstas es menor, entonces se suma el producto de los días con la diferencia de las fechas.*

Ejemplo 3º ¿Cuántos días hay desde el 5 de Junio hasta el 5 de Septiembre de 1895? 90

Explicación.—Del mes de Junio, que es el 6º, al de Septiembre, que es el 9º, van 3 meses, es decir, 9—6=3 Multiplicando por 30 el número 3, se obtienen 90 días. Restando las fechas, resulta cero por diferencia, y no hay nada que restar de 90, ni tampoco que agregarle.

Comprobación.—Se apuntan los 25 días que faltan para terminar el mes de Junio; después se cuentan los meses siguientes, diciendo Julio y Agosto, que hacen 2; luego se multiplica por 30 el número 2, y se obtienen 60 días por producto; en seguida se apuntan los 5 días de Septiembre, y por último, se suman dichos días, de este modo:

$$25+60+5=90 \text{ (días buscados)}$$

Ejemplo 4º ¿Cuántos días hay desde el 14 de Marzo de 1894 hasta el 6 de Junio de 1895? 442

Explicación.—Del mes de Marzo, que es el 3º, al de Diciembre, que es el último, ó 12º del año 1894, van 9 meses, es decir, 12—3=9. Multiplicando por 30 el número 9, se obtienen 270 días. Restando la fecha 14 de Marzo de la fecha 30 del mismo Marzo, resultan 16 días que, sumados con 270, hacen 286.

Ahora, del mes de Enero de 1895, que es el 1º de este año, al de Junio, que es el 6º del mismo año, van 5 meses, es decir, 6—1=5 Multiplicando por 30 el número 5, se obtienen 150 días que, con los 6 de Junio, hacen 156. Sumando éstos con 286, se obtienen en definitiva 442 días.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para contar los días comprendidos entre dos meses de dos años distintos, se cuentan desde la primera fecha hasta el último día de Diciembre; en seguida se cuentan desde el 1º de Enero hasta la segunda fecha, y se suman los días entre sí.*

Ejemplo 5º ¿Cuántos días hay desde el 10 de Febrero de 1894 hasta el 15 de Julio de 1896? 875

Explicación.—Del mes de Febrero, que es el 2º del año 1894, al de Diciembre, que es el último ó 12º del mismo año, van 10 meses, es decir, 12—2=10 Multiplicando por 30 el número 10, se obtienen 300 días. Restando la fecha 10 de Febrero de la fecha 30 del mismo Febrero, una vez que, para el comercio, todo mes tiene 30 días, resultan 20 que, sumados con los 300, son 320. A éstos se agregan los 360 del año 1895 y hacen 680.

Ahora, del mes de Enero, que es el 1º del año 1896, al de Julio, que es el 7º del mismo año, van 6 meses, es decir, 7—1=6 Multiplicando por 30 el número 6, se obtienen 180 días que, con los 15 de Julio, son 195. Sumando éstos con 680, se obtienen en definitiva 875 días.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para contar los días comprendidos entre dos meses de varios años, se cuentan desde la primera fecha hasta el último día de Diciembre; al resultado se agregan los 360 días de cada uno de los años siguientes; por último, se cuentan desde el 1º de Enero hasta la segunda fecha, y los días que resultan se agregan á los anteriores.*

PROBLEMAS

1º A un padre de familia le nació un hijo el 25 de Abril de 1896, y dicho padre murió el 10 de Julio del propio año. ¿A los cuantos días quedó huérfano el niño?

2º ¿Cuántos días transcurrieron desde el 24 de Mayo de

1894, aniversario de la batalla de Pichincha, hasta el 14 de Agosto de 1895?

3º ¿Cuántos días duró la Jefatura Suprema, asumida en Guayaquil el 19 de Junio de 1895, y terminada el 9 de Octubre de 1896?

4º ¿Cuál es el número de días comprendidos entre el 7 de Febrero de 1894 y el 11 de Diciembre de 1896?

LECCION DÉCIMAQUINTA

De las razones.

Se llama *razón ó relación* el resultado de comparar dos cantidades de una misma especie.

La comparación se hace de dos modos: *por sustracción y por división.*

Se hace por sustracción, cuando se averigua con cuánto una cantidad es mayor que otra, y él resultado se llama *razón por diferencia.* Se hace por división, cuando se averigua cuántas veces cabe una cantidad en otra; y el resultado se llama *razón por cociente.*

De las razones por diferencia.

Ejemplo. Se quiere saber con cuántas unidades la cantidad 24 es mayor que la cantidad 8. La operación se ejecuta así: $24-8=16$, ó también, $24.8=16$ Se lee: 24 es á 8. El *signo menos* ó el punto se traduce por el verbo *es.*

Explicación 1ª El número 24 se llama *antecedente;* el 8, *consecuente*; y el 16 es la *razón.*

Como se ve, la razón por diferencia no es sino una *simple resta*, en que el antecedente es el minuendo, el consecuente es el sustraendo, y la razón es la diferencia. El antecedente y el consecuente juntos se llaman *términos de la razón.*

Explicación 2ª—La razón por diferencia se indica de dos maneras: ó separando con el *signo menos* el antecedente del consecuente, ó también por medio de un punto.

De las razones por cociente.

Ejemplo. ¿Cuántas veces cabe la cantidad 12 en la cantidad 60?

La operación se ejecuta así:

60 : 12=5, ó también $\frac{60}{12}$=5; y se lee: 60 es á 12

Explicación 1ª—Los dos puntos ó la línea horizontal se traducen por el verbo *es.*

El número 60 se llama *antecedente*; el 12, *consecuente*; y el 5 es la *razón.*

Como se ve, la razón por cociente no es sino una *simple división*, en que el antecedente es el *dividendo*, el consecuente es el *divisor*, y la razón es el *cociente.* El antecedente y el consecuente juntos se llaman *términos de la razón.*

Explicación 2ª—La razón por cociente se indica de dos maneras: ó separando con *dos puntos* el antecedente del consecuente, ó *escribiendo el antecedente encima de una línea horizontal, y debajo de ésta el consecuente.*

De las equidiferencias.

Cuando dos razones por diferencia son iguales, los términos de ambas forman lo que se llama una *equidiferencia*, y se define así:

Se llama *equidiferencia* la igualdad de dos razones.

Ejemplo. 16.9=12.5, y se lee: 16 es á 9 como 12 es á 5

Explicación 1ª El punto de cada razón se traduce por el verbo *es*; y el signo igual, por el adverbio de comparación *como.*

Los números 16 y 9 son los términos de la primera razón; los números 12 y 5, los de la segunda. Haciendo las restas indicadas, se ve que las razones son iguales, así:

$$\left.\begin{array}{l}16.9=7\\12.5=7\end{array}\right\}\ \text{De donde: } 7=7$$

Explicación 2ª Una equidiferencia se escribe de tres modos:

1º 16.9=12.5, y se lee: 16 es á 9 como 12 es á 5

2º 16—9=12—5, y se lee de igual manera.

3º 16.9 : 12.5, y se lee lo mismo.

Los términos 16 y 5 se llaman *extremos*; y los términos 9 y 12 se llaman *medios.*

División de las equidiferencias.

La equidiferencia es *continua y discontinua.*

Es *continua*, cuando los términos medios son iguales; y *dis-*

continua, cuando los términos medios son desiguales.

Ejemplo de equidiferencia continua.

$$14-8=8-2$$

En la equidiferencia continua, el término repetido se llama *medio diferencial*.

Ejemplo de equidiferencia discontinua.

$$16-9=12-5$$

Teorema 1.° En toda equidiferencia continua, la suma de los extremos es igual al duplo del término medio.

Ejemplo. $14-8=8-2$ De donde: $14+2=16$

Demostración.—Agregando la cantidad $8+2$ á los dos miembros de la igualdad, se tiene:

$$14-8+8+2=8-2+8+2$$

Las cantidades menos 8 y más 8 del primer miembro se destruyen, por ser de signos contrarios, lo mismo que las cantidades menos 2 y más 2 del segundo miembro, y quedan:

$$14+2=8+8, \text{ esto es, } 14+2=16$$

Teorema 2.° En toda equidiferencia discontinua, la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

Sea la misma equidiferencia $16-9=12-5$

Sumando primero los extremos, y después los medios, se tiene:

$$16+5=9+12, \text{ esto es, } 21=21$$

Demostración.—Agregando la cantidad $9+5$ á los dos miembros de la igualdad, se tiene:

$$16-9+9+5=12-5+9+5$$

Las cantidades menos 9 y más 9 se destruyen en el primer miembro, por ser de signos contrarios, lo mismo que las cantidades menos 5 y más 5 del segundo miembro, y quedan:

$$16+5=12+9, \text{ esto es, } 21=21$$

De aquí se deducen dos corolarios:

1.° *Con dos sumas iguales se puede formar una equidife-*

rencia, para lo cual se ponen por extremos los sumandos de la una, y por medios los de la otra.

Ejemplo. $16+4=12+8$

Explicación.—Poniendo por extremos los sumandos del primer miembro, y por medios los del segundo, se tiene:

$$16-12=8-4$$

Según este mismo corolario, se tiene:

$16+4=12+8$, esto es, $20=20$

2.° *Cuando dos equidiferencias tienen una razón común; con las razones no comunes se puede formar una equidiferencia:*

Ejemplo.

$$\left.\begin{array}{l} a-b=c-d \\ m-n=c-d \end{array}\right\} a-b=m-n$$

Este corolario está fundado en el axioma que dice: *Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.*

De las proporciones.

Cuando son iguales dos razones por cociente, los términos de ambas forman lo que se llama una *proporción*, la cual se difine así:

Se llama *proporción* la igualdad de dos razones por cociente.

Ejemplo. $9 : 6 :: 12 : 8$, y se lee: 9 es á 6 como 12 es á 8

Los dos puntos de cada razón se traducen por el verbo *es*; y los cuatro puntos por el adverbio *como*.

Escolio. Las razones de la proporción provienen de la *división.*

Una proporción se escribe de tres maneras:

1.ª $9 : 6 :: 12 : 8$ 2.ª $9 : 6 = 12 : 8$ 3.ª $\frac{9}{6}=\frac{12}{8}$

La tercera manera de escribir una proporción es la que debe usarse con preferencia, porque es la que está á la orden del día.

Explicación.—Los términos 9 y 6 forman la primera razón; y dividiendo el mayor por el menor, se obtiene 1 y $\frac{1}{2}$ por cociente. Los términos 12 y 8 forman la segunda razón; y dividiendo el mayor por el menor, se obtiene 1 y $\frac{1}{2}$ por cociente; luego las razones, que son los cocientes, son iguales, así: $1\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$

Los términos 9 y 6 se llaman, respectivamente, *antecedente y consecuente* de la primera razón; los términos 12 y 8 se llaman, respectivamente, *antecedente y consecuente* de la segunda razón.

Los términos 9 y 8 se llaman *extremos*; y los términos 6 y 12 se llaman *medios*.

División de las proporciones.

Las proporciones se dividen en *continuas y discontinuas*.

La proporción es *continua*, cuando los términos medios son iguales; es *discontinua*, cuando los términos medios son desiguales.

Ejemplo de proporción continua $16:8=8:4$

Escolio. En la proporción continua, el medio repetido se llama *medio proporcional*.

Ejemplo de proporción discontinua $12:3=8:2$, ó mejor, $\frac{12}{3}=\frac{8}{2}$.

Teorema 1º En toda proporción continua, el producto de los extremos es igual al cuadrado del término medio.

Ejemplo. $\frac{16}{8}=\frac{8}{4}$ De donde: $16\times4=8^2$

Demostración.—Reduciendo los dos quebrados que forman la proporción á un común denominador, según el escolio de la regla de reducir varios quebrados á un común denominador, se tiene:

$$\frac{16\times4}{8\times4}=\frac{8^2}{8\times4}$$

Ahora, como los denominadores son iguales, es claro que lo son también los numeradores, es decir, que el producto de los extremos es igual al cuadrado del término medio, así: $16\times4=8^2$, que era lo que se trataba de demostrar.

Teorema 2º—En toda proporción discontinua, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Ejemplo. $\frac{12}{3}=\frac{8}{2}$ De donde: $24=24$

Demostración.—Reduciendo los dos quebrados que forman la proporción á un común denominador, se tiene:

$$\frac{12\times2}{3\times2}=\frac{3\times8}{3\times2}$$

Ahora, como los denominadores son iguales, es claro que lo son también los numeradores, es decir, que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, así: $12\times2=3\times8$, ó sea $24=24$, que es lo que se trataba de demostrar.

De la demostración de este teorema se deducen dos corolarios:

1.º *Con dos productos iguales se puede formar proporción; para lo cual, se ponen por extremos los factores del un producto, y por medios los factores del otro producto.*

Ejemplo. $12\times6=9\times8$

Poniendo por extremos los factores que forman el primer miembro, y por medios los factores que forman el segundo miembro, se tiene: $\frac{12}{9}=\frac{8}{6}$

2.º *Cuando dos proporciones tienen una razón común, con las razones no comunes se puede formar proporción.*

Ejemplo. $\left.\begin{array}{l} a : b=c : d \\ m : n=c : d \end{array}\right\}$ De donde $a : b=m : n$

Este corolario está fundado en el mismo axioma en que se funda el corolario 2º de las equidiferencias.

Problema de proporción continua. Encontrar un término cualquiera, cuando se conocen los otros tres.

Ejemplo. $\frac{x}{8}=\frac{8}{4}$ De donde: $x=\frac{8^2}{4}=\frac{8\times8}{4}=\frac{64}{4}=16$

El término buscado es el extremo 16; y puesto en la proporción en lugar de x, resulta: $\frac{16}{8}=\frac{8}{4}$, esto es, $64=64$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para encontrar un extremo cualquiera de una proporción continua, se multiplican los medios, y el producto se divide por el extremo conocido.*

Escolio. Si el término desconocido es un medio, se multiplican entonces los extremos, y el producto se divide por el medio conocido.

Ejemplo. $\frac{16}{8}=\frac{x}{4}$ De donde: $x=\frac{16\times4}{8}=\frac{64}{8}=8$

El medio que se busca es 8; y puesto en la proporción en lugar de x, resulta $\frac{16}{8}=\frac{8}{4}$

Problema de proporción discontinua. Encontrar un término cualquiera, cuando se conocen los otros tres.

Ejemplo. $\frac{x}{8}=\frac{3}{2}$

Explicación.—Como el término desconocido es un extremo, se multiplican los medios, y el producto se divide por el extremo conocido, así:

$$x=\frac{8\times 3}{2}=\frac{24}{2}=12$$

El extremo que se busca es 12; y puesto en la proporción en lugar de x, resulta $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para encontrar un extremo cualquiera de una proporción discontinua, se multiplican los medios, y el producto se divide por el extremo conocido.*

Escolio. Si el término desconocido es un medio, se multiplican entonces los extremos, y el producto se divide por el medio conocido.

Ejemplo. $\frac{12}{8}=\frac{x}{2}$ De donde: $x=\frac{12\times 2}{8}=3$

y se tiene $\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

Transformaciones que puede sufrir una proporción discontinua.

Sea la proporción $\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$, la cual puede *alternarse, invertirse y permutarse.*

Primera transformación.—Cuando se cambia solamente el lugar de los términos medios, se llama entonces *alternar*, sin que el producto de los extremos deje de ser igual al de los medios.

Para más claridad, la proporción anterior se dispone así:

$$12 : 15=4 : 5$$

Según lo que se acaba de enseñar, se tiene:

$12 : 4=15 : 5$ De donde: $12\times 5=4\times 15$, esto es, $60=60$

Segunda transformación.— Cuando se ponen los medios por extremos, y los extremos por medios, se llama entonces *invertir*, sin que el producto de los extremos deje de ser igual al de los medios.

Sea la misma proporción 12 : 15=4 : 5

Según lo que se acaba de enseñar, se tiene:

$$15 : 12 = 5 : 4$$

De donde: $15 \times 4 = 12 \times 5$, esto es, $60 = 60$

Tercera transformación.—Cuando se pone la segunda razón por primera, y la primera por segunda, se llama entonces *permutar*, sin que el producto de los extremos deje de ser igual al de los medios.

Sea la misma proporción 12 : 15=4 : 5

Según lo que se acaba de enseñar, se tiene:

$$4 : 5 = 12 : 15$$

De donde: $4 \times 15 = 5 \times 12$, esto es, $60 = 60$

Estas son las tres transformaciones principales que puede sufrir una proporción discontinua, aunque también puede sufrir otras accesorias.

PROBLEMAS

1.° Búsquese el término que falta en la proporción 8 : 4=x : 2

2.° Búsquese el término que falta en la proporción x : 2=18 : 3

3.° Búsquese el término que falta en la proporción x−6=6−4

4.° Inviértase, altérnese y permútese la proporción 8 : 4=6 : 3

LECCION DÉCIMASEXTA

Regla de tres.

Se llama *relación* de dos cantidades el cociente que resulta de dividir la una por la otra.

Ejemplo. La relación que hay entre 24 y 6 es el cociente 4.

Según la definición que antecede, observamos que existe cierta dependencia entre cantidades de distinta especie. Conviene, pues, tener en cuenta esta relación ó dependencia, porque en la práctica ocurre á cada paso.

Explicación.—Cuando se compara la relación de dos cantidades con la de otras dos, sucede unas veces que, al duplicarse, triplicarse y cuadruplicarse la primera relación, se duplica, triplica y cuadruplica también la segunda, y entonces se dice que *las cantidades son directamente proporcionales.*

Otras veces sucede que, cuando aumenta la primera relación, disminuye la segunda relación, ó viceversa, y entonces se dice que *las cantidades son inversamente proporcionales.*

Dos cantidades variables son directamente proporcionales, cuando, al aumentar ó disminuír la primera relación, aumenta ó disminuye también la segunda relación.

Dos cantidades variables son inversamente proporcionales, cuando, al aumentar ó disminuír la primera relación, disminuye ó aumenta la segunda relación.

Ejemplos de cantidades directamente proporcionales.

1.° El interés que produce un capital es directamente proporcional al tiempo y á la cuantía.

2.° Los gastos que ocasiona el sostenimiento de un ejército son directamente proporcionales al número de soldados.

3.° El jornal de un albañil es directamente proporcional al tiempo del trabajo.

Ejemplos de cantidades inversamente proporcionales.

1°. La fuerza con que atrae el sol á los demás astros es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

2°. El tiempo empleado en construír una casa es inversamente proporcional al número de trabajadores y á las horas de trabajo diarias.

3°. El volumen ocupado por una masa gaseosa es inversamente proporcional á la presión que soporta.

Como se ve, la regla de tres no es más que *una proporción*, y se define de esta manera:

Se llama *regla de tres* una operación que tiene por objeto buscar el cuarto término de una proporción, cuando se conocen los otros tres.

División de la regla de tres.

La regla de tres se divide en *simple y compuesta.*

Es *simple*, cuando en ella figuran sólo cuatro términos: tres conocidos, y uno por conocer.

Es *compuesta*, cuando en ella figuran más de tres términos conocidos, y uno por conocer.

Escolio. Los cuatro términos ó cantidades que figuran en una regla de tres simple, son, de dos en dos, de una misma especie. El término desconocido se llama *incógnita*, y se representa por la letra x.

División de la regla de tres simple.

La regla de tres simple se divide en *directa é inversa.*

Es *directa*, cuando las relaciones de las cantidades son directamente proporcionales, esto es, cuando las relaciones van de más á más, ó de menos á menos.

Es *inversa*, cuando las relaciones son inversamente proporcionales, esto es, cuando las relaciones van de más á menos, ó de menos á más.

Ejemplo 1º de la regla de tres simple directa.

Un comerciante ha comprado 25 quintales de azúcar por 375 sucres, y quiere saber cuánto valen 17 quintales.

La operación se plantea y se resuelve así:

$$\frac{25}{17}=\frac{375}{x} \text{ De donde: } x=\frac{17\times 375}{25}=255 \text{ sucres}$$

Explicación.—Las cantidades 25 y 17 son homogéneas, esto es, de una misma especie, y se escribe la una debajo de la otra, separadas por una pequeña línea horizontal. En cuanto á las otras dos cantidades, se procede de idéntica manera; y en medio de los cuatro términos se escribe el *signo igual*, y la proporción se lee así: 25 es á 17 como 375 es á x.

La relación que existe entre 25 y 17 es directamente proporcional á la que existe entre 375 y x, es decir, que la relación va de menos á menos, porque á medida que disminuyen los quintales de azúcar, disminuye también el precio.

Como el término desconocido es un *extremo*, se multiplican los medios entre sí, y el producto se divide por el *extremo conocido.*

Escolio. El hecho de poner la x como primer miembro, se llama *despejar* la incógnita.

Sustituyendo, pues, la cantidad 255 por x, en la proporción que antecede, se obtiene que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, así: $\frac{25}{17}=\frac{375}{255}$ De donde:

$$25\times 255=17\times 375, \text{ esto es, } 6375=6375$$

Para saber ahora cuánto valen los 8 quintales, una vez que los 17 valen 255 sucres, basta restar esta cantidad de 375, así:

$$375-255=120 \text{ sucres}$$

Ejemplo 2.º Un hacendado compra 40 cabezas de ganado por 800 sucres, y quiere saber cuánto valen 328 cabezas.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{40}{328}=\frac{800}{x} \quad \text{De donde: } x=\frac{328\times 800}{40}=6560 \text{ sucres}$$

Explicación.—La relación que existe entre 40 y 328 es directamente proporcional á la relación que existe entre 800 y x, porque á medida que aumentan las cabezas de ganado, aumenta también el precio, es decir, que la relación va de más á más.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver una regla de tres simple directa, y cuando el término desconocido es un extremo, se multiplican los términos medios, y el producto se divide por el extremo conocido. Si el término desconocido es un medio, se multiplican los extremos, y el producto se divide por el medio conocido.*

Ejemplo de regla de tres simple inversa.

Sabiendo que 6 albañiles hacen una obra en 20 días, se pregunta en cuántos días harán la misma obra 10 albañiles.

La operación se dispone así:

$$\frac{6}{10}=\frac{20}{x}$$

Explicación.—Si 6 albañiles hacen una obra en 20 días, claro está que 10 albañiles harán la misma obra en menos días, esto es, á medida que aumentan los trabajadores, disminuye el número de días; luego la relación es inversa.

Para resolver este problema, se invierten solamente los términos 6 y 10, y la proporción se plantea de este modo:

$$\frac{10}{6}=\frac{20}{x} \quad \text{De donde: } x=\frac{6\times 20}{10}=12 \text{ días}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver una regla de tres simple inversa, se cambian solamente los términos de la primera razón, y se convierte en regla de tres simple directa, y en seguida se multiplican los medios entre sí, y el producto se divide por el extremo conocido.*

Método de reducción á la unidad.

Se llama *método de la unidad* el procedimiento de emplear el número 1 en el análisis y resolución de la regla de tres, sea simple ó compuesta, directa ó inversa.

Escolio. El método de reducción á la unidad es la más fácil y sencilla de todas las relaciones, y sirve para resolver los problemas de interés, descuento, cambio, comisión, corretaje, repartimientos proporcionales, etc.

Sean los mismos ejemplos.

$$1.^\circ \quad \frac{25}{17}=\frac{375}{x}$$

Explicación.—Para resolver esta regla de tres simple directa por el *método de la unidad*, se hace el siguiente raciocinio:

Si 25 quintales de azúcar importan 375 sucres, claro está que 1 solo quintal importará una cantidad 25 veces menor, esto es, 375 partido por 25, así: $\frac{375}{25}$; luego los 17 quintales importarán una cantidad 17 veces mayor, así:

$$\frac{17\times 375}{25}=255 \text{ sucres}$$

$$2.^\circ \quad \frac{40}{328}=\frac{800}{x}$$

Explicación.—Para resolver esta otra regla de tres simple directa por el *método de la unidad*, se hace el siguiente raciocinio:

Si 40 cabezas de ganado valen 800 sucres, claro está que 1 sola cabeza valdrá una cantidad 40 veces menor, esto es, 800 partido por 40, así: $\frac{800}{40}$; luego las 328 cabezas valdrán una cantidad 328 veces mayor, así:

$$\frac{328\times 800}{40}=6560 \text{ sucres}$$

$$3.^\circ \quad \frac{6}{10}=\frac{20}{x}$$

Explicación.—Para resolver esta regla de tres simple inversa por el *método de la unidad*, se hace el siguiente raciocinio:

Si 6 albañiles hacen una obra en 20 días, claro está que 1 solo albañil hará la misma obra en un tiempo 6 veces mayor, esto es, 6 multiplicado por 20, así: 6×20; luego 10 albañiles harán la misma obra en un tiempo 10 veces menor, así:

$$\frac{6\times 20}{10}=12 \text{ días}$$

Escolio 1.° Cuando se dice 25 veces menor, como en el ejemplo 1.°, se escribe dicha cantidad 25 como denominador; y cuando se dice 17 veces mayor, como en el mismo ejemplo, se escribe la mencionada cantidad 17 como numerador. En general, la cantidad que resulta menor, se escribe debajo de la línea horizontal; y la que resulta mayor, encima de la línea.

Escolio 2.° La aplicación de las proporciones se llama *método ordinario.*

Regla de tres compuesta.

Se llama *regla de tres compuesta* una operación en que figuran varias reglas simples, ó más de tres términos conocidos y uno por conocer.

Ejemplo. Si 12 hombres, en 15 días, empiedran una extensión de 240 metros, se pregunta cuántos metros empedrarán 16 hombres, en 11 días.

Explicación 1ª—La regla de tres compuesta, como todo problema, consta de tres partes: *el enunciado, el planteo y la resolución.*

El *enunciado* consiste en expresar los términos conocidos y el desconocido, los cuales forman *los datos* del problema; el *planteo* consiste en dar á los datos la disposición conveniente; y la *resolución* consiste en ejecutar las operaciones respectivas, para encontrar el valor del término desconocido.

Explicación 2ª—La regla de tres compuesta consta de otras dos partes: *el supuesto y la pregunta.*

Los datos en que no figura la incógnita, constituyen el *supuesto ó hipótesis;* los datos en que figura la incógnita, constituyen la *pregunta.*

Explicación 3ª—Los datos del supuesto se escriben en una línea horizontal; los de la pregunta en otra línea, y debajo de la primera, de modo que se correspondan los términos de una misma especie.

Según esto, el problema anterior se plantea así:

12 hombres, 15 días, 240 metros (supuesto ó hipótesis)
16 hombres, 11 días, x metros (pregunta)

Resolución por el método ordinario. Se descompone en tantas reglas simples cuantos términos conocidos tiene la pregunta. Como dichos términos son dos, claro está que resultarán dos reglas simples, para lo cual se hace uso de una incógnita auxiliar x', que se lee *equis prima.*

Primera regla simple.

$$\frac{12}{16}=\frac{240}{x'}$$

Explicación.—Se toman el primer término 12 del supuesto y el primer término 16 de la pregunta, y se escriben en forma de quebrado; en seguida se toman el último término 240 del supuesto y la incógnita auxiliar x', y se escriben en forma de quebrado.

SEGUNDA REGLA SIMPLE.

$$\frac{15}{11}=\frac{x'}{x}$$

Explicación.—Se toman el segundo término 15 del supuesto y el segundo término 11 de la pregunta, y luego se escriben en forma de quebrado; en seguida se toman la incógnita auxiliar y la incógnita del problema, y luego se escriben en forma de quebrado.

Ahora se examina cada regla, ó lo que es lo mismo, cada proporción, para saber si es directa ó inversa.

La primera es directa, porque la relación va de más á más. Resolviéndola, se tiene:

$$x'=\frac{16\times 240}{12}=320 \text{ metros, es decir, } x'=320.$$

Sustituyendo la x' por 320, en la segunda regla simple, se tiene:

$$\frac{15}{11}=\frac{320}{x}$$

Esta regla es también directa, porque la relación va de menos á menos.

Resolviéndola, se tiene:

$$x=\frac{11\times 320}{15}=234 \text{ metros y 7 decímetros, más ó menos,}$$

son los que deben empedrar los 16 hombres.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver una regla de tres compuesta, se escriben los datos del supuesto en una línea horizontal, y debajo de ésta los de la pregunta, de modo que se correspondan los términos de una misma especie. Luego se la descompone en tantas reglas simples cuantos términos conocidos tiene la pregunta, para lo cual se hace uso de incógnitas auxiliares. Se resuelve cada regla simple, y se sustituye el valor de la incógnita en las demás reglas, hasta llegar al último resultado.*

Aplicación del método de la unidad.

Se hacen los siguientes raciocinios:

1.º Si 12 hombres empiedran 240 metros, es claro que 1 solo hombre empedrará una extensión 12 veces menor, así: $\frac{240}{12}$, y 16 hombres empedrarán una extensión 16 veces mayor, así:

$$\frac{240\times16}{12}$$

2.º Si empiedran esta extensión trabajando 15 días, es claro que, trabajando 1 solo día, empedrarán una extensión 15 veces menor, asi:

$$\frac{240\times16}{12\times15},$$

y trabajando 11 días, es claro que empedrarán una extensión 11 veces mayor, así:

$$\frac{240\times16\times11}{12\times15}=234 \text{ y } 7 \text{ decímetros}$$

PROBLEMAS

1.º El Gobierno gasta 350 sucres diarios en sostener la tropa de Tulcán, que consta de 250 hombres. ¿Cuánto gastará, si el número se aumenta á 860 soldados?

2.º Un negociante de ganado emplea 4500 sucres en 180 cabezas, comprada por 25 sucres cada una. Cuánto importarán las 134?

3.º La construcción de 6 metros de la pared de un templo cuesta 11 sucres. Cuánto costarán 14 metros 50 centímetros?

4.º Seis carpinteros tardan 60 días en labrar varios pilares, como en hacer varias puertas y varias ventanas. Se pregunta ahora si 9 carpinteros tardarán más ó menos días, y cuántos, en ejecutar los mismos trabajos.

5.º Un individuo compra 60 quintales de azúcar por 1200 sucres. Cuánto valen los 43?

LECCION DÉCIMASÉPTIMA

Del interés.

Se llama *interés* un tanto por ciento que se paga ó se cobra por una cantidad de dinero, pedida ó dada prestada.

La cantidad de dinero se llama *capital ó principal.*

Se llama *tanto por ciento, rata, tasa, rédito ó tipo,* la cantidad que se paga ó se cobra proporcionalmente por cada cien sucres ó por cada cien partes de una cosa.

Se llama *cantidad centesimal* la parte que se toma de un número.

Se llama *base* el número del cual se toma la cantidad centesimal.

Se llama *monto* el total que resulta de sumar la base con la cantidad centesimal.

Escolio. Cuando se dice 8 por ciento, verbigracia, se significa 8 centavos por cada cien centavos, 8 sucres por cada cien sucres.

Así, pues, 1 por ciento, 2 por ciento, 3 por ciento, equivalen á un centésimo, á dos centésimos, á tres centésimos, y se escriben así:

$\frac{1}{100}$ ó 0,01

$\frac{2}{100}$ ó 0,02

$\frac{3}{100}$ ó 0,03.

El tanto por ciento se escribe así: $^o/_o$

El tanto por mil se escribe así: $^o/_{oo}$.

Ejemplo 1º ¿Cuál es el 4 $^o/_o$ de la cantidad 500 sucres? 20

Explicación.—Si la base fuera 100 sucres, el tanto por ciento sería 4 sucres; si la base fuera 1 sucre, el tanto por ciento sería 100 veces menor, esto es, 4 partido por 100, así: $\frac{4}{100}$; pero como la base es 500 sucres, claro está que el tanto por ciento será 500 veces mayor, así:

$$\frac{500\times4}{100}=20$$

El número 20 es el tanto por ciento, ó sea la cantidad centesimal de 500 sucres, que son la base.

Restando 20 de 500, se tiene:

500 (base)
20 (tanto por ciento ó cantidad centesimal)

480 (diferencia)

Sumando la base con el tanto por ciento, resulta el monto, así:

500 (base)
20 (tanto por ciento)

520 (monto)

Este problema se resuelve también por medio de la regla de tres simple directa, así:

Si de 100 se toman 4 sucres, claro está que de 500 se tomarán más.

La operación se plantea y se ejecuta así:

$$\frac{100}{500}=\frac{4}{x} \qquad x=\frac{500\times4}{100}=20$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para encontrar la cantidad centesimal, cuando se conocen la base y el tanto, se multiplica la base por el tanto, y el producto se divide por* 100.

Ejemplo 2.° ¿Cuál es el 3 por mil de la cantidad 62000 sucres? 180

Explicación.—Si la base fuera 1000 sucres, el tanto por mil sería 3 sucres; si la base fuera 1 sucre, el tanto por mil sería 1000 veces menor, esto es, 3 partido por 1000, así: $\frac{3}{1000}$; pero como la base es 62000 sucres, claro está que el tanto por mil será 62000 veces mayor, así:

$$\frac{62000\times3}{1000}=186$$

El número 186 es el tres por mil de 62000, que es la base.

Resolución de este problema por regla de tres.

Si de 1000 sucres se toman 3, claro está que de 62000 se tomarán más, así:

$$\frac{1000}{62000}=\frac{3}{x} \qquad x=\frac{62000\times3}{1000}=186$$

Otro ejemplo. ¿Cuál es el 8 $^{0}/_{00}$ de la cantidad 460.000 sucres? 3680

$$\frac{460.000 \times 8}{1000}=3680$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para encontrar el tanto por mil, cuando se conocen la base y el tanto, se multiplica la base por el tanto, y el producto se divide por* 1000.

Ejemplo 3º A un comerciante, que tiene 500 sucres, se le pierden 80. ¿Cuál es el tanto por ciento que representa la pérdida? 16

Explicación.—Si sobre 500 sucres pierde 80 el comerciante, es claro que sobre 1 sucre perderá una cantidad 500 veces menor, esto es, 80 partido por 500, así: $\frac{80}{500}$; luego sobre 100 sucres perderá una cantidad 100 veces mayor, así:

$$\frac{80 \times 100}{500}=16\ \%\ \text{de pérdida}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para encontrar el tanto por ciento, cuando se conocen la cantidad centesimal y la base, se multiplica por* 100 *la cantidad centesimal, y el producto se divide por la base.*

Ejemplo 4º Un comerciante pierde 80 sucres, que son el 16 %. ¿Cuánto dinero tenía antes de la pérdida? 500

Explicación.—Si el 16 % es igual á 80 sucres, el 1 % será 16 veces menor, esto es, 80 partido por 16, así: $\frac{80}{16}$; luego el 100 %, ó mejor dicho, todo el dinero será 100 veces mayor, así:

$$\frac{80 \times 100}{16}=500$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para encontrar la base, cuando se conocen la cantidad centesimal y el tanto, se multiplica la cantidad centesimal por* 100, *y el producto se divide por el tanto.*

Ejemplo 5º Se quiere saber cuál es el número que, aumentado con su 16 %, da por total ó monto la suma de 580 sucres. 500

Explicación.—Agregando el 16 % á la base 100, se obtiene 116 por monto, ya que éste no es sino la suma de la base con la cantidad centesimal. Ahora bien, si el monto 116 proviene de la base 100, es claro que 1 sucre de monto provendrá de una base 116 veces menor, esto es, 100 partido por 116, así: $\frac{100}{116}$; luego los 580 sucres provendrán de una base 580 veces mayor, así:

$$\frac{580\times 100}{116}=500$$

El denominador 116 no és sino la suma de la base 100 con 16, que es el tanto.

El número 500, que es el buscado, se multiplica por 16, según la regla del ejemplo 1º, y el producto se divide por 100, así:

$$\frac{500\times 16}{100}=\frac{8000}{100}=80$$

Sumando el número 80, que es la cantidad centesimal, con 500, que es la base, se obtiene el monto 580.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para encontrar la base, cuando se conocen el monto y el tanto, se multiplica el monto por* 100, *y el producto se divide por la base* 100, *sumada con el tanto.*

Ejemplo 6º ¿Cuál es el número que, disminuído del 16 $^o/_o$, da 420 sucres? 500

Explicación.—Si de 100 sucres se disminuyen 16, quedan 84. Ahora bien, si la diferencia 84 proviene de 100, 1 sucre de diferencia provendrá de un número 84 veces menor, esto es, 100 partido por 84, así: $\frac{100}{84}$; luego la diferencia 420 provendrá de un número 420 veces mayor, así:

$$\frac{420\times 100}{84}=500$$

Del número 500 se resta 80, que es el 16 $^o/_o$, y se obtiene 420, así: 500—80=420

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para encontrar la base, cuando se conocen la diferencia y el tanto, se multiplica la diferencia por* 100, *y el producto se divide por la diferencia que resulta de restar el tanto de la base* 100.

Base del interés.

La cantidad que sirve de base, para el arreglo ó cómputo del interés, es la *utilidad que produce el capital* 100 en la unidad de tiempo, que generalmente es un mes ó un año.

Condiciones del interés.

1º *El interés debe ser proporcional al capital, siendo uno* *mismo el tiempo, es decir, á medida que aumenta el capital, aumenta también el interés, ó á medida que disminuye el capital, disminuye igualmente el interés.*

2ª *Debe ser proporcional al tiempo, siendo uno mismo el capital, es decir, á medida que aumenta el tiempo, aumenta también el interés, ó á medida que disminuye el tiempo, disminuye igualmente el interés.*

División del interés.

El interés se divide en *simple y compuesto.*

Interés simple es la ganancia que produce un capital líquido durante todo el tiempo del préstamo.

Interés compuesto es la ganancia que produce un capital; cuando, al fin de un tiempo determinado, se añade el interés al capital, y se forma al principio de cada período de tiempo un nuevo capital, que gana nuevo interés.

La agregación sucesiva de los intereses al principal se llama *capitalización.*

Ejemplo de interés simple. Si un comerciante dá á una persona 300 sucres, por el tiempo de 5 meses, al 1 °/o mensual, la persona favorecida pagará al comerciante solamente los intereses que ganen los 300 sucres, en los 5 meses, al 1 °/o mensual, que son 15 sucres.

Explicación.—Cada cien sucres gana, en un mes, *un sucre* de interés; luego los 300 ganan 3 sucres en un mes; y en 5 meses, los 300 ganan 3×5, es decir, 15 sucres.

Definición de fórmula.

Se llama *fórmula* un modelo que representa la serie de operaciones que deben practicarse, para resolver todos los problemas de una misma especie.

Explicación.—Los números variables con que debe operarse en los problemas de una misma especie, se representan en la fórmula por medio de letras, unidas por los signos que sirven para indicar las operaciones.

Para obtener la fórmula que sirva de modelo, y buscar el interés por medio de ella, se representa por c el capital, cualquiera que sea; por r, el tanto por ciento, rata ó tasa; por t, un tiempo cualquiera, y se hacen los siguientes raciocinios:

1º Si el capital 100 produce r sucres de interés, en un mes ó en un año, es claro que 1 solo sucre producirá, en el mismo tiempo, un interés 100 veces menor; esto es, r partido por 100, así:

$$\frac{r}{100}$$

luego el capital c producirá, en el mismo tiempo, un interés c veces mayor, así:

$$\frac{c\times r}{100}$$

2º Si el capital c produce, en un mes ó en un año, el interés representado por el quebrado que antecede, es claro que en el tiempo t producirá un interés t veces mayor, así:

$$\frac{c\times r\times t}{100}$$

Designando por g la ganancia ó interés, se tiene:

$$g=\frac{c\times r\times t}{100}\quad \text{(1ª fórmula)}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para averiguar ó buscar el interés, se multiplica el capital por la rata y por el tiempo, y el producto se divide por* 100.

Escolio. Como en la fórmula que se acaba de obtener figuran cuatro letras, que son g, c, r y t, sucede que la averiguación de una de éstas, cuando se conocen las otras tres, da una fórmula; luego las fórmulas son cuatro.

Para deducir la 2ª fórmula, se multiplican por 100 los dos miembros de la 1ª, que es una igualdad, con lo cual no se altera el valor, según el axioma 8º de la lección 4ª, y se tiene:

$$g\times 100=\frac{c\times r\times t}{100}\times 100$$

Explicación.—Multiplicando el numerador por el entero 100, se tiene:

$$g\times 100=\frac{c\times r\times t\times 100}{100}$$

Suprimiendo el factor 100 en el numerador y en el denominador, puesto que un quebrado no altera de valor si á sus dos términos se les quita una misma cantidad, se tiene:

$$g\times 100=c\times r\times t$$

Para sacar la letra c, que representa un capital cualquiera, se dividen los dos miembros de esta igualdad por el producto de las otras dos letras $r\times t$, lo cual tampoco altera la igualdad, según el axioma 8º de la lección 4ª, y se tiene:

$$\frac{g\times 100}{r\times t}=\frac{c\times r\times t}{r\times t}$$

Suprimiendo los factores r y t del 2º miembro, lo cual no altera el valor del quebrado, se tiene:

$$\frac{g\times 100}{r\times t}=c$$

Poniendo el primer miembro por segundo, y éste por aquel, lo cual no altera la igualdad, se tiene:

$$c=\frac{g\times 100}{r\times t} \quad \textbf{(2ª fórmula)}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para averiguar ó buscar el capital, se multiplica por* 100 *la ganancia ó interés, y el resultado se divide por el producto que proviene de multiplicar la rata por el tiempo.*

Para deducir la 3ª fórmula, se multiplican por 100 los dos miembros de la 1ª fórmula, y se tiene:

$$g\times 100=\frac{c\times r\times t\times 100}{100}$$

Explicación.—Suprimiendo el factor 100 en el 2º miembro, se tiene:

$$g\times 100=c\times r\times t$$

Para sacar la letra r, que representa el rédito, rata, tasa, tipo ó tanto por ciento, se dividen los dos miembros de esta igualdad por el producto de las otras dos letras $c\times t$, y se tiene:

$$\frac{g\times 100}{c\times t}=\frac{c\times r\times t}{c\times t}$$

Suprimiendo en el segundo miembro los factores c y t, se tiene:

$$\frac{g\times 100}{c\times t}=r$$

Poniendo el segundo miembro por primero, y éste por aquel, se tiene:

$$r=\frac{g\times 100}{c\times t} \quad \textbf{(3ª fórmula)}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para averiguar el tanto por ciento, se multiplica por 100 la ganancia ó interés, y el resultado se divide por el producto que proviene de multiplicar el capital por el tiempo.*

Para deducir la 4ª fórmula, se multiplican por 100 los dos miembros de la 1ª fórmula, y se tiene:

$$g\times 100=\frac{c\times r\times t\times 100}{100}$$

Explicación.—Suprimiendo el factor 100 en el 2º miembro, se tiene:

$$g\times 100=c\times r\times t$$

Para sacar la letra t, que representa un tiempo cualquiera, se dividen los dos miembros de esta igualdad por el producto de las otras dos letras $c\times r$, y se tiene:

$$\frac{g\times 100}{c\times r}=\frac{c\times r\times t}{c\times r}$$

Suprimiendo en el 2º miembro los factores c y r, se tiene:

$$\frac{g\times 100}{c\times r}=t$$

Poniendo el 2º miembro por 1º, y éste por aquel, se tiene:

$$t=\frac{g\times 100}{c\times r}\quad \text{(4ª fórmula)}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para averiguar ó buscar el tiempo, se multiplica por 100 la ganancia ó interés, y el resultado se divide por el producto que proviene de multiplicar el capital por la rata.*

Aplicación de la 1ª fórmula. ¿Qué interés producirá el capital 500 sucres, en 6 meses, al 1 $^o/_o$ mensual?

Según la fórmula

$$g=\frac{c\times r\times t}{100}$$

se tiene:

$$g=\frac{500\times 1\times 6}{100}=30\ \$ \text{ de interés}$$

Explicación.—En lugar de la letra c de la fórmula, se pone el capital 500; en lugar de la letra r, que representa el tanto por ciento, se pone 1; y en lugar de la letra t, que representa el tiempo, se pone 6.

Aplicación del método de la unidad.

$$\left.\begin{array}{l}\text{100 sucres, 1 mes, 1 sucre de interés}\\ \text{500 sucres, 6 meses, } x \text{ sucres de interés}\end{array}\right\}\ \text{planteo}$$

Análisis.—Si 100 sucres producen, en 1 mes, 1 sucre de interés, claro está que 1 solo sucre producirá, en el mismo mes, un interés 100 veces menor, esto es, 1 partido por 100, así: $\frac{1}{100}$; el capital 500 producirá, en igual tiempo, un interés 500 veces mayor, así:

$$\frac{500\times 1}{100}$$

Ahora, el mismo capital 500, en 6 meses, producirá un interés 6 veces mayor, así:

$$\frac{500\times 1\times 6}{100}=30$$

Aplicación de la 2ª fórmula. ¿Qué capital debe colocarse á interés, para que produzca 98 sucres, en 4 meses, al 9 °/o anual?

Según la fórmula

$$c=\frac{g\times 100}{r\times t}$$

se tiene:

$$c=\frac{98\times 100}{\frac{4}{12}\times 9}=3266,6 \text{ (capital buscado)}$$

Explicación.—Haciendo la multiplicación indicada en el numerador, se obtiene 9.800 por producto. Dividiendo por 4 los términos del quebrado $\frac{4}{12}$, para simplificarlo, se obtiene $\frac{1}{3}$, el cual, multiplicado por el entero 9, da $\frac{9}{3}$, y la operación queda reducida á dividir un entero por un quebrado, así:

$$9800 : \tfrac{9}{3}$$

Para hacer esta división, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y al producto se pone por denominador el numerador del quebrado, así:

$$\frac{9800\times 3}{9}=\frac{29400}{9}=3.266,6.$$

Aplicación del método de la unidad.

$$\left.\begin{array}{l} 9\ \%,\ 1\ \text{mes},\ 100 \\ 98\ \%,\ 4\ \text{meses},\ x \end{array}\right\}\ \text{planteo}$$

Análisis.—Si el interés 9 sucres proviene de un capital 100, en 1 mes, claro está que 1 sucre de interés provendrá de un capital 9 veces menor, es decir, 100 partido por 9, así: $\frac{100}{9}$; luego el interés 98 sucres provendrá de un capital 98 veces mayor, así:

$$\frac{98 \times 100}{9}$$

Si el capital hubiera sido impuesto á interés, durante 12 meses, habría debido de ser 12 veces mayor, para que produjera el interés que representa el quebrado que antecede, así:

$$\frac{98 \times 100 \times 12.}{9},$$

pero como el capital ha sido impuesto durante 4 meses, claro está que el interés será 4 veces menor, así:

$$\frac{98 \times 100 \times 12}{9 \times 4} = 3.266,6$$

Aplicación de la 3ª fórmula. ¿A qué tanto por ciento anual debe colocarse el capital 3.266,6, para que produzca 98 sucres de interés, en 4 meses?

Según la fórmula

$$r = \frac{g \times 100}{c \times t}$$

se tiene:

$$r = \frac{98 \times 100}{3.266,6 \times \frac{4}{12}} = 9 \text{ sucres de } \%$$

Explicación.—Haciendo la multiplicación indicada en el numerador, se obtiene 9800. Dividiendo por 4 los términos del quebrado $\frac{4}{12}$, para simplificarlo, se obtiene $\frac{1}{3}$, el cual, multiplicado por 3.266,6, da $\frac{32666}{3}$. Dividiendo 9.800 por el quebrado que antecede, se tiene: 9800 : $\frac{32666}{3}$. Para hacer esta división, se multiplica 9.800 por el denominador 3, y resulta 29400. Se divide este producto por 3.266,6, para lo cual se borra la coma, y se agrega un cero al dividendo, así: 294000 : 32666 = 9 (%)

Al hacer la división, resulta un residuo 6, el cual se desprecia.

Aplicación del método de la unidad.

$$\left.\begin{array}{l}\text{3.266,6 sucres, 4 meses, 98 sucres de interés} \\ \text{100 sucres, 1 mes, } x \text{ sucres de interés}\end{array}\right\} \text{planteo}$$

Análisis.—Buscar el tanto, equivale á buscar el interés de 100 sucres en 1 mes. Por esto, si el capital 3.266,6 produce, en 4 meses, 98 sucres de interés, claro está que 1 sucre producirá, en el mismo tiempo, un interés 3.266,6 veces menor, esto es, 98 partido por 3.266,6, así: $\frac{98}{3266,6}$; luego el capital 100 producirá, en los 4 meses, un interés 100 veces mayor, así:

$$\frac{98 \times 100}{3.266,6}$$

Si el capital hubiera sido impuesto durante 12 meses, habría producido un interés 12 veces mayor, así:

$$\frac{98 \times 100 \times 12}{3.266,6},$$

pero como el capital ha sido impuesto durante 4 meses, claro está que producirá un interés 4 veces menor, así:

$$\frac{98 \times 100 \times 12}{3.266,6 \times 4} = 9\ (\%).$$

APLICACIÓN DE LA 4ª FÓRMULA. ¿Por cuántos meses debe colocarse el capital 3.266,6, al 9 % anual, para que produzca 98 sucres de interés?

Según la fórmula

$$t = \frac{g \times 100}{c \times r}$$

se tiene:

$$t = \frac{98 \times 100}{3.266,6 \times 9} = 4 \text{ meses}$$

Explicación.—Haciendo las multiplicaciones en el numerador y en el denominador, se obtienen 9800 y 29.399,4 por productos, respectivamente. Como el 2º producto es una fracción decimal, se borra la coma, y se agrega un cero al otro producto, y luego se divide la 1ª cantidad por la 2ª, así: $\frac{98000}{293994}$.

Para valuar este quebrado en meses, se multiplica el numerador por 12 que tiene el año, y se obtiene 1176000. Dividiendo este producto por el denominador, se obtienen 4 meses por cociente, y sobra un residuo 24, el cual se desprecia.

Aplicación del método de la unidad.

$$\left.\begin{array}{l} 100, \ 9\ \%, \ 1 \text{ año} \\ 3266,6, \ 98 \quad x \text{ años} \end{array}\right\} \text{planteo}$$

Análisis.—Si el capital 100 produce 9 sucres de interés, en 1 año, es claro que un sucre de capital, para que produzca los mismos 9 sucres, tardará un tiempo 100 veces mayor, esto es, 1×100; luego un sucre de capital, para que produzca 1 sucre de interés, tardará un tiempo 3.266,6 veces menor, así:

$$\frac{1\times100}{3.266,6\times9}$$

luego el capital 3.266,6, para producir 98 sucres de interés, tardará un tiempo 98 veces mayor, así:

$$\frac{1\times100\times98}{3.266,6\times9}=4 \text{ meses}$$

Casos secundarios del interés.

Son dos:

PRIMER CASO.—Este consiste en buscar el capital líquido, cuando se conocen el monto, el tanto y el tiempo.

Escolio. El capital, sumado con los intereses, dá el monto.

Ejemplo. ¿Cuál es el capital líquido que, colocado á interés, durante 4 años, al 8 % anual, da un monto de 792 sucres?

Explicación.—Para obtener un número de la misma especie que el monto 792, es necesario buscar los intereses que produce el capital 100, en los 4 años, al 8 % anual.

Aplicando la 1ª fórmula, se tiene:

$$y=\frac{100\times8\times4}{100}=32$$

Sumando el capital 100 con el interés 32, se obtiene 132 por monto.

Ahora, si el monto 132 proviene de un capital líquido 100, es claro que 1 sucre de monto provendrá de un capital líquido 132 veces menor, así: $\frac{100}{132}$; luego el monto 792 provendrá de un capital líquido 792 veces mayor, así:

$$\frac{100\times792}{132}=600 \text{ (capital líquido)}$$

Para saber los intereses que produce el capital líquido 600, se aplica la 1ª fórmula, así:

$$g=\frac{600\times 8\times 4}{100}=192$$

Sumando el capital 600 con el interés 192, se obtiene el monto 792 sucres.

Observamos ahora que el interés 32, proveniente del capital líquido 100, no es sino el producto que resulta de multiplicar la rata 8 por el tiempo 4 años.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para averiguar ó buscar el capital líquido, cuando se conocen el monto, el tanto y el tiempo, se multiplica el monto por* 100, *y el producto se divide por* 100, *sumado con el producto que resulta de multiplicar el tanto por el tiempo.*

SEGUNDO CASO.—Este consiste en buscar el interés, cuando el tanto por ciento es un número mixto:

Ejemplo. ¿Qué interés producirá el capital 500 sucres, en 2 años, al $4\frac{1}{2}$ % anual?

Aplicando la 1ª fórmula, se tiene:

$$g=\frac{500\times 4\frac{1}{2}\times 2}{100}=45 \text{ (interés buscado)}$$

Explicación 1ª—Suprimiendo el factor 100 en el numerador y en el denominador, queda $5\times 4\frac{1}{2}\times 2$

Reduciendo el mixto á quebrado, se tiene:

$$5\times\frac{9}{2}\times 2=\frac{45}{2}\times 2=\frac{90}{2}=45$$

Explicación 2ª—Se busca el interés, primero al 4 %, y después al $\frac{1}{2}$ %, así:

$$1^{\circ}\quad g=\frac{500\times 4\times 2}{100}=40$$

$$2^{\circ}\quad g=\frac{500\times\frac{1}{2}\times 2}{100}=5\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{5}{2}\times 2=\frac{10}{2}=5$$

Sumando los intereses parciales, se obtiene el interés total, así: $40+5=45$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para averiguar ó buscar el interés de un capital, cuando el tanto por ciento es un número mixto, se reduce éste á* *quebrado, y luego se ejecutan todas las operaciones indicadas, ó bien, se buscan los intereses parciales, y en seguida se suman.*

Método de los divisores fijos.

El año que está adoptado en el comercio es el de 360 días, tanto por ser el más corto para calcular el interés, cuanto porque se presta mejor para las simplificaciones.

Cuando se busca el interés de un capital á un tanto por ciento anual, y durante varios días, se pone por denominador un año comercial reducido á días, que son 360.

Ejemplo. ¿Qué interés producirá el capital 1260 sucres, al 9 °/o anual, en 80 días?

Aplicando la 1ª fórmula, se tiene:

$$g = \frac{1260 \times 9 \times 80}{360 \times 100} = \frac{907200}{36000} = 25{,}20 \text{ de interés}$$

Observamos ahora que el número 36000 proviene de multiplicar por 100 los 360 días del año comercial.

Dividiendo, pues, el número 36000 por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 y 12, se obtienen cocientes exactos, y son los que se llaman *divisores fijos.*

$\frac{36000}{1} = 36000$ (divisor fijo)

$\frac{36000}{2} = 18000$ „ „

$\frac{36000}{3} = 12000$ „ „

$\frac{36000}{4} = 9000$ „ „

$\frac{36000}{5} = 7200$ „ „

$\frac{36000}{6} = 6000$ „ „

$\frac{36000}{8} = 4500$ „ „

$\frac{36000}{9} = 4000$ „ „

$\frac{36000}{10} = 3600$ „ „

$\frac{36000}{12} = 3000$ „ „

Al dividir 36000 por 7 y por 11, no se obtienen cocientes exactos, y por esto hemos hecho abstracción.

Ejemplo. ¿Cuál es el divisor fijo de 36000 sucres al 12 °/o anual?

Explicación.—Dividiendo 36000 por 12, se obtiene el cociente 3000, que es el divisor fijo.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para obtener el divisor fijo se divide el número 36000 por el tanto por ciento anual.*

Resolución del problema anterior por el método de los divisores fijos.

¿Qué interés producirá el capital 1260 sucres, al 9 % anual, en 80 días?

Explicación.—Se multiplica el capital 1260 por el tiempo 80 días, mas no por el tanto por ciento, y el producto se divide por 4000, que es el divisor fijo del 9 %, así:

$$\frac{1260 \times 80}{4000} = 25,20$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para buscar el interés de un capital por medio de los divisores fijos, se multiplica el capital por el tiempo, menos por el tanto por ciento, y el producto se divide por el divisor fijo, correspondiente al tanto por ciento.*

Escolio 1.° El método de los divisores es bastante rápido, y debe hacerse frecuente uso de él.

Escolio 2.° Cuando el tanto no tiene divisor fijo, como 7, 11, 3 $\frac{1}{2}$, etc., se aplica entonces directamente la fórmula respectiva, ó la regla correspondiente al tanto por ciento mixto.

Advertencia importante sobre las fórmulas.

Al aplicar cualquiera de las cuatro fórmulas, se debe tener el cuidado de referir el tiempo á la misma unidad á que está referido el tanto por ciento, á fin de no incurrir en despropósitos y en errores que sean perjudiciales. Esta advertencia se comprende mejor por medio de las explicaciones siguientes:

Explicación 1ª—Si el tanto por ciento es mensual, y el tiempo indica meses, entonces se aplica directamente la fórmula respectica, sin ninguna modificación, tál como sucede en el ejemplo de la 1ª fórmula.

Explicación 2ª—Si el tanto por ciento es anual, y el tiempo indica años, entonces se aplica directamente la fórmula respectiva, sin ninguna modificación.

Ejemplo. ¿Qué interés producirá el capital 600 sucres, en 4 años, al 8 % anual?

Aplicando la 1ª fórmula, se tiene:

$$g = \frac{600 \times 8 \times 4}{100} = 192 \ \$ \text{ de interés}$$

Explicación 3ª—Si el tanto por ciento es anual, y el tiempo indica meses, entonces se divide el número de meses por 12 meses que tiene el año.

Ejemplo. ¿Qué interés producirá el capital 486 sucres, en 5 meses, al 4 % anual?

Aplicando la 1ª fórmula, se tiene:

$$g=\frac{486\times4\times5}{12\times100}=8 \text{ sucres } 10 \text{ centavos}$$

Explicación 4ª—Si el tanto por ciento es anual, y el tiempo indica días, entonces se divide el número de días por 360 días que tiene el año comercial.

Ejemplo. ¿Qué interés producirá el capital 2520 sucres, en 869 días, al 9 % anual?

Aplicando la 1ª fórmula, se tiene:

$$g=\frac{2520\times9\times869}{360\times100}=547 \text{ sucres } 47 \text{ centavos}$$

Explicación 5ª—Si el tanto por ciento es mensual, y el tiempo indica años, entonces se reduce á meses el número de años, y se aplica la fórmula respectiva.

Ejemplo. ¿Qué interés producirá el capital 600 sucres, en 3 años, al 1 % mensual?

Aplicando la 1ª fórmula, y reduciendo á meses los 3 años, para lo cual basta multiplicarlos por 12, se tiene:

$$g=\frac{600\times1\times36}{100}=216$$

Explicación 6ª—Si el tanto es mensual, y el tiempo indica días, se divide entonces el número de días por 30 días que tiene el mes comercial.

Ejemplo. ¿Qué interés producirá el capital 400 sucres, en 15 días, al 2 % mensual?

Aplicando la 1ª fórmula, se tiene:

$$g=\frac{400\times2\times15}{30\times100}=4 \text{ sucres}$$

Interés compuesto.

La diferencia entre los dos intereses consiste en que es invariable el capital del interés simple, y variable el del compuesto.

Escolio. Si el interés debe pagarse por trimestres ó por semestres, se procede lo mismo que cuando el tiempo indica años, y se capitaliza dicho interés al fin de cada período de tiempo. Si éste indica años, meses y días, se calcula el interés solamente para el número de años; y el capital que resulta al fin del último año, se considera como impuesto á interés simple para los meses y días, el cual interés se agrega al último capital.

Ejemplo. ¿Qué interés compuesto producirá el capital 400 sucres, en 3 años, al 5 $^o/_o$ anual?

Explicación.—Se descomponen los 3 años en 1+1+1. Como el tanto por ciento es anual, y el tiempo indica años, se aplica directamente la 1ª fórmula del interés simple, para averiguar el interés que producirán los 400 sucres, en el primer año, al 5 $^o/_o$ anual, así:

$$g=\frac{400\times 1\times 5}{100}=20$$

Sumando ahora el capital 400 con el interés 20, se obtiene el monto 420, que sirve de nuevo capital en el 2º año.

Para buscar el interés que produce dicho monto, se aplica la misma fórmula, así:

$$g=\frac{420\times 1\times 5}{100}=21$$

Sumando el capital 420 con el interés 21, se obtiene el monto 441, que sirve de nuevo capital en el 3er. año.

Para buscar el interés que produce dicho monto, se aplica la misma fórmula, así:

$$g=\frac{441\times 1\times 5}{100}=22{,}05.$$

Sumando el capital 441 con el interés 22,05, se obtiene la cuantía 463,05 en que se convierte el capital 400 sucres, en los 3 años, al 5 $^o/_o$ anual.

Restando el capital 400 de la cuantía 463,05, resulta la diferencia 63,05 que es el interés compuesto, así:

463,05	(cuantía)
400,00	(capital)
63,05	(interés compuesto)

Segundo procedimiento.—Para saber la cuantía en que se convierte el capital 400 sucres, se busca el interés del capital 100 en cada uno de los 3 años, al 5 $^o/_o$ anual.

Aplicando la 1ª fórmula del interés simple, se tiene:

$$g=\frac{100\times 5\times 1}{100}=5.$$

Sumando el capital 100 con el interés 5, se obtiene el monto 105, que sirve de nuevo capital en el 2º año.

Aplicando la misma fórmula, se tiene:

$$g = \frac{105 \times 5 \times 1}{100} = 5,25$$

Sumando el capital 105 con el interés 5,25, se obtiene el monto 110,25, que sirve de nuevo capital en el tercer año.

Aplicando la misma fórmula, se tiene:

$$g = \frac{110,25 \times 5 \times 1}{100} = 5,5125$$

Sumando el capital 110,25 con el interés 5,51, se obtiene la cuantía 115, 76

Ahora se establece la siguiente proporción:

Si el capital 100 se convierte en la cuantía 115,76, en 3 años, al 5 % anual, claro está que el capital 400, en el mismo tiempo, y al mismo tanto, se convertirá en una cuantía mayor, que se representa por x, y la operación se dispone así:

$$\frac{100}{400} = \frac{115,76}{x}$$

Explicación.—Como la proporción es discontinua, ó mejor dicho, como esta regla de tres simple es directa, porque la relación va de más á más, y como el término desconocido es un extremo, se multiplican los medios, y el producto se divide por el extremo conocido, así:

$$x = \frac{400 \times 115,76}{100} = 463,04$$

Como se ve, este resultado es igual al anterior, con la diferencia de un centavo menos.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para saber la cuantía en que se convierte un capital colocado á interés compuesto, se aplica la regla del interés simple, tantas veces cuantas unidades indique el tiempo. La cantidad que sirve de capital en el segundo período de tiempo, es el capital primitivo sumado con el interés, y así sucesivamente.*

PROBLEMAS

1.º Seis individuos cuentan, respectivamente, con 500, 700, 980, 3250, 25000 y 28400 sucres, y se convienen en contribuir con el 6 $^{o}/_{o}$, para la construcción de una casa de beneficencia. Cuánto debe dar cada uno?

2.° A los dueños de tres almacenes, cuyos valores ascienden á 30840, 50900 y 62580 sucres, se les exige el 25 $^{o}/_{o}$, para socorrer á 10 familias infelices. Cuánto corresponde á cada uno?

3.° Un individuo posee tres fundos, que valen 20306, 24680 y 30720 sucres, respectivamente, y tiene que pagar el 1 $^{o}/_{oo}$. Cuál es la contribución total?

4.° Seis haciendas están avaluadas, cada una, en 12800, 15600, 26340, 32850, 42960 y 64000 sucres, y los dueños tienen que satisfacer la contribución del 3 $^{o}/_{oo}$. ¿Cuánta cantidad debe consignar cada propietario?

5.° A dos comerciantes, que poseen 50700 y 80960 sucres, les exige el Gobierno el 8 $^{o}/_{oo}$, por vía de empréstito forzoso. Cuánto deben dar uno y otro?

6.° A un correo, que lleva 8000 sucres, se le pierden 160. ¿Cuál es el tanto por ciento que representa la pérdida?

7.° Un comerciante, que marcha á Guayaquil, pierde 480 sucres, los cuales son el 4 $^{o}/_{o}$. ¿Cuánto dinero tenía antes de la pérdida?

8.° ¿Cuál es el número que, aumentado con su 6 $^{o}/_{o}$, da por monto la suma de 19080 sucres?

9.° ¿Cuál es el número que, disminuído del 8 $^{o}/_{o}$, da 5704 sucres por diferencia?

10 ¿Qué interés producirá el capital 7900 sucres, colocado en un banco, durante 6 meses, al 1 por ciento mensual?

11 Un comerciante consigue en una casa fuerte la cantidad de 12600 sucres, con el plazo de 2 años, al 9 $^{o}/_{o}$ anual, y con la condición de pagar adelantado el interés. Cuál es este interés?

12 ¿Qué capital debe colocarse al 8 $^{o}/_{o}$ anual, para que, en 6 meses, produzca 64 sucres de ganancia?

13 ¿A qué tanto por ciento mensual debe darse la cantidad 300 sucres, para que, en 50 días, produzca 40 sucres de ganancia?

14 ¿Por cuántos meses debe colocarse el capital 3000 sucres, para que produzca 140 sucres de interés, al 8 $^{o}/_{o}$ anual?

15 Un heredero coloca en un banco, á interés compuesto, su fortuna de 2500 sucres, durante 6 años, al 4 $^{o}/_{o}$ anual. ¿En qué cuantía se convertirá dicha fortuna, al cabo de aquel tiempo?

16 Una señora, con el fin de asegurar su capital de 30000 sucres, lo coloca en una casa fuerte de Guayaquil, á interés compuesto, por 4 años, al 8 por ciento anual. ¿Cuál es la ganancia, y cuál es el monto?

17 ¿A cuánto ascenderán 3900 sucres, al 4 por ciento anual, capitalizados en 6 meses?

18 ¿Cuál es el interés compuesto de 700 sucres, en 2 años, al 6 por ciento anual?

LECCION DÉCIMAOCTAVA.

Del descuento.

En el comercio se hacen las compras *al contado ó á plazo.*

Se hacen *al contado*, cuando el comprador paga al vendedor el valor de las mercaderías, inmediatamente que se celebra la compra.

Se hacen *á plazo ó á crédito*, cuando el comprador no da inmediatamente el valor de las mercancías, y entonces firma un *documento* por el cual se compromete á pagar la cantidad inscrita en él, al cabo de cierto tiempo.

El documento se llama también *obligación ó pagaré.*

Ejemplo. Un individuo toma una factura de mercancías por 600 sucres, para pagarlos dentro de 5 meses.

Explicación.—A fin de asegurar al dueño de las mercancías el cumplimiento del pago, el comprador firma un documento por el cual se obliga á satisfacer los 600 sucres, al terminar los 5 meses. Pero sucede que el individuo consigue el dinero al cabo de 2 meses, y al mismo tiempo necesita el comerciante los 600 sucres. Como faltan todavía 3 meses para cumplirse el plazo, el comerciante resuelve rebajar un tanto por ciento, á fin de recibir lo demás del dinero. Por esta rebaja que se hace á la cantidad expresada en el pagaré, sucede que éste representa dos valores: uno *nominal*, y otro *real*, y se definen así:

Se llama *valor nominal* la cantidad inscrita en el documento, la cual debe pagarse cuando se cumpla el plazo.

Se llama *valor real, actual ó efectivo* la cantidad que se paga antes del vencimiento del plazo.

Escolio 1º En el comercio existen dos clases de documentos fiduciarios: unos se llaman *títulos de crédito*, como las acciones de banco, bonos, cédulas hipotecarias, etc., y otros se llaman *obligaciones*, como los pagarés, letras, vales, etc.

Escolio 2º La frase *valor nominal* se deriva del nombre dado á un título de crédito, así como la de *valor efectivo* se deriva del efecto que produce un pagaré, con motivo del descuento.

Se llama *vencimiento* el cumplimiento del plazo en que debe cancelarse la cantidad inscrita en el pagaré.

División del descuento.

Se divide en *descuento externo ó por fuera, y descuento interno ó por dentro.*

Descuento por fuera ó comercial es el que afecta al valor nominal del pagaré.

Descuento por dentro, justo ó verdadero es el que afecta al valor real del pagaré.

Condiciones del descuento.

Las condiciones del descuento son dos:

1ª *Debe ser proporcional al valor nominal del pagaré, siendo uno mismo el tiempo de la anticipación.*

2ª *Debe ser proporcional al tiempo de la anticipación, siendo uno mismo el valor nominal del pagaré.*

Descuento por fuera.

Fundados en las condiciones que anteceden, vamos á deducir la fórmula respectiva.

Representando por c el valor nominal del pagaré; por r, el tanto por ciento del descuento; por t, el tiempo de la anticipación, se hacen los siguientes raciocinios:

1.° Si el capital 100 gana r sucres de interés, en un mes ó en un año, claro está que en el tiempo t ganará r multiplicado por t, así: $r \times t$

2.° Si el valor nominal del pagaré fuera 100 sucres, el descuento sería $r \times t$.

3.° Si el valor nominal del pagaré fuera 1 sucre, el descuento sería 100 veces menor, esto es, r multiplicado por t y partido por 100, así:

$$\frac{r \times t}{100}$$

4.° Como el valor nominal del pagaré es c, claro está que el descuento será c veces mayor, así:

$$\frac{c \times r \times t}{100}$$

Designando por d el descuento, se tiene en definitiva:

$$d = \frac{c \times r \times t}{100} \quad \text{(1ª fórmula)}$$

Como se ve, esta fórmula es la misma del interés simple, con la diferencia de que el primer miembro está representado por d, mientras que en la otra lo está por g.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para averiguar ó buscar el descuento por fuera, se multiplica el valor nominal por la rata y por el tiempo de la anticipación, y el producto se divide por* 100.

Haciendo los mismos raciocinios que se hicieron en la lección anterior, para deducir las fórmulas 2ª, 3ª y 4ª del interés simple, se obtienen las otras tres, y son:

$$c=\frac{d\times 100}{r\times t} \quad \text{(2ª fórmula)}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para averiguar ó buscar el valor nominal de un pagaré, se multiplica el descuento por* 100, *y el resultado se divide por el producto que proviene de multiplicar la rata por el tiempo de la anticipación.*

$$r=\frac{d\times 100}{c\times t} \quad \text{(3ª fórmula)}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para averiguar ó buscar la rata, se multiplica el descuento por* 100, *y el resultado se divide por el producto que proviene de multiplicar el valor nominal por el tiempo de la anticipación.*

$$t=\frac{d\times 100}{c\times r} \quad \text{(4ª fórmula)}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para averiguar ó buscar el tiempo de la anticipación, se multiplica el descuento por* 100, *y el resultado se divide por el producto que proviene de multiplicar el valor nominal por la rata.*

Aplicación de la 1ª fórmula. ¿Cuál es el descuento por fuera de un pagaré de 600 sucres, que se cumple el 17 de Diciembre, y se descuenta el 11 de Octubre, al 9 % anual?

Según la fórmula respectiva, se tiene:

$$d=\frac{600\times 9\times 67}{360\times 100}=10,05 \quad \text{(descuento ó rebaja)}$$

Explicación.—Para encontrar el número 67, que expresa el tiempo, esto es, los días de la anticipación del pago, se resta el número 11 de 31 días que tiene el mes de Octubre, y resultan 20 días; á éstos se agregan los 30 que tiene el mes de Noviembre, y dan 50; luego se agregan á éstos los 17 del mes de Diciembre, y resultan 67.

Restando ahora el descuento 10,05 del valor nominal 600, resulta el valor real, así:

600,00	(valor nominal)
10,05	(descuento ó rebaja)
589,95	(valor real, actual ó efectivo).

La cantidad 600, inscrita en el documento, debía pagarse el 17 de Diciembre, porque en esta fecha se cumplía el plazo; pero por haber una anticipación de 67 días, la cantidad ha sufrido un 9 % de rebaja, y hay que pagar solamente 589,95; de suerte que el deudor se libra de pagar 10,05

Aplicación del método de la unidad.

Si del valor nominal 100 se rebajan ó se descuentan 9 sucres, claro está que de 1 sucre se descontará una cantidad 100 veces menor, esto es, 9 partido por 100, así: $\frac{9}{100}$

El descuento que representa este quebrado, se verifica en 360 días que hacen un año, una vez que el tanto por ciento es anual; luego en 1 día se descontará una cantidad 360 veces menor, así:

$$\frac{9}{360\times100},$$

y en 67 días se descontará una cantidad 67 veces mayor, así:

$$\frac{9\times67}{360\times100},$$

por consiguiente, del valor nominal 600 se descontará una cantidad 600 veces mayor, así:

$$\frac{600\times9\times67}{360\times100}=10,05.$$

Aplicación de la 2ª fórmula. ¿Cuál es el valor nominal de un pagaré, cuyo descuento por fuera, en 1 año, al 20 % anual, es de 2000 sucres?

Según la fórmula respectiva, se tiene:

$$c=\frac{2000\times100}{20\times1}=10000 \text{ (valor nominal)}$$

Aplicación del método de la unidad.

Si 20 sucres de descuento provienen de un valor nominal 100, en 1 año, es claro que 1 sucre de descuento provendrá, en el mismo tiempo, de un valor nominal 20 veces menor, así: $\frac{100}{20}$; luego 2000 sucres de descuento provendrán, en igual tiempo, de un valor nominal 2000 veces mayor, así:

$$\frac{2000 \times 100}{20} = 10000$$

Aplicación de la 3ª fórmula. ¿A qué tanto por ciento ha sido descontado un pagaré de 10000 sucres, durante un año de anticipación, y cuyo descuento por fuera es de 2000 sucres?

Según la formula respectiva, se tiene:

$$r = \frac{2000 \times 100}{10000 \times 1} = 20\ \%$$

Aplicación del método de la unidad.

Buscar el tanto por ciento de descuento, equivale á buscar el descuento del valor nominal 100. Por esto, si del valor nominal 10000 del pagaré se descuentan 2000 sucres, durante un año de anticipación, es claro que de 1 sucre de valor nominal se descontará, en el mismo año, una cantidad 10000 veces menor, así: $\frac{2000}{10000}$; luego del valor nominal 100 se hará un descuento 100 veces mayor, así:

$$\frac{2000 \times 100}{10000} = 20\ \%$$

Aplicación de la 4ª fórmula. ¿Por cuántos años de anticipación ha sido descontado un pagaré de 10000 sucres, al 20 % anual, y cuyo descuento por fuera es de 2000 sucres?

Según la fórmula respectiva, se tiene:

$$t = \frac{2000 \times 100}{10000 \times 20} = 1 \text{ año}$$

Aplicación del método de la unidad.

Si del valor nominal 100 se descuentan 20 sucres, en 1 año, es claro que, para hacer este mismo descuento de 1 sucre de valor nominal, se necesita un tiempo de anticipación 100 veces mayor, esto es, 1 multiplicado por 100, así: 1×100; y para descontar 1 sucre de este valor nominal, ha menester un tiempo 20 veces menor, así:

$$\frac{1 \times 100}{20}$$

Ahora, para descontar 1 sucre de 10000, no cabe duda que es necesario un tiempo de anticipación 10000 veces menor, así:

$$\frac{1 \times 100}{10000 \times 20}$$

y para descontar 2000 sucres, es natual que se necesita un tiempo 2000 veces mayor, así:

$$\frac{2000 \times 1 \times 100}{10000 \times 20} = 1 \text{ año}$$

Escolio 1º La operación del descuento tiene su origen en un *sentimiento de equidad*; pues es muy justo que el deudor que se obliga á pagar la cantidad inscrita en el documento, antes de cumplirse el plazo, obtenga una rebaja por el tiempo de la anticipación, á fin de no cancelar el total de la deuda.

Escolio 2º Cuando se quiere saber el valor real ó efectivo, se resta el descuento del valor nominal, y la diferencia expresa dicho valor efectivo. En el ejemplo anterior, se resta el descuento 2000 sucres del valor nominal 10000, y se obtiene 8000 de diferencia, que es el valor real.

Escolio 3º La primera fórmula se aplica solamente cuando el tiempo es muy corto; pues si éste es dilatado, se obtiene entonces un despropósito, por no decir un absurdo, porque el descuento resulta igual al valor nominal del pagaré, ó mayor que el de éste.

Ejemplo 1º ¿Cuál es el descuento externo de un pagaré de 400 sucres, en 20 años, al 5 % anual?

Según la 1ª fórmula, se tiene:

$$d = \frac{400 \times 5 \times 20}{100} = 400 \text{ (igual al valor nominal)}$$

Ejemplo 2º ¿Cuál es el descuento por fuera de un pagaré de 800 sucres, en 16 años, al 9 % anual?

Según la misma fórmula, se tiene:

$$d = \frac{800 \times 9 \times 16}{100} = 1152 \text{ (mayor que el valor nominal)}$$

Descuento por dentro.

Para obtener la fórmula de esto descuento, se representa por c el valor nominal; por r, el tanto por ciento; por t, el tiempo de la anticipación, y se hacen los siguientes raciocinios:

1º Si el capital 100 gana r sucres de interés, en 1 mes ó en 1 año, claro está que en el tiempo t ganará r multiplicado por t, así: $r \times t$ [descuento del capital 100]; luego los 100 sucres, al cabo del tiempo t, se convertirán en la cuantía $100+r \times t$.

2º Si el valor nominal del pagaré fuera de 100 sucres, el descuento sería $r \times t$.

3º Si el valor nominal del pagaré fuera de 1 sucre, claro está que el descuento sería $100+r \times t$ veces menor, así:

$$\frac{r \times t}{100+r \times t}$$

4º Pero como el valor nominal del pagaré es de c sucres; es natural que el descuento será c veces mayor; así:

$$\frac{c \times r \times t}{100+r \times t}$$

Designando por *d prima* el descuento por dentro, se tiene en definitiva:

$$d'=\frac{c \times r \times t}{100+r \times t} \quad \text{(fórmula del descuento por dentro)}$$

Ejemplo. ¿Cuál es el descuento por dentro de una obligación de 8000 sucres, que debe ser pagada al cabo de 2 años, al 6 % anual?

Según la fórmula, se tiene:

$$d'=\frac{8000 \times 6 \times 2}{100+6 \times 2}=\frac{8000 \times 12}{100+12}=\frac{96000}{112}=857{,}14 \text{ [descuento]}$$

Explicación.—Los números 6 y 2 figuran como factores en el numerador, y como sumandos en el denominador. Por esto no pueden suprimirse, y en el denominador hay que sumar 100 con el producto 12. Restando ahora el descuento de 8000, que es el valor nominal, se obtiene el valor real ó efectivo, así:

8000,00	[valor nominal]
857,14	[descuento]
7142,86	valor real que debe entregarse

en la actualidad al acreedor ó comerciante, en virtud de hacerse el pago con 2 años de anticipación; pero si se cumplieran estos 2 años, entonces habría que pagar toda la cantidad, esto es, los 8000 sucres.

Injusticia del descuento por fuera.

Se dice que este descuento *es injusto*, porque perjudica al dueño del pagaré en una cantidad igual al interés que produce el descuento por dentro; pues el valor real del pagaré, sumado con sus intereses, debe producir el valor nominal, y esto no sucede en el descuento por fuera, y sí en el descuento por dentro.

Ejemplo. ¿Cuál es el descuento por fuera de un pagaré de 8000 sucres, en 2 años, al 6 $^o/_o$ anual?

Según la fórmula respectiva, se tiene:

$$d=\frac{8000\times 6\times 2}{100}=960 \text{ [descuento por fuera]}$$

Explicación 1ª—Para averiguar el interés que produce este descuento, se aplica la 1ª fórmula del interés simple, así:

$$g=\frac{960\times 6\times 2}{100}=115{,}20 \text{ [interés del descuento por fuera]}$$

Ahora, para encontrar el valor real, se resta el descuento del valor nominal, así:

$$\begin{array}{rl} 8000 & \text{[valor nominal]} \\ 960 & \text{[descuento por fuera]} \\ \hline 7040 & \text{[valor real]} \end{array}$$

Explicación 2ª—Para averiguar el interés que produce este valor real, se aplica la 1ª fórmula del interés simple, así:

$$g=\frac{7040\times 6\times 2}{100}=844{,}80 \text{ [interés del valor real]}$$

Sumando el valor real 7040 con el interés 844,80, debía producir el valor nominal 8000, y sin embargo, no sucede así, según se ve á continuación:

$$\begin{array}{r} 7040{,}00 \\ 844{,}80 \\ \hline 7884{,}80 \end{array}$$

Pero sumando esta cantidad 7884,80 con 115,20, sí se obtiene el valor nominal 8000 sucres.

Justicia del descuento por dentro.

Se dice que este descuento *es justo*, porque no perjudica al deudor ni al acreedor del pagaré.

En efecto, el descuento externo se compone del descuento por dentro, más el interés de este interés.

Ejemplo. ¿Cuál es el descuento por dentro de un pagaré de 8000 sucres, en 2 años, al 6 % anual?

Según la fórmula respectiva, se tiene:

$$d=\frac{8000\times6\times2}{100+6\times2}=857{,}14 \text{ [descuento por dentro]}$$

Explicación 1ª—Para averiguar el interés que produce este descuento, se aplica la 1ª fórmula del interés simple, así:

$$g=\frac{857{,}14\times6\times2}{100}=102{,}86 \text{ [interés del descuento por dentro]}$$

Ahora, para encontrar el valor real ó efectivo, se resta el descuento del valor nominal, así:

8000,00	[valor nominal]
857,14	[descuento por dentro ó interno]
7142,86	[valor real]

Explicación 2ª—Para averiguar el interés que produce este valor real, se aplica la 1ª fórmula del interés simple, así:

$$g=\frac{7142{,}86\times6\times2}{100}=857{,}14 \text{ [interés]}$$

Sumando el valor real con el interés, se obtiene el valor nominal, así:

$$\begin{array}{r} 7142{,}86 \\ 857{,}14 \\ \hline 8000{,}00 \end{array}$$

Sumando el descuento interno 857,14 con su interés 102,86, se obtiene el descuento externo 960.

Restando el valor real 7040 del otro valor real 7142,86, se obtiene por diferencia la misma cantidad 102,86, que es el interés del descuento por dentro.

Como se ve, si el dueño del pagaré, que es el comerciante, permite que se haga el descuento por fuera, recibirá solamente 7040 sucres, y perderá 102,86; pero si el descuento se hiciera por dentro, entonces recibiría 7142,86, en que están incluídos los 102,86, que es el interés que produce el valor real 857,14 al 6 °/o anual, hasta que se cumpla el plazo de los 2 años.

Comparación de los dos descuentos.

$\frac{8000\times6\times2}{100}=960$ [descuento por fuera ó injusto]

$\frac{960\times6\times2}{100}=115{,}20$ (interés del descuento por fuera)

$\frac{8000\times6\times2}{100+6\times2}=857{,}14$ (descuento por dentro ó justo)

$\frac{857{,}14\times6\times2}{100}=102{,}86$ (interés del descuento por dentro)

8000	valor nominal
960	descuento por fuera
7040	valor real

8000,00	valor nominal
857,14	descuento por dentro
7142,86	valor real

7142,86	
7040,00	
102,86	diferencia de los valores reales.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para averiguar ó buscar el descuento por dentro, se multiplica el valor nominal por la rata y por el tiempo, y el resultado se divide por la cantidad 100, sumada con el producto de la rata y el tiempo; el cociente se resta del valor nominal, y la diferencia indica el valor real.*

(Se llama *descuento* la rebaja que se hace al valor nominal de un pagaré, antes de cumplirse el plazo).

SUPLEMENTO.

Como en el comercio se usan diariamente *los pagarés, las facturas, las letras de cambio y los chekes*, conviene sobre manera tener perfecto conocimiento de todos ellos. Por tal motive, vamos á ampliar la presente lección.

Cuando un individuo toma á crédito una factura de mercancías, el comerciante, siguiendo la ley establecida por la costumbre, concede dos, cuatro y hasta seis meses de plazo, según sea más ó menos considerable el valor de ellas, para que el fiador pueda pagar.

En virtud de que el comprador no paga inmediatamente el importe de las mercancías, firma un *documento* por el cual se compromete á satisfacer dicho importe, al cabo de seis meses, por ejemplo, que le da de plazo el comerciante.

Pagaré es una obligación por una cantidad que ha de satisfacerse en un tiempo determinado.

Modelo de pagaré.

Nº 26 — Por 500 $

Debo y pagaré, en esta ciudad, ó en el lugar en que se me reconvenga ó se me cite, de la fecha en seis meses fijos, á la orden del señor Wenceslao Puente la cantidad de *quinientos sucres*, en moneda que circule en el país, por igual valor de mercancías que le he comprado para la reventa. Las tengo recibidas á mi satisfacción, y sin lugar á hacer ningún reclamo; por tanto, renuncio los beneficios que conceden los artículos 190, 191 y 194 del Código de Comercio.

Al fiel cumplimiento de lo expresado, obligo todos mis bienes habidos y por haber, conforme á derecho. Renuncio igualmente domicilio, vecindad y cualquiera otra excepción que pueda favorecerme en la vía ejecutiva ú ordinaria.

Me obligo, igualmente, á pagar el interés del uno por ciento mensual, durante todo el tiempo de demora, esto es, desde el vencimiento del plazo hasta la total cancelación del *pagaré*, pero capitalizando los intereses cada seis meses.

En caso de recurrir á los juzgados, me obligo, finalmente, á pagar el 10 % de comisión por la cobranza, así como todos los gastos judiciales y extrajudiciales que se hagan para efectuar el cobro.

Quito, Diciembre 5 de 1896.

MANUEL ORTIZ ARGOTI.

Garantizo el valor del presente documento, y me constituyo fiador y llano pagador, y hago propia la deuda ajena, para lo cual renuncio todas las leyes y excepciones que puedan favorecerme.

Fecha ut supra.

Theódulo Burgos.

Escolio. La condición impuesta en los documentos de capitalizar los intereses cada seis meses, es *ilegal*, y al mismo tiempo *injusta*; pues el artículo 2197 del Código Civil *prohibe estipular interéses de intereses.*

Interés legal és el de seis por ciento al año (Inciso 1° del artículo 2194 del mismo Código)

El interés comercial no podrá exceder del doble del interés legal. (Artículo 2193)

Los usureros cobran 10 *centavos mensuales por sucre;* de suerte que 12 sucres, en un mes, les producen 1 sucre 20 centavos; y en un año, 14 sucres 40 centavos.

Una persona de conciencia, aun cobrando el 1,20 °/o mensual, necesita 100 sucres, para que, en un año, le produzcan los 14 sucres 40 centavos que cobran los usureros por sólo el *miserable capital de* 12 *sucres!!!!*

De las facturas.

Se llama *factura* una relación detallada de los objetos ó artículos comprendidos en una venta, en una remesa ó en otra operación comercial.

La factura que se entrega al comprador, al mismo tiempo que se le entregan las mercancías, se llama *factura simple.*

La que se remite por correo ó de otra manera al comprador, y se le indica la vía por la que le son enviadas las mercancías, se llama *factura de expedición ó factura de empaque.*

Toda factura debe tener los siguientes requisitos:

1º El lugar y la fecha en que se hace la operación mercantil.

2º Los nombres y apellidos del vendedor y del comprador.

3º El número, la clase y el precio de las mercancías.

Modelo de facturas.

Nº 2920. Guayaquil, Diciembre 20 de 1896.

El Sr. MANUEL ORTIZ ARGOTI DEBE Á

N. NORERO & CÍA. Quito.

Por lo siguiente comprado á seis meses de plazo.

(No se admitirá reclamo alguno, después de haber salido las mercaderías del almacén.)

78	Piezas de Tela Ecuatoriana	á $	7	75	604	50
36	„ „ Género de familia	„ „	5	50	198	00
56	„ „ grano de oro	„ „	7	50	420	00
57	„ „ lienzo "Pichincha"	„ „	5	12	291	84
14	„ „ choleta asargada	„ „	23		322	00
2	qq. de cera	„ „	48		96	00
6	„ „ plomo en varillas	„ „	15		90	00
		$			2022	34
	GASTOS.					
	Empaque	$	6	25		
	Embarque	„	4	37		
	Encerado	„	25	00		
			35	62	35	62
	TOTAL	$			2057	96
	S. E. ú O.					
	Pagaré Nº 2920 para Junio, 20 de 1897					

Letras de cambio.

Muchas veces sucede que, por haberse cumplido el plazo, el comerciante da una *orden por escrito* á su deudor, que reside en distinta ciudad, para que pague á un tercero la cantidad inscrita en el documento. Esta orden por escrito constituye la *letra de cambio* en el comercio, y se define así:

Letra de cambio es una libranza que, de un lugar á otro, gira un comerciante ó un banquero contra un individuo que tiene fondos del girador, para que, en un tiempo determinado, pague á un tercero la cantidad mencionada en ella.

También se llama *letra de cambio* un contrato de mutación, por el cual se obliga el negociante á trasladar, de un punto á otro, los fondos que sobran ó faltan; y promete que, en determinado día, y en el lugar que se le designe, recibirá ó entregará la cantidad de dinero que se contrata, y en la moneda que se estipula.

Cuando el comerciante tiene un corresponsal en otra plaza, como es lo natural, sucede que el primero da al segundo una ó más órdenes por escrito, para que pague cierta ó ciertas cantidades. Estas órdenes por escrito se llaman *cartas de aviso.*

El origen de la letra de cambio se atribuye á los judíos, en tiempo de las Cruzadas.

La letra de cambio es muy útil y muy ventajosa, según lo comprueba la experiencia de todos los días. Con tal motivo, un célebre autor ha dicho que "la invención de la letra de cambio es un acontecimiento que forma en la historia del comercio una época casi comparable con la del descubrimiento de la brújula y con el de la América. La letra de cambio ha franqueado los capitales muebles; ha facilitado sus movimientos y su disposición; ha creado, en fin, una inmensa suma de crédito."

Personas que intervienen en una letra de cambio.

Son las siguientes: librador, tomador, pagador, tenedor y aceptante.

Se llama *librador, dador ó girador* el individuo que firma la letra, y no es otro que el comerciante ó un banquero; y por lo mismo, contrae el deber de hacer pagar el valor de ella.

(*Banquero* es el jefe de una casa de comercio de banca. *Banca* es una clase de comercio, que consiste en operaciones de giro, de cambio y de descuento, como también en abrir créditos, en llevar cuentas corrientes, en comprar y vender efectos públicos, especialmente por cuenta de otros, en recompensa de un interés, que se llama *comisión.* Por aquí se juzga que el banquero se ocupa en recibir en depósito el dinero de los particulares, en dar á mutuo el del comerciante, y en negociar letras de cambio).

Se llama *tomador ó beneficiario* el que adquiere la letra de cambio.

Se llama *pagador ó aceptante* el que debe cancelar el valor de la letra.

Se llama *tenedor ó portador* el actual propietario de la letra, en virtud de estar girada ó endosada á su favor.

Se llama *endosante* el que trasfiere á otro la propiedad de la letra, en virtud del endoso que se escribe en el reverso de ella.

Requisitos que debe tener una letra de cambio.

Son los siguientes:

1º El lugar y la fecha en que es girada.

2º La cantidad que debe pagarse, determinando la clase de moneda, la cual, además de expresarse en números, se escribe á la derecha, en la parte superior, y al frente de la fecha.

3º El tiempo en que debe hacerse el pago.

4º El nombre y apellido de la persona á cuya orden debe pagarse el valor de la letra.

5º En el cuerpo de ésta se escribe la cantidad en letras, con el objeto de que no sea falsificada fácilmente.

6º Debe determinarse si la letra es *por valor recibido* en metálico, en billetes ó en objetos mercantiles, lo cual significa que el girador se da por satisfecho de cualquiera de estos modos, ó si es por *valor* en cuenta ó entendido, lo cual quiere decir que el girador y el tomador se reservan abonarse y cargarse, respectivamente, el valor de la letra, ó se han escrito para poder efectuar el giro.

7º La firma autógrafa del girador ó de la persona que firme en su nombre, con poder para ello.

8º El nombre, el apellido y el domicilio de la persona á cuyo cargo se gira.

Toda letra de cambio puede ser girada á *la vista, ó á dos ó más días vista.*

Una letra de cambio debe ser aceptada ó protestada á su presentación, ó cuando más, dentro de 24 horas, contadas desde el momento de la presentación; pero una vez transcurrido este tiempo, el aceptante tiene que responder de los daños y perjuicios que cause por la demora del pago, al tiempo del vencimiento.

La aceptación puede ser total ó parcial, y ella se expresa con la palabra *acepto ó aceptamos.* Debe firmarla el aceptante, por lo común, en el reverso de la letra.

La negativa de una aceptación se hace constar con estas palabras: "Protesto por no tener carta de aviso, ó por no tener fondos del girador," por ejemplo.

El hecho de ser aceptada una letra impone al aceptante la obligación de pagar el valor de ella al legítimo portador.

Plazos que se cuentan para la cancelación de las letras.

Toda letra debe ser pagada al vencimiento del plazo. La expresión *á la vista* significa que el valor de la letra debe ser satisfecho en el instante en que ella es presentada al pagador.

La expresión *á la orden* significa que debe pagarse la letra, no sólo al verdadero acreedor, sino á cualquiera persona que se presente en su lugar, con endoso á su orden.

El plazo de una letra girada á 15 días vista, por ejemplo, se cuenta desde el siguiente al de la aceptación ó del protesto, si ella no fuere aceptada.

Cuando el tenedor de una letra recibe el correspondiente valor, debe poner sobre ella las siguientes palabras: *Cancelada*; á continuación la fecha; luego la firma de él, que comprende el nombre, el apellido y la rúbrica.

Tiempo durante el cual deben presentarse las letras, para su aceptación ó protesta.

El Código de Comercio señala tres meses para las letras giradas de una plaza del Ecuador á otra del mismo Ecuador.

Para las letras giradas de cualquiera plaza del Continente Americano contra una del Ecuador, señala seis meses.

Para las letras giradas de cualquiera plaza de Europa contra una del Ecuador, señala ocho meses.

En cuanto á las letras giradas de cualquiera plaza del Ecuador contra la de un país extranjero, deben ser presentadas, para su aceptación ó protesta, en el tiempo que señalen las leyes del respectivo país.

Del endoso de las letras.

Se llama *endoso* el traspaso de la propiedad de una letra de cambio á favor de otra persona.

El endoso debe contener los siguientes requisitos:

1º El nombre y el apellido de la persona á cuyo favor se transfiere la letra.

2º La determinación de si se recibe el valor en efectivo, en mercancías ó en cuenta.

3º La fecha en que se hace el traspaso.

4º La firma del endosante ó de las personas legalmente autorizadas para firmar por él.

5º El endoso se escribe en el reverso de la letra, y al través de ésta.

Modelo de endoso.

—:—

Páguese al Sr. Manuel Ortiz Argoti de Quito, ó á su orden, valor recibido en efectivo.

Tulcán, Diciembre 22 de 1896.

Higinio Caicedo.

Explicación.—El señor Higinio Caicedo ha comprado unas mercancías á la señorita Flora Ortiz por 400 sucres, para pagarle en moneda de ley, la que difícilmente se consigue en Tulcán. Compra, pues, una letra al señor Juan Martínez, quien tiene fondos en Quito, en poder de Don Juan José Narváez, y la remite endosada al señor Manuel Ortiz Argoti, para que, á 15 días vista, reciba la cantidad de poder del señor Narváez, una vez que el señor Ortiz, hermano de la señorita Flora, es el propio dueño de las mercaderías. El señor Martínez, por su parte, avisa por medio de carta al señor Narváez que ha girado una letra de 400 sucres contra él, para que la pague.

Modelo de una letra primera de cambio.

Talón Nº 38

Cantidad. 4000 $

Contra N. Norero & Cía.

Pagadera en Guayaquil.

A favor del Sr. Durán & Cía.

Días vista 15.

Fecha. Quito, Diciembre 30 *de* 1896.

Por 4000 $

Quito, Diciembre 30 *de* 1896.

A quince días vista, se servirá Ud. pagar, por esta primera de cambio, á la orden del Sr. Durán & Cía., la cantidad de cuatro mil sucres, valor recibido del Sr. Juan José Narváez, que cargará Ud. en cuenta, según aviso de

Su atento S. S.

Maximiliano Marín.

Al Sr. N. Norero & Cía.
Guayaquil.

Nº 38

Explicación.—El girador es Maximiliano Marín; el tomador, Juan José Narváez; el tenedor, Durán & Cía.; N. Norero & Cía. es la persona que debe pagar el dinero en Guayaquil al señor Durán & Cía.

Como se ve claramente, el señor Juan José Narváez tiene que pagar 4000 sucres en Guayaquil al señor Durán & Cía. Para lo cual, compra una letra al señor Marín; y éste la gira contra el señor Norero, en virtud de tener fondos en poder de él, para que pague los 4000 sucres al señor Durán, después de 15 días de aceptada la letra. El talón queda en el talonario, es decir, en el libro en que están cosidos los talones. La letra se desprende del talón, siguiendo la línea que está señalada por una serie de agujeros. En el modelo que acabamos de poner, dicha línea está marcada con puntos.

Modelo de una segunda de cambio:

Talón Nº 39

Cantidad. 500 $

Contra Madinyá y Avilés.

Pagadera en Guayaquil.

A favor de los Sucesores de Bunge & Cía.

Días vista 8.

Fecha: Quito, Diciembre 30 *de* 1896.

Por 500 $

Quito, Diciembre 30 *de* 1896.

A ocho días vista, se servirá Ud. pagar, por esta segunda de cambio, no habiéndolo hecho por la primera, á la orden de los "Sucesores de Bunge & Cía.", la cantidad de quinientos sucres, valor recibido del Sr. Jacinto Fierro, que cargará Ud. en cuenta, según aviso de

Su atento S. S.

Julio Urrutia.

A los Sres. Madinyá y Avilés.
Guayaquil.
Nº 39

Escolio. La explicación es semejante á la de la letra anterior.

Modelo de una letra que sólo contiene girador, portador y aceptante.

Talón Nº 40

Cantidad. 1000 $

Contra Manuel Orrantia.

Pagadera en Guayaquil.

A favor de Justo Arellano.

Días vista 10.

Fecha. Quito, Diciembre 30 *de* 1896.

Por 1000 $

Quito, Diciembre 30 *de* 1896.

A diez días vista, se servirá Ud. pagar, por esta tercera de cambio, no habiéndolo hecho por la primera ni por la segunda, á la orden del Sr. Justo Arellano, la cantidad de mil sucres, valor recibido de dicho señor, que cargará Ud. en cuenta, según aviso de

Su atento S. S.

Salomón Sturman.

Al señor Manuel Orrantia.
Guayaquil.
Nº 40

Explicación.—El señor Justo Arellano compra una letra por 1000 sucres al señor Sturman, y se va á Guayaquil llevando la letra. Tan pronto como llega en esa ciudad, se presenta ante el señor Orrantia, con el fin de que le entregue los 1000 sucres para emplearlos en negocios. El señor Orrantia, que tiene dinero del señor Sturman, acepta la letra, y la paga á los diez días vista, ó antes, si quisiere, según carta de aviso del señor Sturman.

Modelo de una letra ó recibo en que sólo intervienen el girador y el aceptante.

Talón Nº 41	POR 8000 $
Cantidad. 8000 $	*Quito, Diciembre* 30 *de* 1896.
Contra N. Osa & Cía.	*A seis días vista, se servirá Ud. pagar, por esta única de cambio, á mi propia orden, la cantidad de ocho mil sucres, valor en mi cuenta, que cargará Ud. en la misma, según aviso de*
Pagadera en Guayaquil.	*Su atento S. S.*
A favor de Mateo Moscoso.	MATEO MOSCOSO.
Días vista 6	*Al Sr. Norberto Osa & Cía. Guayaquil.*
Fecha. Quito, Diciembre 30 *de* 1896.	*Nº* 41

Explicación.—El Sr. Mateo Moscoso se va á Guayaquil, y no cuenta con recursos sino para el viaje; pero como tiene fondos en poder de Norberto Osa & Cía., gira una letra de 8000 sucres contra dicho señor, y la lleva el mismo señor Moscoso. Una vez puesto en aquella ciudad, se presenta ante el Sr. Osa, y le pide los 8000 sucres para hacer negocios con éstos. El señor Osa le da el dinero, después de seis días de aceptada la letra.

(*Escolio* 1º La cancelación puede escribirse también al pie de la letra, en el reverso, y al través ó á lo largo de la letra).

(*Escolio* 2º La aceptación de una letra puede escribirse también así: *Aceptada*; en seguida la fecha, y por último la firma. Esto se hace en el reverso, y al través ó á lo largo de la letra).

Modelo de letras que usa el Tesorero de Hacienda de la provincia de Pichincha.

Talón Nº 25

Valor. Quinientos sucres.

Fecha. Enero 2 *de* 1897.

Orden. Julio Urrutia.

A quince días vista.

Cargo. Tesorero del Guayas.

Guayaquil.

El Consignante,

Julio Urrutia.

TESORERÍA DE HACIENDA DE LA PROVINCIA DE PICHINCHA.

Tesorería de Hacienda de la provincia de Pichincha.

Nº 25 — POR 500 $

Quito, 2 *de Enero de* 1897.

A quince días vista, sírvase Ud. pagar, por esta única de cambio, á la orden del señor Julio Urrutia, la cantidad de

quinientos sucres,

que debitará en cuenta á esta Tesorería.

FÉLIX G. RUBIO A.

Sr. Tesorero de la provincia del Guayas. Guayaquil.

Explicación.—Por no haber enteramente fondos, el Ministro de Hacienda ordena al Tesorero, por medio de una nota, que gire una letra contra la caja fiscal de Guayaquil, y á favor del señor Urrutia, para que se haga pago de los 500 sucres, importe de unos vestuarios que, por contrato, ha mandado á trabajar, con destino á uno de los batallones de esta plaza de Quito. El señor Urrutia recibe la letra en cambio del vale y de los comprobantes que consigna en la Tesorería; y una vez endosada la letra al señor Manuel Orrantia, por ejemplo, la remite á Guayaquil, para que le reciba el dinero, á los quince días de aceptada la letra.

El Ministro de Hacienda, por su parte, oficia al Tesorero de la provincia del Guayas, por órgano de la Gobernación de allá, para que cancele la letra á los 15 días.

Escolio. Todos los Tesoreros usan de letras iguales al modelo anterior.

Modelo de letras que usa la "Sucursal del Banco Comercial y Agrícola" establecida en Quito.

Nº 1560

BANCO COMERCIAL Y AGRICOLA

SUCURSAL EN QUITO.

POR 300 $

Quito, 2 de Enero de 1897.

Compañía anónima.—Capital 2'000.000

A tres días vista, se servirá Ud. mandar pagar, por esta única de cambio, á la orden del Sr. Manuel Ortiz Argoti, la cantidad de

trescientos sucres,

valor recibido, que cargará Ud. en cuenta, según aviso de

S. S.

Por el Banco Comercial y Agrícola, Sucursal en Quito,

JULIO BURBANO AGUIRRE,
Gerente.

Al Banco Comercial y Agrícola.

Guayaquil.

Explicación.—El Sr. Ortiz tiene que pagar 300 sucres al señor N. Nórero & Cía., y compra una letra á la Sucursal al 1 %, esto es, consigna 303 sucres, y en cambio recibe la letra, la misma que remite endosada á Guayaquil al Sr. Norero, para que reciba los 300 sucres del Banco Comercial y Agrícola, á los tres días de aceptada dicha letra.

La Sucursal, por su parte, manda una carta de aviso al Banco, para que pague el valor de la letra, á los tres días vista.

Si por cualquiera circunstancia no llega pronto la *carta de aviso,* el Banco se niega á aceptar la letra, y con más razón á pagarla.

La manera como el Sr. Ortiz endosa la letra es la siguiente:

Páguese por mí á los señores N. Norero & Cía.

Quito, 2 de Enero de 1897.

MANUEL ORTIZ ARGOTI.

Como se ve, el endoso se escribe en el reverso de la letra, y al través de ésta.

Hecho esto, el Sr. Ortiz remite la letra al Sr. Norero, inclusa en una carta, y de ésta deja copia en el libro respectivo.

Modelo de letras de cambio que gira el Tesorero Fiscal de la provincia de Pichincha contra el Banco Comercial.

Nº 48

Valor. Dos mil quinientos sucres.

Fecha 6 de Marzo de 1897

Orden. Ricardo Espinosa.

A tres días vista.

Cargo.—Banco Comercial y Agrícola.

Guayaquil.

El Consignante,

RICARDO ESPINOSA.

TESORERIA DE HACIENDA DE LA PROVINCIA DE PICHINCHA.

Tesorería de Hacienda de la provincia de Pichincha.

Nº 48 POR 2500 $

Quito, 6 de Marzo de 1897.

A tres días vista, se servirán Uds. pagar, por esta única de cambio, á la orden del señor Ricardo Espinosa, la cantidad de

dos mil quinientos sucres,

valor recibido que cargarán Uds. en cuenta de esta Tesorería.

FÉLIX G. RUBIO A.

A los Sres. Gerentes del Banco Comercial y Agrícola.

Guayaquil.

De los chekes.

Se llama *cheke* una orden que sirve al girador para sacar, en todo ó en parte, los fondos que ha depositado en un banco, en poder de un comerciante ó en el de un banquero.

Se llama *depósito* la acción y efecto de poner cosas de valor bajo la custodia de persona abonada, con la obligación de responder por ellas cuando se le pidan.

El depósito de dinero es de tres maneras: *á la vista, á plazo y en cuenta corriente.*

Depósito á la vista es aquel en que el depositador puede sacar su dinero en cualquier día.

Escolio. Estos depósitos se hacen ordinariamente por pocos días, y no producen interés al depositante.

Depósito á plazo es el que se coloca por un tiempo determinado, mediante un interés convencional que se paga al depositante.

Depósito en cuenta corriente es aquel en que el depositador puede sacar su dinero por partes, según lo necesite.

Escolio. Cuando se hace un depósito en cuenta corriente, el depositario recibe dos libros. En el uno, y al lado del *Crédito*, sienta todas las entregas que hace al depositador. En cambio, éste sienta en el *Débito* todas las cantidades que saca del depósito.

El otro libro es el de chekes que tiene el depositador; y cuando quiere sacar una parte del dinero, no hace sino girar un cheke. En el talón, que queda en el libro, después que se desprende el cheke, se anota el número de éste, como también la fecha, el nombre y el apellido de la persona á cuyo favor se hubiere girado el cheke; y por último, se anota la cantidad.

Diferencia entre el cheke y la letra de cambio.

El cheke se gira á la vista, en virtud de estar listo el dinero; la letra de cambio se gira comúnmente á tres ó más días vista, á consecuencia de no estar listo el dinero; el cheke se gira contra una misma plaza; la letra de cambio, contra una plaza distinta.

Modelo de chekes que usa el Tesorero de Hacienda de la provincia de Pichincha.

Talón N° 20

Quito, 4 *de Enero de* 1897

A favor de Manuel E. Barrera.

628 $

BANCO COMERCIAL Y AGRÍCOLA.—GUAYAQUIL.

Por 628 $

Quito, 4 *de Enero de* 1897.

Compañía anónima.—Capital 2'000.000

El Banco Comercial y Agrícola pagará á la vista al señor Manuel E. Barrera la cantidad de

seiscientos veintiocho sucres,

sin más recibo.

El Tesorero de Hacienda,

Félix G. Rubio A.

N° 20

Explicación.—El Sr. Manuel E. Barrera, empleado de la Gobernación de Pichincha, y habilitado al mismo tiempo, se presenta ante el Sr. Tesorero de Hacienda, y exige que le pague los sueldos de todo el personal, por el mes de Diciembre de 1896, según el respectivo presupuesto que lleva. El Sr. Tesorero nó cuenta con un centavo en ese instante; pero tiene 10000 sucres depositados en la "Sucursal del Banco Comercial y Agrícola", y gira un cheke contra la expresada Sucursal.

El Sr. Barrera, una vez que recibe los 628 sucres, previa presentación del cheke á uno de los dos gerentes, escribe en el reverso del cheke, y al través de éste, las siguientes palabras:

Cancelado.

MANUEL E. BARRERA.

ó también:

Recibí.

MANUEL E. BARRERA.

No se pone la fecha, porque todo cheke se gira generalmente á la vista, y es pagado en el mismo día, en virtud de haber dinero listo.

Escolio. Todo el que tiene dinero depositado en un Banco, usa de chekes iguales al modelo anterior.

Ligera exposición sobre los Bancos.

Banco es un establecimiento público de crédito, formado por acciones, y constituído en Sociedad Anónima, ó fundado por particulares, con arreglo á determinadas leyes.

Sociedad anónima es la que no tiene razón social, ni se designa por ninguno de los socios, sino por el objeto para que se forma.

Acción es una de las partes que componen el capital de una Sociedad ó Establecimiento Comercial.

Accionista es el dueño de una ó varias acciones en una Sociedad Comercial ó Industrial.

Banco de emisión es el que pone billetes en circulación, para que sean recibidos como moneda.

Moneda es un signo representativo del precio de las cosas, para hacer efectivos los contratos y cambios. Se la representa por piezas acuñadas de oro, de plata ó de cobre, y generalmente en figura redonda.

Banco de depósito es el que recibe dinero para tenerlo á disposición del depositante.

Banco de descuento es el que presta dinero á los comerciantes ó á los particulares, y descuenta documentos ó pagarés, mediante cierto interés.

El capital de un Banco es la cantidad adelantada que entregan los accionistas, para atender á las operaciones.

Los Bancos son administrados por un Directorio, y los miembros son elegidos por los accionistas. Los principales empleados son los Gerentes, los Cajeros, y uno ó más Contadores, &., &.

Escolio. La palabra *Banco* es de origen italiano, á consecuencia de que los negociantes solían tener un banco para el cambio de monedas, en las antiguas casas de comercio de Italia. Cuando alguno de ellos salía fallido, el juez mandaba hacer pedazos el banco. De aquí proviene la expresión "banco-roto", esto es, "banca-rota".

PROBLEMAS

1º Un negociante ha tomado á crédito una factura de mercancías por 840 sucres, con 7 meses de plazo, previo el respectivo documento. Al cabo de 3 meses, el acreedor resuelve descontar por fuera el 1 % mensual, por los 4 meses que faltan para cumplirse el plazo, con tal de que el deudor le pague lo demás del importe de la factura, en virtud de necesitar dinero. ¿Cuál es el descuento, y cuál la cantidad que debe recibir después de tres meses?

2º Un comerciante vende un pagaré á un Banco por 1247 sucres 40 centavos, al 4 % anual de descuento por fuera, que son 12,60. ¿Cuál es el valor nominal de dicho pagaré, cuyo plazo se vence dentro de 10 meses, y cuyo descuento se verifica á los 7 meses cabales?

3º Un comerciante de Quito ha comprado varios artículos en Guayaquil por 12800 sucres, con el plazo de 1 año, 2 meses, 15 días, previo el documento de estilo. A los 5 meses, el acreedor propone al deudor que le dé la cantidad, mediante un tanto por ciento de descuento externo, por los 9 meses 15 días de anticipación, y recibe 12192 sucres. ¿Cuál es ese tanto por ciento, apreciando los meses como comerciales?

4º ¿Por cuántos meses de anticipación ha sido descontado un pagaré de 840 sucres, al 1 % mensual, y cuyo descuento por fuera es de 33 sucres 60 centavos?

5º Un pagaré de 6400 sucres, cuyo plazo era de 10 meses, ha sido vendido á un banquero al 9 % anual de descuento por dentro, á los 6 meses cabales. ¿Cuál es el valor efectivo, y cuál el descuento?

6º ¿Qué diferencia habrá entre el descuento por fuera y el descuento por dentro de un pagaré de 10500 sucres, en 3 años, 4 meses de plazo, descontado al 6 % anual?

LECCION DÉCIMANOVENA

Del cambio.

Se llama *cambio* el aumento ó disminución que, en la compra ó venta, sufre el oro ó la plata.

También se llama *cambio* el valor comparativo de dos unidades monetarias.

Se llama igualmente *cambio* el tanto por ciento que se paga ó se cobra por una letra de giro.

Se llama *letra de giro ó de cambio* una orden ó libranza que se remite á pagar de un lugar á otro, mediante ciertas condiciones.

Libranza es una orden de pago que se da, ordinariamente por carta, contra la persona que tiene fondos del que la expide.

Se llama *agio* el premio que se paga ó se cobra sobre el oro ó la plata, cuando se cambia con papel-moneda, ó con monedas de otro país.

Se llama *billete* el papel-moneda puesto en circulación por los Bancos legalmente autorizados.

Endosar una letra ó pagaré es ceder su valor á favor de otra persona.

El cambio es de dos maneras: *interior y exterior.*

Cambio interior ó nacional es el que se refiere á la relación que hay entre la moneda de dos ciudades de un mismo país, como entre Quito y Guayaquil, entre Tulcán y Quito.

Cambio exterior ó extranjero es el que se refiere á la relación que hay entre las monedas de las ciudades de dos países distintos, como entre Quito y París, entre Guayaquil y Londres ó Nueva York.

Este cambio, por verificarse directamente entre las plazas de las Naciones antedichas, se llama *directo.*

Se llama *premio* el tanto por ciento que se paga ó se cobra en la operación del cambio.

Explicación.—En Francia, el Ecuador hace el cambio de la *moneda sucre* con francos; en Inglaterra, con libras esterlinas; en España, con pesetas; en Alemania, con marcos; y en Norte-América, con dollars y con águilas.

Cuando se pregunta el *tipo del cambio*, ó á cómo *está el cambio*, se averigua la relación que hay entre la moneda nacional y cada una de las demás especies de moneda de la misma Nación ó de otras Naciones. Por consiguiente, el tipo del cambio sólo puede presentarse bajo tres formas: *á la par*, *con premio y con descuento.*

Se dice que el cambio está *á la par*, cuando se hace sin premio ni descuento.

Se dice que el cambio está *con premio ó alza*, cuando se hace con aumento del precio de la moneda.

Se dice que el cambio *está con descuento ó baja*, cuando se hace con disminución del precio de la moneda.

El cambio que hace el Ecuador con Europa y con Norte-América, *es siempre con premio* sobre la moneda extranjera; con los Estados de la América Meridional lo hace unas veces *con premio*, y otras *con descuento.*

Escolio. Las denominaciones *á la par*, *premio y descuento*, son aplicables, no sólo á monedas y á billetes de Bancos, sino también á toda clase de objetos mercantiles.

Ejemplo de cambio á la par. Si un comerciante de Quito compra á otro de aquí mismo una letra por 500 sucres, para remitirla á Guayaquil, y entrega la cantidad 500 en dinero sonante ó en billetes, ó una parte en metálico y otra en billetes, claro está que la compra *es á la par.*

Ejemplo de cambio con premio. Si el comprador de la letra anterior paga 540 sucres, para remitirla á Guayaquil, quiere decir esto que la compra al 8 °/o *de premio.* De suerte que paga no sólo los 500 sucres á que asciende el valor de la letra, sino también 40 sucres más á que asciende el 8 °/o de alza, aumento ó premio.

El problema se enuncia de este modo:

¿Cuál es el premio que debe pagarse por una letra de 500 sucres, comprada en Quito sobre Guayaquil, á razón del 8 °/o? 40

Explicación.—Como el premio que tienen las letras es un interés que gana la cantidad inscrita en ellas, se averigua dicho premio, aplicando la 1ª fórmula del interés simple, con prescindencia del tiempo, porque no lo hay, así:

$$g=\frac{500\times 8}{100}=40$$

Sumando la cantidad 500, que es el valor nominal de la letra, con 40, que es el 8 por ciento de premio, se obtiene el monto 540 sucres.

Ejemplo de cambio con descuento. Si el comprador de la letra anterior paga 460 sucres, quiere decir esto que la compra al 8 % de descuento. De suerte que paga la cantidad inscrita en la letra, pero disminuída de 40 sucres á que asciende el 8 % de rebaja.

El problema se enuncia de este modo:

¿Cuál es el descuento ó rebaja que debe hacerse á una letra de 500 sucres, á razón del 8 %?

Explicación.—Aplicando la fórmula del interés simple, ó la del descuento por fuera, se tiene:

$$d=\frac{500\times 8}{100}=40$$

Restando el descuento 40 del valor nominal 500, se obtiene el valor real 460 sucres.

Reducciones de monedas con inclusión del cambio.

En la parte final del *Suplemento* que se encuentra en la lección 14ª, expusimos las reducciones de monedas á la par, porque nos pareció lógico hacer los ejercicios necesarios en ese sentido, á fin de que se nos facilite la inteligencia de las mismas reducciones, con inclusión del cambio.

Tanto por esto, cuanto porque en las transacciones mercantiles, principalmente en la compra de letras sobre Europa y sobre Norte-América, ocurre á cada paso hacer reducciones de monedas, tomando en cuenta el cambio, vamos á ilustrar dicho cambio con los ejemplos respectivos.

Reducción de sucres á francos.

Ejemplo. Un comerciante de Quito, que va por negocios á Francia, compra una letra en Guayaquil por 5262 sucres 50 centavos, al 5,25 %. ¿Cuánta cantidad en francos debe recibir por dicha letra á su llegada en París, por ejemplo?

Explicación.—Para resolver este problema, se raciocina así:

Si con 105 sucres 25 centavos obtiene 100 fuertes franceses, que hacen 500 francos, es claro que con 5262 sucres 50 centavos obtendrá mayor cantidad de fuertes franceses.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{105,25}{5262,50}=\frac{100}{x}$$

De donde: $x=\frac{5262,50\times 100}{105,25}=\frac{526250}{105,25}=5000$ fuertes

Restando esta cantidad 5000 de 5262,50, se obtiene el premio, así:

5262,50 (valor total de la letra)
5000,00 (cantidad que recibirá en París, esto es, 25000 francos)
———
262,50 (premio que paga)

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir sucres á francos, se multiplica por* 100 *el número de sucres; el producto se divide por la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de cambio, y el cociente expresa fuertes franceses, los cuales se reducen á francos, multiplicándolos por* 5 *francos que tiene el fuerte francés.*

Reducción de francos á sucres.

Ejemplo. Un Ministro francés, que viene á residir en Quito, trae una letra de 25000 francos, comprada al 5,25 % sobre el Banco Comercial de Guayaquil. ¿Cuánta cantidad en sucres debe entregarle el Banco?

Explicación.—Para resolver este problema, se raciocina así:

Si por 105 fuertes 25 centavos recibe 100 sucres, claro está que por 5000 fuertes, á que se reducen los 25000 francos, recibirá mayor cantidad de sucres.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{105,25}{5000}=\frac{100}{x}$$

De donde: $x=\frac{5000\times 100}{105,25}$, esto es, 500000 : 105,25

Agregando dos ceros al dividendo, y suprimiendo la coma del divisor, se tiene:

50000000 : 10525=4750 sucres 59 centavos.

Restando este número de 5000 fuertes, que hacen los 25000 francos, se obtiene el premio, así:

5000,00 (valor total de la letra)
4750,59 (cantidad que debe recibir en Guayaquil)

249,41 (premio que paga en París por la letra).

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir francos á sucres, se reducen los francos á fuertes, dividiendo los primeros por* 5 *francos que tiene el fuerte francés. El cociente se multiplica por* 100; *el producto se divide por la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de cambio, y el resultado expresa sucres.*

Reducción de sucres á libras esterlinas, chelines y peniques, y viceversa.

Ejemplo 1º ¿Cuántas libras esterlinas valdrá en Londres una letra de 10800 sucres, remitida desde Quito, al 8 % de cambio, ésto es, á razón de 108 sucres por cada 100 fuertes ingleses? 2000 libras

Explicación.—Aplicando el *método de la unidad*, se raciocina así:

Si con 108 sucres se consiguen 100 fuertes ingleses, claro está que con 1 sucre se conseguirá una cantidad 108 veces menor, esto es, 100 partido por 108, así: $\frac{100}{108}$; luego con 10800 sucres se conseguirá una cantidad 10800 veces mayor, así:

$$\frac{10800 \times 100}{108} = 10000 \text{ fuertes ingleses,}$$

los cuales, divididos por 5 fuertes que vale la libra esterlina, hacen 2000 libras.

Viceversa. ¿Cuántos sucres valdrá en Quito una letra de 2000 libras esterlinas, esto es, de 10000 fuertes ingleses, comprada en Londres al 8 % de cambio, esto es, á razón de cada 100 fuertes ingleses por 108 sucres? 10800 sucres

Explicación.—Aplicando el *método de la unidad*, se raciocina así:

Si 100 fuertes ingleses valen 108 sucres, claro está que 1 fuerte valdrá 100 veces menos, es decir, 108 partido por 100, así: $\frac{108}{100}$; luego 10000 fuertes ingleses, que hacen las 2000 libras esterlinas, valdrán 10000 veces más, así:

$$\frac{10000\times 108}{100}=10800 \text{ sucres}$$

Escolio. Los 10000 fuertes ingleses, divididos por 5 fuertes que vale la libra esterlina, dan 2000 libras esterlinas.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir sucres á libras esterlinas, se multiplica por* 100 *el número de sucres; el producto se divide por la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de cambio, y el cociente expresa fuertes ingleses, los cuales se reducen á libras dividiéndolos por* 5 *fuertes que vale la libra esterlina.*

VICEVERSA.—*Para reducir libras esterlinas á sucres, se las reduce á fuertes; éstos se multiplican por la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de cambio; el producto se divide por* 100, *y el cociente expresa sucres.*

Ejemplo 2º ¿Cuántas libras esterlinas valdrá en Lóndres una libra de 2000 sucres, remitida desde Quito, al cambio de 2 chelines por sucre? 200 libras

Explicación.—Se multiplica el número 2000 por 2, y el producto 4000 expresa chelines. Estos se dividen por 20 chelines que tiene la libra esterlina, y el cociente 200 expresa libras.

Comprobación. Si con 1 sucre se compran 2 chelines, claro está que con 2000 sucres se comprará mayor número de chelines.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{1}{2000}=\frac{2}{x}$$

De donde: $x=\frac{2000\times 2}{1}=4000$ chelines,

los cuales, divididos por 20, hacen 200 libras esterlinas.

Viceversa. ¿Cuántos sucres valdrá en Quito una letra de 200 libras esterlinas, comprada en Londres, al cambio de 2 chelines por cada sucre? 2000 sucres

Explicación.—Se multiplica el número 200 por 20, y el producto 4000 expresa chelines; éstos se dividen por 2, y el cociente expresa sucres.

Comprobación. Si con 2 chelines se compra 1 sucre, claro está que con 4000 chelines, que hacen los 200 libras, se comprará mayor número de sucrés.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{2}{4000}=\frac{1}{x}$$

$$\text{De donde: } x=\frac{4000\times 1}{2}=2000 \text{ sucres}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir sucres á libras esterlinas, cuando el tanto por ciento de cambio se refiere á chelines, se multiplica el número de sucres por el tanto por ciento, y el producto expresa chelines, los cuales, divididos por 20, dan libras esterlinas, Viceversa, para reducir libras esterlinas á sucres, cuando el tanto por ciento de cambio se refiere á chelines, se reducen las libras á chelines; éstos se dividen por el tanto por ciento de cambio, y el cociente expresa sucres.*

Ejemplo 3º ¿Cuántas libras esterlinas valdrá en Londres una letra de 4000 sucres, remitida desde Quito, al cambio de 1 sucre por cada 42 peniques? 700 libras

Explicación.—Se multiplica el número 4000 por 42, y el producto 168000 expresa peniques. Estos se dividen por 12 peniques que tiene el chelín, y el cociente 14000 expresa chelines. Estos se dividen por 20 chelines que tiene la libra esterlina, y el cociente 700 expresa el total de libras.

Comprobación. Si con 1 sucre se compran 42 peniques, claro está que con 4000 sucres se comprará mayor número de peniques.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{1}{4000}=\frac{42}{x}$$

$$\text{De donde: } x=\frac{4000\times 42}{1}=168000 \text{ peniques}$$

Haciendo las mismas reducciones, de especie inferior á superior, se obtienen, al fin, las 700 libras.

Viceversa. ¿Cuántos sucres valdrá en Quito una letra de 700 libras esterlinas, comprada en Londres, al cambio de 42 peniques por cada sucre? 4000 sucres

Explicación.—Se multiplica el número 700 por 20 chelines que tiene la libra, y el producto 14000 expresa chelines. Estos se multiplican por 12 peniques que tiene el chelín, y el producto 168000 expresa peniques. Ahora se dividen éstos por 42, y el cociente 4000 expresa sucres.

Comprobación. Si con 42 peniques se compra 1 sucre, es claro que con 168000 peniques se comprará mayor número de sucres.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{42}{168000}=\frac{1}{x}$$

De donde: $x=\frac{168000\times 1}{42}=4000$ sucres

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir sucres á libras esterlinas, cuando el tanto por ciento de cambio se refiere á peniques, se multiplica el número de sucres por el tanto por ciento; el producto expresa peniques, los cuales se reducen á chelines, y éstos á libras por medio de la división. Viceversa, para reducir libras esterlinas á sucres, cuando el tanto por ciento de cambio se refiere á peniques, se las reduce á chelines, y éstos á peniques por medio de la multiplicación. El número de peniques se divide por el tanto por ciento, y el cociente expresa sucres.*

Ejemplo 4º Un comerciante que va á Inglaterra, comprá una letra en Guayaquil por 3186 sucres 71 centavos, á razón de 7 sucres 10 centavos la libra esterlina, esto es, al 42 °/o de cambio. ¿Cuántas libras, chelines y peniques debe recibir en Inglaterra?

Explicación.—Se divide el número 3186,71 por 7,10, después de suprimir las comas, y el cociente expresa libras esterlinas, así:

318671 : 710=448 libras, y sobra un residuo de 591.

Este residuo se multiplica por 20 chelines que tiene la libra; el producto se divide por el mismo divisor, y el cociente expresa chelines, así:

591×20=11820 : 710=16 chelines, y sobra un residuo de 460.

Este residuo se multiplica por 12 peniques que tiene el chelín; el producto se divide por el mismo divisor, y el cociente expresa peniques, así:

460×12=5520 : 710=7 peniques, y sobra un residuo de 550,

el cual se desprecia, ó se considera que vale un penique, y se agrega éste al número 7, y entonces son 8 peniques; luego los 3186 sucres 71 centavos equivalen á 448 libras esterlinas, 16 chelines y 8 peniques, al cambio 42 de premio.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir sucres á libras esterlinas, chelines y peniques, se divide el número de sucres por el valor de una libra al cambio, y el cociente expresa libras esterlinas. El residuo, si lo hay, se multiplica por* 20 *chelines; el producto se divide por el mismo divisor, y el cociente expresa chelines. El nuevo residuo, si lo hay, se multiplica por* 12 *peniques; el producto se divide por el mismo divisor, y el cociente expresa peniques.*

Ejemplo 5º Un Ministro inglés, que viene al Ecuador, trae una letra de 448 libras, 16 chelines y 8 peniques, girada contra un Banco de Guayaquil, al 42 %, esto es, á razón de 142 sucres por cada 100 fuertes ingleses. ¿Cuánta cantidad de nuestra moneda debe recibir en Guayaquil?

Explicación.—Este problema se resuelve por tres procedimientos:

PRIMER PROCEDIMIENTO.—Se multiplica el número de libras por 5 sucres que vale intrínsecamente la libra esterlina, y se obtienen 2240 sucres por producto; luego se multiplica el número 16 por 25 centavos que vale el chelín, y se obtienen 4 sucres por último resultado; en seguida se multiplica el número 8 por 2 centavos que vale el penique, y se obtienen 16 centavos por producto.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$448 \times 5 = 2240 + 4 = 2244$ sucres 16 centavos á la par.

Ahora se multiplica esta cantidad por 142, así:

$$\begin{array}{r} 2244{,}16 \\ 142 \\ \hline 448832 \\ 897664 \\ 224416 \\ \hline 318670{,}72 \end{array}$$

Este producto se divide por 100, para lo cual se corre la coma dos lugares á la izquierda, y se obtiene 3186,7072

Agregando una unidad al cero, y despreciando las demás cifras, se obtienen en definitiva 3186 sucres 71 centavos. (Cantidad total que debe pagarse por la letra).

La diferencia entre el valor á la par y el valor total representa el premio; así:

3186,71 (valor total)
2244,16 (valor á la par)

942,55 (valor del premio)

1ª *comprobación.* Aplicando el *método de la unidad*, se raciocina así:

Si 100 fuertes ingleses valen 142 sucres, claro está que 1 fuerte inglés valdrá 100 veces menos, esto es, 142 partido por 100, así: $\frac{142}{100}$; luego 2244 fuertes ingleses 16 centavos valdrán 224416 veces más, así:

$$\frac{2244,16 \times 142}{100} = 3186,71$$

2ª *comprobación.* Aplicando el mismo *método de la unidad*, se raciocina de esta manera:

Si por 100 fuertes ingleses se paga un premio de 42 sucres, claro está que por 1 fuerte inglés se pagará un premio 100 veces menor, esto es, 42 partido por 100, así: $\frac{42}{100}$; luego por 2244 fuertes ingleses y 16 centavos se pagará un premio 2244,16 veces mayor, así:

$$\frac{2244,16 \times 42}{100} = 942,55 \text{ (premio)}$$

Sumando la cantidad que representa el premio con la que expresa el valor á la par, se obtiene el valor total que importa la letra, así:

2244,16 (valor á la par)
942,55 (valor del premio)

3186,71 (valor total)

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir libras esterlinas, chelines y peniques á sucres, se multiplica por 5 el número de libras, y el producto expresa sucres; el número de chelines se multiplica por 25, y en el producto se separan, de derecha á izquierda, dos cifras decimales, y la parte entera expresa sucres; en seguida se multiplica por 2 el número de peniques, y el producto expresa centavos; se suman, por último, todos tres valores, y se obtiene el valor total en sucres á la par. Una vez hecho esto, se multiplica el valor total por el tanto; el producto se divide por 100, y el cociente expresa la cantidad líquida que debe pagarse por la letra en sucres.*

Segundo procedimiento.—Se multiplica el tanto por 5 sucres que vale intrínsecamente la libra esterlina, y se obtiene

710 por producto. En éste se separan dos cifras decimales, así: 7,10

La operación se dispone entonces así:

$$142 \times 5 = 710, \text{ y luego } 7{,}10$$

Pues bien, el número de libras es 448; el valor de los 16 chelines son 4 sucres; y el de los 8 peniques, 16 centavos. Estos dos últimos valores se escriben colocando el segundo á continuación del primero, así: 4,16

Ahora se duplica el número 416, para lo cual se lo multiplica por 2, y el duplo 832 se escribe á la derecha de 448, así: 448,832

Multiplicando este número por 7,10, se obtiene el mismo resultado, así:

$$\begin{array}{r} 448{,}832 \\ 7{,}10 \\ \hline 4488320 \\ 3141824 \\ \hline 3186{,}70720 \end{array}$$

Agregando una unidad al primer cero, y despreciando las demás cifras, se obtienen en definitiva 3186 sucres 71 centavos.

De aquí se deduce la siguiente.

Regla.—*Para reducir libras esterlinas, chelines y peniques á sucres, se multiplica el tanto por 5, y en el producto se separan dos cifras decimales. En seguida se suma el valor de los chelines, reducidos á peniques, con el de los peniques; el duplo de esta suma se escribe á la derecha del número de libras, separadas éstas con una coma. La cantidad así formada se multiplica por el producto que resulta de multiplicar el tanto por 5; en el producto se separan tantas cifras decimales cuantas tengan los dos factores, y el resultado expresa el valor total de la letra en sucres.*

Tercer procedimiento.—Se averigua el valor de una libra esterlina al cambio dado, raciocinando así:

Si por 100 fuertes ingleses hay que dar 142 sucres, claro está que por 5 fuertes, que vale intrínsecamente la libra esterlina, habrá que dar menor cantidad de sucres.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{100}{5} = \frac{142}{x}$$

$$\text{De donde: } x=\frac{5\times 142}{100}=7{,}10$$

Como se ve, por 5 fuertes ingleses hay que dar 7 sucres 10 centavos.

Ahora se multiplica el número 448,832 por 7,10, y este tercer procedimiento queda reducido al 2º

Reducción de sucres á pesetas españolas, y viceversa.

Ejemplo 1º Un Ministro Plenipotenciario, que va á permanecer en Madrid, compra una letra al Banco Agrícola por 2430 sucres, al 8 °/o de cambio. ¿Cuánta cantidad en pesetas debe recibir á su llegada en Madrid? 5625 pesetas

Explicación. 100 fuertes españoles, multiplicados por 10 reales, hacen 1000 reales. Divididos éstos por 4 reales que tiene una peseta, resultan 250 pesetas.

Ahora se raciocina así:

Si con 108 sucres obtiene 250 pesetas, que son 100 fuertes españoles, claro está que con 2430 sucres obtendrá mayor número de pesetas.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{108}{2430}=\frac{250}{x}$$

$$\text{De donde: } x=\frac{2430\times 250}{108}=5625 \text{ pesetas}$$

Multiplicando el número 5625 por 4 reales que tiene una peseta, resultan 22500 reales. Dividiendo éstos por 10 reales, se obtienen 2250 fuertes españoles.

Restando 2250 de 2430 sucres, se obtiene el premio, así:

2430 (valor total de la letra)
2250 (fuertes españoles)
———
180 (premio)

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir sucres á pesetas españolas, se multiplica el número de sucres por 250; el producto se divide por la base 100 sumada con el tanto por ciento de cambio, y el cociente expresa pesetas.*

Ejemplo 2º Un individuo tiene que pagar en Madrid 5625 pesetas por unas cajas de vino, para lo cual compra una letra en Guayaquil al 8 %. ¿Cuánta cantidad en sucres debe consignar por dicha letra, inclusive el valor del cambio? 2430 sucres

Explicación.—Para resolver este problema, se raciocina así: Si por 250 pesetas da 108 sucres, claro está que por 5625 pesetas dará mayor número de sucres.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{250}{5625}=\frac{108}{x}$$

De donde: $x=\frac{5625\times108}{250}=2430$ sucres.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir pesetas españolas á sucres, se multiplica el número de pesetas por la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de cambio; el producto se divide por* 250, *y el cociente expresa sucres.*

Reducción de sucres á marcos.

Ejemplo. Un individuo, que se dirige á Alemania á desempeñar el Consulado en Hamburgo, compra una letra en Guayaquil por 5382 sucres 72 centavos, inclusive el 12 % de cambio. ¿Cuántos marcos debe recibir á su llegada en Hamburgo?

Explicación.—Para resolver este problema, se raciocina así: Si con 112 sucres obtiene 100 fuertes alemanes, claro está que con 5382 sucres 72 centavos obtendrá mayor número de fuertes alemanes.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{112}{5382,72}=\frac{100}{x}$$

De donde: $x=\frac{5382,72\times100}{112}=4806$ fuertes

Multiplicando esta cantidad 4806 por 4 marcos que vale el fuerte alemán, se obtiene el número 19224 marcos que debe recibir en Hamburgo.

Restando el número 4806 de 5382,72, se obtiene el premio, así:

5382,72 (valor total de la letra)
4806,00 (fuertes alemanes, que hacen 19224 marcos)

576,72 (premio que debe pagar)

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir sucres á marcos, se multiplica el número de sucres por* 100; *el producto se divide par la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de cambio, y el cociente expresa fuertes alemanes, los cuales se reducen á marcos, multiplicándolos por* 4 *marcos que tiene el fuerte alemán.*

Reducción de marcos á sucres.

Ejemplo. Un comerciante de Guayaquil tiene que pagar en Hamburgo 19224 marcos por unas mercaderías que ha recibido, para lo cual compra una letra al 12 %. ¿Cuánta cantidad en sucres debe consignar por la letra, inclusive el valor del cambio?

Explicación.—Dividiendo el número 19224 por 4 marcos que vale el fuerte alemán, se obtienen 4806 fuertes.

Ahora se raciocina así:

Si por 100 fuertes alemanes tiene que dar 112 sucres, claro está que por 4806 fuertes tendrá que dar mayor cantidad de sucres.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{100}{4806}=\frac{112}{x}$$

De donde: $x=\frac{4806\times 112}{100}=5382$ sucres 72 centavos

Restando de esta cantidad el número 4806, se obtiene el premio, así:

5382,72 (valor total de la letra)
4806,00 (fuertes alemanes, que hacen 19224 marcos)

576,72 (premio que debe pagar)

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para reducir marcos á sucres, se divide el número de marcos por* 4, *y el cociente expresa fuertes. Estos se multiplican por la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de cambio; el producto se divide por* 100, *y el cociente expresa sucres.*

Reducción de sucres á dollars, y viceversa.

Ejemplo 1º Un comerciante de Quito tiene que pagar 4746 sucres 56 centavos en Nueva-York, para lo cual remite una letra comprada al 12 °/o. ¿Cuánto debe pagar por el premio, y cuántos dollars deben darle en Nueva-York?

Explicación.—Para resolver este problema, se raciocina así; y se advierte que un dollar vale un fuerte ó un sucre:

Si con 112 sucres consigue 100 dollars, claro está que con 4746 sucres 56 centavos conseguirá mayor número de dollars.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{112}{4746{,}56}=\frac{100}{x}$$

De donde: $$x=\frac{4746{,}56\times100}{112}=4238 \text{ dollars}$$

Restando 4238 de 4746,56 se obtiene el premio, así:

4746,56 (valor de la letra en sucres)
4238,00 (número de dollars)

508,56 (premio en sucres)

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir sucres á dollars, se multiplica por 100 el número de sucres; el producto se divide por la base 100 sumada con el tanto por ciento de cambio, y el cociente expresa dollars.*

Ejemplo 2º Un individuo tiene que pagar 4238 dollars en Nueva-York, para lo cual compra una letra en Guayaquil, al 12 °/o. ¿Cuánta cantidad en moneda sucre debe dar por dicha letra, inclusive el valor del cambio?

Explicación.—Para resolver este problema, se raciocina así:

Si por 100 dollars da 112 sucres, claro está que por 4238 dollars dará mayor número de sucres.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{100}{4238}=\frac{112}{x}$$

De donde: $$x=\frac{4238\times112}{100}=4746 \text{ sucres } 56 \text{ centavos}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir dollars á sucres, se multiplica el número de dollars por la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de cambio; el producto se divide por* 100, *y el cociente expresa sucres.*

Reducción de sucres á águilas americanas, y viceversa.

Ejemplo. ¿Cuántos sucres debemos consignar en Guayaquil, por una letra de 700 águilas americanas, comprada sobre la plaza de Nueva-York, al 12 °/o de cambio, esto es, á razón de 112 sucres por cada 100 fuertes americanos? 15680 sucres

Escolio. Una águila americana vale 20 fuertes; luego las 700 águilas valen 14000 fuertes.

Explicación.—Aplicando el *método de la unidad*, se raciocina así:

Si 100 fuertes americanos valen 112 sucres, claro está que 1 fuerte valdrá 100 veces menos, esto es, 112 partido por 100, así: $\frac{112}{100}$; luego 14000 fuertes valdrán 14000 veces más, así:

$$\frac{14000 \times 112}{100} = 15680 \text{ sucres}$$

Viceversa. ¿Cuántas águilas americanas debemos recibir en Nueva-York, por una letra de 15680 sucres, comprada en la plaza de Guayaquil, al 12 °/o de cambio, esto es, á razón de cada 100 fuertes americanos por 112 sucres? 700 águilas

Explicación.—Aplicando el *método de la unidad*, se raciocina así:

Si con 112 sucres se obtienen 100 fuertes americanos, es claro que con 1 sucre se obtendrá un número 112 veces menor, esto es, 100 partido por 112, así: $\frac{100}{112}$; luego con 15680 sucres se obtendrá un número 15680 veces mayor, así:

$$\frac{15680 \times 100}{112} = 14000 \text{ fuertes,}$$

los cuales, divididos por 20 fuertes que vale una águila, dan 700 águilas.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para reducir sucres á águilas americanas, se las reduce á fuertes, multiplicándolas por* 20. *El número de fuertes se multiplica por la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de* *cambio; el producto se divide por* 100, *y el cociente expresa sucres. Viceversa, para reducir águilas americanas á sucres, se multiplica por* 100 *el número de sucres; el producto se divide por la base* 100 *sumada con el tanto por ciento de cambio, y el cociente expresa fuertes, los cuales se reducen á águilas, dividiéndolos por* 20.

De la comisión.

Se llama *comisión* un tanto por ciento que un comerciante paga á su corresponsal, cuando éste se encarga de comprar ó vender cualesquiera efectos, ó cobrar deudas.

Cuando los comerciantes hacen de las comisiones un ramo especial de trabajo, se llaman *comisionistas*.

Las cuentas que rinden los comisionistas consignatarios, se llaman *cuentas de venta ó de compra*.

La comisión equivale á la *cantidad centesimal ó al interés*, que es lo mismo.

La cantidad que recibe el corresponsal, como producto de una venta, es la *base ó capital*; y según éste, se calcula la comisión.

La cantidad que emplea el corresponsal en comprar cualesquiera efectos mercantiles, también se llama *base ó capital*.

La cantidad que manda el comerciante al corresponsal, y que comprende el precio de las compras y la comisión que debe deducir, equivale al *monto*.

En toda venta hay tres especies de cantidades: *el producto bruto*, que es el producto primitivo de las ventas; *los gastos*, que consisten en todos los cargos hechos al consignador ó comerciante; y el *producto neto*, que es el producto líquido de la venta, después de deducir la comisión y los gastos.

Ejemplo 1º Un corresponsal, que reside en Guayaquil, ha comprado una factura de mercaderías por 1650 sucres, para remitirlas á un comerciante de Quito. ¿Cuál es la comisión que le toca, á razón del 5 %? 82,50

Explicación.—Según la regla dada para buscar la cantidad centesimal, ó aplicando la 1ª fórmula del interés simple, se tiene:

$$g=\frac{1650\times5}{100}=82{,}50 \text{ (comisión)}$$

Ejemplo 2º Un comerciante de Quito remite á su corresponsal, que reside en Guayaquil, 4650 sucres, para que compre casimires. ¿Cuánto debe emplear en la compra, y cuánto le toca de comisión, á razón del 5 °/o? 4428,57 en la compra, y 221,43 de comisión.

Explicación.—Para obtener un número de la misma especie que 4650, que representa el monto, se suma el capital 100 con la comisión 5, y da 105, y se raciocina así:

Si de 105 sucres de monto se reservan 100 para comprar los casimires, claro está que de 1 sucre de monto se reservará una cantidad 105 veces menor, así: $\frac{100}{105}$; luego de los 4650 sucres de monto se reservará una cantidad 4650 veces mayor, así:

$$\frac{100 \times 4650}{105} = 4428{,}57 \text{ (para comprar los casimires)}$$

Restando 4428,57 del monto 4650, se obtiene el tanto por ciento de comisión, que son 221,43. *Viceversa,* sumando 4428,57 que representa la base, con 221,43, que representa la comisión ó la cantidad centesimal, se obtiene el capital 4650, que es el monto.

Ejemplo 3º Un corresponsal, que reside en Babahoyo, vende pieles curtidas al 2 °/o de comisión, y remite al comerciante de Quito, como producto neto, la cantidad de 4000 sucres. ¿En cuánto ha vendido los cueros, y cuál es la comisión que le toca? 4081,63 (total ó monto), y 81,63 (comisión).

Explicación.—Para obtener una cantidad de la misma especie que 4000, se resta la comisión 2 sucres de 100, y resulta 98, y se raciocina así:

Si 98 sucres de producto neto provienen de una venta de 100 sucres, claro está que 1 sucre de producto neto provendrá de una cantidad 98 veces menor, así: $\frac{100}{98}$; luego los 4000 sucres provendrán de una cantidad 4000 veces mayor, así:

$$\frac{100 \times 4000}{98} = 4081{,}63 \text{ (producto primitivo)}$$

Restando el producto neto del producto primitivo, resulta la comisión 81,63, así:

$$\begin{array}{rl} 4081{,}63 & \text{(producto primitivo)} \\ 4000{,}00 & \text{(producto neto)} \\ \hline 81{,}63 & \text{(comisión)} \end{array}$$

Del corretaje.

Se llama *corretaje* un tanto por ciento que un comerciante paga á un individuo, por ayudarle á comprar ó vender cualesquiera efectos, ó cobrar deudas. El individuo se llama *corredor.*

Ejemplo 1º Un individuo de Quito, por recomienda de un comerciante de Tulcán, ha vendido 60 quintales de azúcar en 900 sucres. ¿Cuál es el corretaje que le toca, á razón del 4 %? 36 sucres

Explicación.—Aplicando la regla de la cantidad centesimal ó la 1ª fórmula del interés simple, se tiene:

$$g=\frac{900\times 4}{100}=36 \text{ sucres}$$

Ejemplo 2º Una persona de Guayaquil, por vender 300 cabezas de ganado que le ha remitido un comerciante de Quito, y cuyo producto asciende á 9000 sucres, deduce el 2 % de correta je. ¿Cuánto dinero debe mandar á Quito, y cuánto debe tomar por su trabajo? 8823,53 debe remitir, y 176,47 debe dejar en su poder, por cuenta del corretaje.

Explicación.—Para obtener un número de la misma especie que 9000, que representa el monto, se suma el capital 100 con el corretaje 2, y da 102, y se raciocina así:

Si de 102 sucres de monto manda 100 á Quito, es claro que de 1 sucre de monto mandará una cantidad 102 veces menor, así: $\frac{100}{102}$; luego de los 9000 sucres mandará una cantidad 9000 veces mayor, así:

$$\frac{100\times 9000}{102}=8823,53$$

Para encontrar el tanto por ciento de corretaje, se resta 8823,53 de 9000, así:

9000,00 (producto total de la venta del ganado)
8823,53 (cantidad que debe remitir á Quito)

176,47 [tanto por ciento de corretaje]

Ejemplo 3º Un individuo de Ambato, por súplica de un comerciante de Babahoyo, vende 140 arrobas de chocolate, y remite al dueño, como producto neto, la cantidad de 1018,50. ¿Cuál es el producto total de la venta, y cuál el 3 por ciento de corretaje? 1050, y 31,50 de corretaje.

Explicación.—Para obtener un número de la misma especie que 1018,50, se resta de 100 el corretaje 3, y da 97, y se raciocina así:

Si 97 sucres de producto neto provienen de una venta de 100 sucres, claro está que 1 sucre de producto neto provendrá de una cantidad 97 veces menor, así: $\frac{100}{97}$; luego los 1018,50 provendrán de una cantidad 1018,50 veces mayor, así:

$$\frac{100\times1018{,}50}{97}=1050 \text{ sucres}$$

Restando de esta cantidad el producto líquido, se obtiene el corretaje, así:

1050,00	(producto total)
1018,50	[producto líquido]
31,50	[corretaje]

Escolio. Todo lo dicho acerca de la comisión, se dice también del corretaje, con la única diferencia de que el corresponsal es un agente directo del comerciante, y para el arreglo de los negocios, lleva un libro que se llama "Libro de ventas á comisión", mientras que el corredor es un individuo cualquiera que, momentáneamente, presta sus servicios á un comerciante, en virtud de un tanto por ciento de remuneración.

De la aseguración.

Se llama *aseguración ó seguro* un contrato por el cual se compromete una compañía á indemnizar á un propietario las pérdidas que pueda sufrir en sus mercancías, en su capital ó en cualesquiera otros objetos que corran riesgo.

Se llama *póliza* el documento ó escritura en que consta el contrato de la aseguración.

La aseguración es de dos maneras: *terrestre y marítima.*

La terrestre es una fianza que presenta la compañía, para responder por los riesgos de incendio que puedan sobrevenir sobre las casas, sobre los almacenes, etc.

La marítima es también una fianza que presenta la compañía, para responder por los riesgos que puedan sufrir las mercancías en el mar, ó los buques en que son conducidas.

Se llama *prima ó premio de seguros* un tanto por ciento que se paga á la compañía sobre el valor de la propiedad asegurada.

La prima se paga regularmente cada año, cuando la aseguración es terrestre; cuando es marítima, la prima se paga por el tiempo que dura el viaje.

De aquí se colige que hay compañías de seguros contra incendios, contra riesgos marítimos, sobre la vida, etc.

Escolio. Los problemas de aseguración no son sino casos particulares de la regla de interés, y se resuelven por medio de las fórmulas ó por el método de la unidad.

Ejemplo 1º ¿Qué prima debe pagarse por la aseguración de un almacén que vale 10000 sucres, á razón del 3 %? 300 sucres

Explicación.—Aplicando la 1ª fórmula del interés simple, se tiene:

$$g=\frac{10000\times3}{100}=300 \text{ sucres}$$

Comprobación por el método de la unidad. Si sobre 100 sucres, que vale el almacén, se pagan 3 de prima, es claro que sobre 1 sucre se pagará una prima 100 veces menor, esto es, 3 partido por 100, así: $\frac{3}{100}$; luego sobre 10000 sucres se pagará una prima 10000 veces mayor, así:

$$\frac{10000\times3}{100}=300 \text{ sucres}$$

Restando la prima 300 de 10000, se obtiene 9700, así:

10000 (base ó cantidad asegurada)
300 (prima, interés ó cantidad centesimal)

9700 (diferencia)

Ejemplo 2º ¿Por cuánta cantidad deben asegurarse al 4 % unas mercancías que, junto con la casa, valen 26550 sucres, para poder pagar la propiedad y la prima?

Explicación.—Restando de 100 la prima 4 estipulada, se obtiene 96 por diferencia, y se aplica el método de la unidad, raciocinando así:

Si la cantidad asegurada son 100 sucres, cuando el valor de las mercancías es de 96, claro está que cuando el valor de ellas sea de 1 sucre, la cantidad asegurada será 96 veces menor, esto es, 100 partido por 96, así: $\frac{100}{96}$; luego cuando el valor sea de 26550 sucres, la cantidad asegurada será 26550 veces mayor, así:

$$\frac{100\times26550}{96}=27656{,}25$$

Restando 26550 de la última cantidad, se obtiene 1106,25 así:

27656,25 (base ó cantidad asegurada)
26550,00 (prima, interés ó cantidad centesimal)

1106,25

LECCION VIGÉSIMA

Partición ó repartimientos proporcionales.

Regla de partición es una operación que tiene por objeto dividir un número en partes proporcionales á dos ó más números dados.

Ocurre hacer esta operación, cada vez que hay que repartir una ganancia ó pérdida entre varios asociados; una herencia, entre varios herederos; una contribución, entre varias personas, y en otros casos semejantes.

Escolio. El primer número se llama *número propuesto*, y los demás se llaman *números proporcionales.*

División de la regla de partición.

La regla de partición es de dos maneras: *directa é inversa.*

Es directa, cuando la partición es directamente proporcional.

Es inversa, cuando la partición es inversamente proporcional.

Ejemplo 1º *de partición directa.* Se quiere partir el número 60 proporcionalmente á los números 5, 3 y 2.

Explicación.—Sumando 5 con 3 y con 2, se obtiene 10. Multiplicando cada uno de estos números por 60, que es el número propuesto, resultan por productos 300, 180 y 112, respectivamente. Dividiendo estos productos por 10, que es la suma de los números proporcionales, se obtienen los cocientes 30, 18 y 12.

Para mayor claridad, la operación se dispone y se ejecuta así:

$$\left.\begin{array}{l} 5\times 60=300 : 10=30 \\ 3\times 60=180 : 10=18 \\ 2\times 60=120 : 10=12 \end{array}\right\} \text{ cocientes}$$

$$\overline{10} \qquad\qquad\qquad \overline{60}$$

Para comprobar que la operación está bien hecha, se suman los cocientes, y se ve que el resultado es igual al número propuesto 60.

Ejemplo 2º Un padre de familia, al morir, deja un capital de 2000 sucres, para que lo distribuyan entre dos hijos, y dispone que al primero le den las tres cuartas partes, y al segundo las dos octavas partes.

La operación se dispone entonces así:

$$\tfrac{3}{4}+\tfrac{2}{8}=\tfrac{24}{32}+\tfrac{8}{32}=\tfrac{32}{32}$$

Explicación.—Para sumar los dos quebrados, los hemos reducido á un común denominador, multiplicándolos en cruz, y les hemos puesto por denominador común el producto de los denominadores.

Se prescinde ahora del denominador común, de acuerdo con el axioma 5º de la lección 4ª, que dice: "Si de cantidades iguales se quita una misma cantidad, los resultados son iguales", y se dispone la operación de la misma manera que en la del ejemplo anterior, así:

$$\begin{array}{l} 24\times 2000=48000 : 32=1500 \\ \ \ 8\times 2000=16000 : 32=\ \ 500 \end{array}\Big\}\text{ cocientes}$$

$$\begin{array}{lcr} \overline{32} & & \overline{2000} \end{array}$$

Escolio. Si los quebrados tienen un denominador común, entonces se prescinde de éste, y se hace la operación, según la explicación que se acaba de dar.

Ejemplo 3º Se quiere partir el número 50 proporcionalmente á los números 4 y $\frac{2}{6}$.

Explicación.—Se pone al entero 4 la unidad por denominador, y se reducen los dos quebrados á un común denominador, así:

$$\tfrac{4}{1}+\tfrac{2}{6}=\tfrac{24}{6}+\tfrac{2}{6}=\tfrac{26}{6}$$

Se prescinde del denominador común, y se dispone la operación de esta otra manera:

$$\begin{array}{l} 24\times 50=1200 : 26=46+\tfrac{2}{13} \\ \ \ 2\times 50=\ \ 100 : 26=\ \ 3+\tfrac{11}{13} \end{array}\Big\}\text{ cocientes}$$

$$\begin{array}{lcr} \overline{26} & & \overline{50}\ \ ,, \end{array}$$

Aplicación del método de la unidad al ejemplo 1º

Análisis.—Si el número por partir fuera 10, claro está que la 1ª parte sería 5, la 2ª sería 3, y la 3ª sería 2. Ahora, si el número por partir fuera 1, es claro que la 1ª parte sería 10 veces menor, lo mismo que la 2ª y la 3ª parte, esto es, 5, 3 y 2 partidos por 10, así: $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{10}$; pero como el número por partir es 60, claro está que la 1ª parte, lo mismo que la 2ª y la 3ª, será 60 veces mayor, así:

$$\frac{5\times 60}{10}=30 \text{ (1ª parte)}$$

$$\frac{3\times 60}{10}=18 \text{ (2ª parte)}$$

$$\frac{2\times 60}{10}=12 \text{ (3ª parte)}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para partir un número en partes directamente proporcionales á dos ó más números dados, se suman los números que indican la proporcionalidad; en seguida se multiplica cada uno de ellos por el número propuesto; luego se dividen los productos por la suma de los números proporcionales; y los cocientes, sumados entre sí, deben dar el número propuesto.*

Escolio. Se aplican esta misma regla y el mismo análisis anterior, cuando los números proporcionales son quebrados homogéneos ó heterogéneos, ó bien números mixtos.

Ejemplo 1º de partición inversa. Un padre de familia, al morir, deja 400 sucres, para que los distribuyan entre dos hijos, pero en partes inversamente proporcionales á sus edades, sabiendo que el primero tiene 5 años, y el segundo 3.

Explicación.—Se divide la unidad por cada uno de los números dados; y luego se reducen los quebrados á un común denominador, así:

$$\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{3}=\tfrac{3}{15}+\tfrac{5}{15}=\tfrac{8}{15}$$

Se prescinde ahora del denominador común, y se dispone la operación de esta otra manera:

$$\begin{array}{ll}
3\times 400=1200 : 8=150 & \text{para el hijo de tres años}\\
\underline{5}\times 400=2000 : 8=\underline{250} & \text{para el hijo de cinco años}\\
8 \qquad\qquad\qquad\quad 400 &
\end{array}$$

Ejemplo 2º Se va á partir la herencia de 3000 sucres entre dos hijos; pero el testador ha dispuesto que al primer hijo se den las $\frac{2}{3}$ partes, y al segundo las $\frac{4}{9}$ partes.

Explicación.—Se divide la unidad por cada uno de los quebrados anteriores, y resultan cambiados los respectivos términos, una vez que para dividir un entero por un quebrado no hay más que multiplicar el entero por el denominador, y al producto se póne por denominador el numerador del quebrado, así:

$$1 : \tfrac{2}{3} = \tfrac{3}{2} \qquad 1 : \tfrac{4}{9} = \tfrac{9}{4}$$

Para sumar los quebrados $\frac{3}{2}$ y $\frac{9}{4}$, se reducen á un común denominador, multiplicándolos en cruz, así:

$$\tfrac{3}{2} \times \tfrac{9}{4} = \tfrac{12}{8} + \tfrac{18}{8} = \tfrac{30}{8}$$

Se prescinde ahora del denominador común, y la operación se dispone de esta manera:

$12 \times 3000 = 36000 : 30 = 1200$ para el primer hijo
$18 \times 3000 = 54000 : 30 = 1800$ para el segundo hijo

$\overline{30}$ $\qquad\qquad$ $\overline{3000}$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para partir un número en partes inversamente proporcionales á dos ó más números dados, se divide la unidad por cada uno de dichos números, y los quebrados que resultan se reducen á un común denominador, y se continúa la operación, según la regla de partición directa.*

Escolio. Si los números proporcionales son quebrados de una misma especie, se prescinde del denominador, y luego se divide la unidad por cada uno de ellos. Si son quebrados de distinta especie, se divide la unidad por cada uno de ellos, y resultan invertidos los respectivos términos. Si son mixtos, se divide igualmente la unidad por cada uno de ellos, y se hace la operación, según lo indica la regla de partición directa.

Sociedad ó compañía.

Regla de sociedad ó de compañía es una operación que tiene por objeto repartir, entre varias personas que se han asociado para emprender negocios, la ganancia ó pérdida obtenida.

Escolio. La regla de compañía es la misma que la de los repartimientos proporcionales, aplicada á un caso particular.

Condiciones de la regla de compañía.

Estas son dos:

1º La ganancia ó pérdida debe ser proporcional al capital de cada socio, siendo uno mismo el tiempo, es decir, á medida que aumenta ó disminuye el capital, aumenta ó disminuye también la ganancia ó pérdida.

2ª Debe ser proporcional al tiempo de la compañía, siendo uno mismo el capital de cada socio, es decir, á medida que aumenta ó disminuye el tiempo, aumenta ó disminuye también la ganancia ó pérdida.

División de la regla de compañía.

La regla de compañía es de dos maneras: *simple y compuesta.*

Es simple, cuando los capitales han permanecido empleados un mismo tiempo en los negocios.

Es compuesta, cuando los capitales no han permanecido empleados un mismo tiempo en los negocios.

Casos que se ofrecen en la regla de compañía.

Estos son tres:

1º Cuando los capitales son desiguales, y los tiempos iguales.

2º Cuando los capitales son iguales, y los tiempos desiguales.

3º Cuando tanto los capitales como los tiempos son desiguales.

Ejemplo del primer caso. Dos individuos han hecho compañía para trabajar en negocios de azúcar de Colombia: el primero ha puesto 300 sucres; el segundo, 500 sucres, durante un mismo tiempo. Habiendo obtenido una ganancia de 200 sucres, desean saber cuánto corresponde á cada uno.

Explicación.—Puesto que la ganancia debe repartirse proporcionalmente al capital de cada socio, una vez que el tiempo se supone que es igual, la operación se dispone y se ejecuta así:

$$\begin{array}{l} 300 \times 200 = 60000 : 800 = 75 \text{ (ganancia del 1º)} \\ 500 \times 200 = 100000 : 800 = 125 \text{ (ganancia del 2º)} \\ \overline{800} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overline{200} \end{array}$$

Los capitales 300 y 500 son los *números proporcionales*, y la ganancia 200 es el *número propuesto.*

Como se ve, este caso no es sino una regla de partición directa. Por tal razón, se suman los números proporcionales; en seguida se multiplica cada uno de éstos por el número propuesto; luego se dividen los productos por la suma de los números proporcionales; y los cocientes, sumados entre sí, dan el número propuesto.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver el primer caso, esto es, cuando los capitales son desiguales, y los tiempos iguales, se multiplica el capital de cada socio por la ganancia ó pérdida; los productos se dividen por la suma de los capitales; y los cocientes, sumados entre sí, deben dar la ganancia ó pérdida, como prueba de que está bien hecha la operación.*

Ejemplo del segundo caso. Dos invididuos han hecho compañía, para trabajar en negocios de ganado: el primero ha puesto 2000 sucres, por 6 meses; el segundo, igual capital, pero solamente por 2 meses. Habiendo obtenido una ganancia de 1600 sucres, quieren saber cuánto corresponde á cada uno.

Explicación.—Puesto que la ganancia debe repartirse proporcionalmente á los tiempos, una vez que es igual el capital de cada socio, la operación se dispone y se ejecuta así:

$$
\begin{array}{ll}
6 \times 1600 = 9600 : 8 = 1200 & \text{(ganancia del primero)} \\
2 \times 1600 = 3200 : 8 = 400 & \text{(ganancia del segundo)} \\
\overline{8} \qquad\qquad\qquad\quad \overline{1600} &
\end{array}
$$

Los tiempos 6 y 2 son los *números proporcionales*, y la ganancia 1600 es el *número propuesto.*

Este caso, que se llama también *regla de compañía con tiempo ó compuesta*, no es sino otra regla de partición directa.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver el segundo caso, esto es, cuando los capitales son iguales, y los tiempos desiguales, se multiplica cada tiempo por la ganancia ó pérdida; los productos se dividen por la suma de los tiempos; y los cocientes, sumados entre sí, deben dar la ganancia ó pérdida, como prueba de que la operación está bien hecha.*

Ejemplo del tercer caso. Dos individuos han hecho compañía, para emprender negocios de anís y de café: el primero ha puesto 1800 sucres, por 4 meses; el segundo, 1600 sucres, por 8 meses. Habiendo obtenido una ganancia de 3000 sucres, quieren saber cuánto corresponde á cada uno.

Explicación.—Teniendo en cuenta á la vez los capitales y los tiempos, la operación se dispone así:

$$1800 \times 4 = 7200$$
$$1600 \times 8 = 12800$$

Hemos multiplicado cada capital por cada tiempo, y hemos obtenido los nuevos capitales 7200 y 12800.

Los *números proporcionales* son los nuevos capitales, y el *número propuesto* es la ganancia 3000. Por consiguiente, este caso queda reducido al primero, y se dispone la operación, en definitiva, de este modo:

$$7200 \times 3000 = 21600000 : 20000 = 1080 \text{ (al primer socio)}$$
$$12800 \times 3000 = 38400000 : 20000 = 1920 \text{ (al segundo socio)}$$
$$\overline{20000} \qquad\qquad \overline{3000}$$

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver el tercer caso, esto es, cuando los capitales y los tiempos son desiguales, se multiplica cada capital por cada tiempo, y resultan nuevos capitales. Estos se multiplican por la ganancia ó pérdida; los productos se dividen por la suma de los nuevos capitales; y los cocientes, sumados entre sí, deben dar la ganancia ó pérdida, como prueba de que la operación está bien hecha.*

Escolio. Una vez que hay proporcionalidad entre los tiempos y las ganancias, es claro que lo mismo ganan 1800 sucres en 4 meses, que 1800×4 en 1 mes; lo mismo ganan 1600 sucres en 8 meses, que 1600×8 en 1 mes. Por esta razón, planteámos el problema de la manera que queda expuesto, y por igual razón establecimos la regla anterior.

PROBLEMAS

1° Divídase el número 120 en partes directamente proporcionales á los números 2, 6 y 4.

2° Un padre de familia dispone en su testamento que se reparta la cantidad de 6000 sucres entre tres hijos, pero en partes directamente proporcionales á sus edades. El primero tiene 10 años; el segundo 6, y el tercero 4. ¿Cuánto corresponde á cada hijo?

3° Una persona piadosa da 200 sucres á tres mendigos, pero distribuye el dinero en partes inversamente proporcionales á los números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{8}$. Cuál es la parte que toca á cada uno?

4° Dos albañiles tienen que repartir una ganancia de 500 sucres, entre 3 peones, pero en partes directamente proporcionales á los números $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$. Cuánto deben dar á cada uno?

5º Un hacendado ha hecho entarimar una sala muy espaciosa con dos carpinteros: el primero ha empleado 6 oficiales, durante 12 días; el segundo, 4 oficiales, durante 8 días. ¿Cuánto debe pagarse á cada carpintero sobre la cantidad de 800 sucres?

6º Dos obreros han ganado 738 sucres. ¿Cuánto corresponde á cada uno, sabiendo que el 1º ha trabajado 8 horas diarias, durante 36 días; y el 2º, 10 horas diarias, durante 50 días?

7º Divídase el número 480 en partes inversamente proporcionales á los números 6, $\frac{3}{4}$ y 2.

8º Tres comerciantes han reunido un capital de 50000 sucres, para negociar en toda clase de vinos; pero una vez disuelta la compañía, el 1º recibe 2000 sucres de ganancia; el 2º, 3516; y el 3º, 4448. Cuál es el capital de cada uno?

9º Una sociedad comercial de dos individuos, que pusieron iguales capitales, duró cierto tiempo. Al cabo de éste, se repartieron una ganancia de 10000 sucres. El 1º recibió 6740 sucres, y el 2º. 3260 sucres. ¿Cuántos meses duró cada individuo en la compañía?

10 Dos comerciantes emprendieron juntos el negocio de sacar caucho, con un capital de 20000 sucres. El 1º puso 9852 sucres, por 10 meses; el 2º, 10148 sucres, por 8 meses. Habiendo obtenido una ganancia de 12000 sucres, se pregunta cuánto corresponde á cada uno.

11 Tres individuos han reunido un capital de 40000 sucres, para importar mercancías á Quito. Las puestas están entre sí, como los números 8, 7 y 5; los tiempos correspondientes están también entre sí, como los números 1, 2 y 3. Han ganado 25000 sucres. Se pregunta ahora cuánto puso y cuánto gana cada socio.

12 Divídase el número 60 en 3 partes, de modo que la primera sea el triple de la segunda, y que la tercera sea á la segunda cómo 3 es á 4.

Regla de mezclas.

La regla de mezclas es una operación que tiene por objeto averiguar el valor medio de varias especies, cuando se conocen la cantidad y el valor de cada una.

También *tiene por objeto* averiguar las partes que deben tomarse de varias especies de valor conocido, para formar una especie de valor medio.

División de la regla de mezclas.

La regla de mezclas es de dos maneras: *directa é inversa.*

Es directa, cuando tiene por objeto averiguar el valor medio de varias especies.

Es inversa, cuando tiene por objeto averiguar las partes que deben tomarse de varias especies, para formar una especie de valor medio.

Ejemplo de la regla de mezclas directa. Un comerciante tiene tres clases de coñac: 60 botellas de á 5 sucres la botella; 70 botellas de á 4 sucres la botella; 50 botellas de á 3 sucres la botella. Quiere saber el precio medio, para vender todas tres clases de coñac á un mismo precio.

Explicación.—Se multiplican los números 60, 70 y 50 por los precios 5, 4 y 3, respectivamente. La suma de los productos se divide por la suma de las especies, y el cociente indica el valor medio.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\begin{array}{rl} 60\times 5 = 300 & \text{sucres} \\ 70\times 4 = 280 & \text{sucres} \\ 50\times 3 = 150 & \text{sucres} \\ \hline 180 \qquad\;\; 730 & \text{sucres} \end{array}$$

Dividiendo ahora la suma 730 por la suma 180, se obtiene el valor medio, así:

730 : 180=4,05 (precio medio)

Como se ve, el comerciante debe vender todas tres clases de coñac á 4 sucres 5 centavos la botella.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para resolver una regla de mezclas directa, se multiplica cada especie por su valor, y se suman los productos que resultan. La suma de éstos se divide por la suma de las especies, y el cociente indica el valor medio.*

División de la regla de mezclas inversa.

La regla de mezclas inversa es de dos maneras: *simple y compuesta.*

Es simple, cuando las especies dadas, que deben mezclarse, son solamente dos.

Es compuesta, cuando las especies dadas, que deben mezclarse, son más de dos.

Ejemplo de regla de mezclas inversa simple. Un comerciante posee dos barriles de vino: *uno dulce*, que contiene 40 botellas, de á 1 sucre 60 centavos la botella; y *otro seco*, que contiene 32 botellas, de á 2 sucres 20 centavos la botella. Quiere mezclar estas dos clases de vinos, y quiere saber al mismo tiempo cuántas botellas debe tomar de cada barril, para formar *uno nuevo*, que contenga 40 botellas, á fin de vender cada una de éstas á 1 sucre 80 centavos.

Explicación.—Se toman *únicamente* los precios, como datos del problema, y son 2,20 cs., 1,80 cs. y 1,60 centavos.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$40 \left\{ \begin{array}{ll} 2{,}20 & 20 \\ 1{,}80 & \\ 1{,}60 & 40 \end{array} \right.$$

Como se ve, se coloca primero el valor superior; en seguida, el valor medio; y por último, el valor inferior.

Se resta el valor medio del superior, y la diferencia 40 se escribe en frente del valor inferior; después se resta el valor inferior del valor medio, y la diferencia 20 se escribe en frente del valor superior.

La cuestión queda ahora reducida á partir el número 40, que representa la mezcla, en partes directamente proporcionales á los números 20 y 40.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\begin{array}{llll} 20\times 40= & 800 & : 60= & 13+\frac{1}{3} \\ 40\times 40= & 1600 & : 60= & 26+\frac{2}{3} \\ \hline 60 & & & 40\ „ \end{array}$$

Luego del barril que contiene 46 botellas, deben tomarse 13 botellas con $\frac{1}{3}$ parte de botella; y del barril que contiene 32 botellas, deben tomarse 26 botellas con $\frac{2}{3}$ partes de botella.

Está, pues, hecha la mezcla de las dos clases de vinos, y está formado el nuevo barril de 40 botellas, para vender cada una de éstas á 1 sucre 80 centavos.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver una regla de mezclas inversa simple, se escribe primero el valor superior; debajo de éste, el valor medio; y luego el valor inferior. Se resta el valor medio del valor superior, y la diferencia se escribe en frente del valor inferior; en* *seguida se resta el valor inferior del valor medio, y la diferencia se escribe en frente del valor superior. Por último, se divide el número que representa la mezcla, en partes directamente proporcionales á las diferencias obtenidas, de acuerdo en todo con la regla de partición.*

Ejemplo de regla de mezclas inversa compuesta.

Un comerciante tiene mayorca de cuatro calidades: de á 80 centavos la botella; de á 20 centavos; de á 30 centavos; y de á 60 centavos. Quiere mezclar estas cuatro clases de mayorca, y quiere saber al mismo tiempo cuántas botellas debe tomar de cada clase, de modo que resulten 70 botellas de mezcla, á fin de vender cada una de éstas á 45 centavos.

Explicación 1ª—Se divide en primer lugar el número 70 en dos partes iguales, que son 35 y 35; después se toman los datos 80 y 30, y se coloca entre éstos el valor medio 45.

La operación se dispone entonces así:

$$35 \left\{ \begin{array}{ll} 80 & 15 \\ 45 & \\ 30 & 35 \end{array} \right.$$

Se resta el valor medio del valor superior, y la diferencia 35 se escribe en frente del valor inferior; después se resta el valor inferior del valor medio, y la diferencia 15 se escribe en frente del valor superior.

La cuestión queda ahora reducida á partir el número 35 en partes directamente proporcionales á las diferencias obtenidas.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\begin{array}{l} 15 \times 35 = 525 : 50 = 10 + \frac{1}{2} \\ 35 \times 35 = 1225 : 50 = 24 + \frac{1}{2} \end{array} \Big\} \text{ cocientes}$$

$$\overline{50} \qquad\qquad \overline{35\ ,,}$$

(primera regla simple)

Explicación 2ª—Se toman ahora los otros dos datos 60 y 20, y se coloca entre éstos el valor medio 45.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$35 \left\{ \begin{array}{ll} 60 & 25 \\ 45 & \\ 20 & 15 \end{array} \right.$$

Se resta el valor medio del valor superior, y la diferencia 15 se escribe en frente del valor inferior; después se resta el valor inferior del valor medio, y la diferencia 25 se escribe en frente del valor superior. La cuestión queda ahora reducida á partir el número 35, que es la otra mitad de 70, en partes directamente proporcionales á las diferencias obtenidas.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\left.\begin{array}{l} 25\times35=875 : 40=21+\frac{7}{8} \\ 15\times35=525 : 40=13+\frac{1}{8} \end{array}\right\}\text{cocientes}$$

$$\begin{array}{lll} \overline{40} & & \overline{35\ ,,} \end{array}$$

(segunda regla simple)

Los cocientes de ambas reglas simples indican el número de botellas que debe tomarse de cada clase de mayorca.

La descomposición de la regla de mezclas compuesta en reglas simples, se hace del modo más conveniente, en dos ó más reglas, aunque haya que repetir un mismo dato.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver una regla de mezclas inversa compuesta, se la descompone en reglas simples, de modo que tengan todas por especie media común la especie media propuesta, y se resuelven las reglas simples.*

Regla de ligación ó aleación.

La regla de ligación es una operación que tiene por objeto enseñar el modo de combinar metales fundidos.

Se llama *liga* la porción de cobre que se echa en el oro ó en la plata, cuando se acuña moneda, con el fin de dar á ésta más consistencia.

Amalgama es la combinación del mercurio ó ázoe con otro ú otros metales.

Advertencia. Todos los procedimientos y todas las explicaciones que expusimos en la *Regla de mezclas*, son aplicables al caso presente; pues la única diferencia consiste en que esta segunda operación versa sobre la mezcla de metales fundidos, y la primera operación sobre la mezcla de otras sustancias.

Ejemplo. Un platero tiene dos clases de oro: una de 0,875 de ley, y otra de 0,750 de ley. ¿Cuántos gramos debe tomar de cada clase de oro, para formar un vaso bien grande, que pese 25 onzas, y tenga 0,840 de ley?

Según las explicaciones dadas en la *Regla de mezclas*, la operación se dispone así:

$$25 \left\{ \begin{array}{ll} 875 & 90 \\ 840 & \\ 750 & 35 \end{array} \right.$$

Ahora se parte el número 25 proporcionalmente á las diferencias 90 y 35. Por tanto, la operación se dispone y se ejecuta así:

$$\left. \begin{array}{l} 90 \times 25 = 2250 : 125 = 18 \\ 35 \times 25 = 875 : 125 = 7 \end{array} \right\} \text{gramos}$$

$$\overline{125} \qquad\qquad \overline{25}$$

PROBLEMAS

1º Un comerciante tiene tres clases de casimir francés: 90 metros de á 6 sucres el metro; 120 metros de á 4 sucres el metro; y 60 metros de á 3 sucres el metro. ¿A qué precio medio debe vender todas tres clases de casimir?

2º Un deudor paga á su acreedor la cantidad de 400 sucres en unas piezas de paño de á 6 sucres la vara de una clase, y de á 4 sucres la vara de otra clase. ¿Cuántas varas debe entregar de uno y otro paño?

3º Un hacendado tiene harina de á 4 sucres, de á 6 sucres, de á 9 sucres la carga. ¿Cuántas debe tomar de cada clase, para vender á 5 sucres la carga de la mezcla, cuyo número asciende á 60?

4º Un negociante tiene mayorca de Quito, y también de Guayaquil. ¿Cuántas botellas debe tomar de uno y otro, para formar una mezcla de 80 botellas, y vender cada una de éstas á 60 centavos, sabiendo que la botella del primer mayorca vale 40 centavos, y la del segundo 90 centavos?

5º Un comerciante tiene alcohol de 4 calidades: de 30 grados, de 20 grados, de 26 grados y de 18 grados. ¿Cuántos litros debe tomar de cada clase, para obtener 58 litros de á 22 grados?

6º ¿Cuánto de plomo se debe agregar á 19 kilogramos de estaño de 0,870 de ley, para que tenga 0,900?

7º En una casa de moneda hay oro de dos calidades: el uno de 0,968 de ley, y el otro de 0,834. ¿Cuántos gramos deben tomarse de uno y otro para la respectiva fundición, y obtener 0,900 de ley?

8º. Los títulos de dos aleaciones son, respectivamente, 0,876 y 0,640. ¿Cuántos gramos deben tomarse de una y otra, para formar una tercera aleación de 0,900?

LECCION VIGÉSIMAPRIMERA

Regla de plazos.

Se llama *regla de plazos ó de vencimiento medio*, una operación que tiene por objeto averiguar el tiempo en que debe hacerse un solo pago, en lugar de hacer varios, según convenio entre el deudor y el acreedor.

Los casos que, con más frecuencia ocurren en la práctica, son cuatro.

CASO PRIMERO. Este consiste en averiguar el tiempo en que debe hacerse un solo pago, en lugar de hacer varios en distintos plazos, á partir de una misma fecha, con el objeto de que haya compensación en los intereses.

Ejemplo. El 30 de Diciembre de 1896, un negociante compró varias mercancías por 1200 sucres, y firmó tres pagarés: el primero por 700 sucres, con 8 meses de plazo; el segundo por 400 sucres, con 6 meses de plazo; y el tercero por 100, con 2 meses de plazo. El deudor conviene con el acreedor en hacerle un solo pago. ¿Cuál es el tiempo en que debe verificarse dicho pago, á fin de que no sufran perjuicio en los intereses el uno ni el otro?

Explicación.—Para resolver este problema, se raciocina así: 700 sucres en 8 meses producen el mismo interés que 700×8 en un mes, así:

700×8 en un mes
400×6 en un mes
100×2 en un mes

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\begin{array}{rrr} & 700 \times 8 = & 5600 \\ & 400 \times 6 = & 2400 \\ & 100 \times 2 = & 200 \\ \hline \text{(suma de capitales)} & 1200 & 8200 \text{ (suma de productos)} \end{array}$$

Aplicando el *método de la unidad*, se raciocina de esta otra manera:

Si 8200 sucres producen cierto interés en 1 mes, claro está que 1 solo sucre producirá el mismo interés en un tiempo 8200 veces mayor, así:

$$\frac{8200}{1};$$

luego 1200 sucres producirán igual interés en un tiempo 1200 veces menor, así:

$$\frac{8200}{1200}=6 \text{ meses } 25 \text{ días}$$

Dividiendo 82 por 12, se obtiene el cociente 6 meses, y sobra el quebrado $\frac{10}{12}$ avos de mes. Valuando este quebrado en días, para lo cual se multiplica el numerador por 30 días que tiene el mes comercial, y hecha la división, resultan 25 días.

Como se ve, el total 1200 sucres hay que pagarlo al cabo de 6 meses 25 días, contados desde el 30 de Diciembre de 1896, esto es, hay que hacer el pago el 25 de Julio de 1897.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver el primer caso, se multiplica cada capital por su plazo; luego se divide la suma de los productos por la suma de los capitales, y el cociente indica el tiempo en que debe hacerse el pago total.*

CASO SEGUNDO. Este consiste, lo mismo que el primero, en averiguar el tiempo en que debe hacerse un solo pago, en lugar de hacer varios en distintos plazos, á partir éstos de fechas distintas.

Ejemplo. Un individuo ha comprado tres facturas de mercancías á un mismo comerciante, pero en distintas fechas: la 1ª., el 6 de Julio, por 240 sucres, con 2 meses de plazo; la 2ª., el 2 de Agosto, por 480 sucres, con 4 meses de plazo; y la 3ª., el 20 de Agosto, por 720 sucres, con 6 meses de plazo. Ha firmado los respectivos documentos, y quiere hacer un solo pago. ¿Al cabo de qué tiempo hará dicho pago, y á partir de qué fecha?

Explicación.—El problema se dispone así:

240 sucres el 6 de Julio, con 2 meses de plazo.
480 sucres el 2 de Agosto, con 4 meses de plazo.
720 sucres el 20 de Agosto, con 4 meses de plazo.

El primer plazo, contado desde el 6 de Julio, se vence el 6 de Septiembre; el segundo se vence el 2 de Diciembre; y el tercero se vence el 20 de Diciembre.

Ahora bien, desde el 6 de Septiembre, que es el vencimiento del primer plazo, hasta el 2 de Diciembre, hay 86 días, apreciando los meses como comerciales.

Desde el 6 de Septiembre hasta el 20 de Diciembre, que es el vencimiento del tercer plazo, hay 104 días.

Si se supone vencido el primer plazo, y se toma la fecha de este vencimiento como punto de partida, es claro que el primer capital 240 tendrá cero días de plazo; el capital 480 tendrá 86 días; y el capital 720 tendrá 104 días.

Como se ve, este caso queda reducido al primero, y la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r}240\times\ \ \ 0=\ \ \ 000\\480\times\ \ 86=41280\\720\times104=74880\\\hline 1440\qquad 116160\end{array}$$

Dividiendo la suma de los productos por la suma de los capitales, se obtienen 80 días y 16 horas por cociente. Hay, pues, que pagar la suma total 1440 sucres, después de 80 días de vencido el primer plazo, esto es, el 26 de Noviembre, apreciando los meses como comerciales.

En efecto, del 6 de Septiembre al 30 de este mes, van 24 días. Agregando á éstos los 30 de Octubre, más 26 de Noviembre, resultan 80 días, contados desde el 6 de Septiembre, que es la fecha del primer vencimiento, y el pago total hay que hacerlo el 26 de Noviembre.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para resolver el segundo caso, se toma la fecha del primer vencimiento como punto de partida, y al respectivo capital se le pone cero por plazo. A cada uno de los demás capitales se le pone por plazo el número de días transcurridos entre el punto de partida y el correspondiente vencimiento. En seguida se multiplica cada capital por su plazo; luego se divide la suma de los productos por la suma de los capitales, y el cociente indica el tiempo en que debe hacerse el pago total, contado dicho tiempo desde el vencimiento del primer plazo.*

Escolio 1°. Si acaso la fecha del vencimiento del primer plazo es posterior á alguno de los demás vencimientos, entonces se pone el *signo menos* al producto ó productos respectivos. Se resta la cantidad que tiene *signo menos* de la otra cantidad, y la diferencia se divide por la suma de los capitales.

Ejemplo. Un individuo ha comprado tres facturas de mercancías: la primera, el 6 de Marzo, por 400 sucres, con 4 meses de plazo; la segunda, el 6 de Abril, por 300 sucres, con 2 meses de plazo; y la tercera, el 6 de Mayo, por 500 sucres, con 6 meses de plazo. En qué tiempo debe hacer un solo pago?

Explicación.—El primer plazo se vence el 6 de Julio; el segundo, el 6 de Junio; y el tercero, el 6 de Noviembre.

Como se ve, el 6 de Julio es fecha posterior al 6 de Junio.

Ahora, del 6 de Junio al 6 de Julio hay 30 días; del 6 de Julió al 6 de Noviembre, hay 120 días, apreciando los meses como comerciales.

Suponiendo vencido el primer plazo, y tomando este vencimiento como punto de partida, es claro que el capital 400 sucres tiene cero días de plazo, y entonces la operación se dispone así:

$$\begin{array}{rrr} 400\times & 0= & 000 \\ 300\times- & 30=- & 9000 \\ 500\times & 120= & 60000 \end{array}$$

Al producto 9000 se pone el *signo menos*, porque el 6 de Julio es fecha posterior al 6 de Junio.

Ahora se resta de 60000 el producto—9000, y la diferencia 51000 se divide por 1200, suma de los capitales, y el cociente 42 días indica que la cantidad total 1200 sucres debe ser satisfecha 42 días después de vencido el primer plazo, esto es, el 18 de Agosto. El quebrado $\frac{1}{2}$ de día, que resulta al hacer la división, se desprecia.

Escolio 2°. Si la fecha del vencimiento del primer plazo es posterior á las fechas de los demás vencimientos, entonces se pone el *signo menos* á los productos respectivos. La suma de éstos se divide por la suma de los capitales, y el cociente indica el tiempo en que debe pagarse la cantidad total.

Ejemplo. Un negociante ha tomado á crédito tres facturas de mercancías: la primera, el 1°. de Abril, por 1800 sucres, con 7 meses de plazo; la segunda, el 1°. de Mayo, por 400 sucres, con 4 meses de plazo; y la tercera, el 1°. de Junio, por 200 sucres, con 2 meses de plazo. En qué tiempo debe hacer un solo pago?

Explicación.—El primer plazo se vence el 1°. de Noviembre; el segundo, el 1°. de Septiembre; y el tercero, el 1°. de Agosto.

Como se ve, el 1°. de Noviembre es fecha posterior á las otras dos.

Pues bien, del 1°. de Septiembre al 1°. de Noviembre, hay 60 días; del 1°. de Agosto al 1°. de Septiembre, hay 30 días, apreciando los meses como comerciales.

Suponiendo vencido el primer plazo, y tomando este vencimiento como punto de partida, es claro que el capital 2400 sucres tiene cero días de plazo, y entonces la operación se dispone así:

$$\begin{array}{rrr} 1800\times & 0= & 0000 \\ 400\times & -60= & -24000 \\ 200\times & -30= & -\ 6000 \\ \hline 2400 & & 30000 \end{array}$$

Ahora se suman los dos productos, por tener ambos *signo negativo*. La suma de ellos se divide por la suma de los capitales, y el cociente 12 días indica que la cantidad total 2400 debe ser satisfecha 12 días después de vencido el primer plazo, esto es, el 12 de Noviembre. El quebrado $\frac{1}{2}$ de día, que resulta al hacer la división, se desprecia.

Caso tercero. Este consiste en averiguar la prórroga que el acreedor debe dar al deudor, para que pague el resto de una cantidad, después de haberle hecho uno ó más adelantos.

Ejemplo. Un individuo ha comprado una factura de mercancías por 1200 sucres, para pagarlos dentro de 8 meses. Cuatro meses antes de cumplirse el plazo, ha pagado 700 sucres, y antes de otros dos meses ha pagado 300. Se pregunta ahora cuánto tiempo de prórroga debe dar el acreedor al deudor, para que pueda pagar los 200 sucres restantes.

Explicación.—Para resolver este problema, se raciocina así: 700 sucres producen en 4 meses el mismo interés que 700×4 en un mes, así:

$$700 \times 4 = 2800$$

300 sucres producen en 2 meses el mismo interés que 300×2 en un mes, así:

$$300 \times 2 = 600 \quad (700 + 300 = 1000) \quad (2800 + 600 = 3400)$$

En virtud de que el deudor ha hecho dos pagos adelantados, cuyo valor asciende á 1000 sucres, se ha privado de una ganancia igual á la que produjeran los 3400 sucres en un mes. Como el primero debe todavía 200 sucres, es muy justo que el acreedor se prive también de la ganancia que los 200 sucres produzcan lo mismo que los 3400 sucres en un mes, para lo cual se divide 3400 por 200, y el cociente indica el tiempo en que debe pagar los 200 sucres restantes, así:

$$3400 : 200 = 17 \text{ meses}$$

Ahora se suman los números 4 y 2, que expresan los tiempos de los pagos anticipados, y el resultado 6 se resta del número 17. La diferencia 11 indica que los 200 sucres deben ser satisfechos al cabo de 11 meses, contados éstos desde la fecha del segundo pago.

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para resolver el tercer caso, se multiplica cada pago por el tiempo de anticipación; luego se divide la suma de los productos por la cantidad que falta que pagar; en seguida se* *resta del cociente la suma de los tiempos que expresan los pagos anticipados, y la diferencia indica el tiempo en que debe pagarse el resto de la cantidad, el cual tiempo se cuenta desde la fecha del segundo pago.*

CUARTO CASO. Este consiste en averiguar qué cantidades deben pagarse antes y después del plazo, según convenio hecho entre el deudor y el acredor.

Ejemplo. Un comerciante tiene que pagar el 20 de Julio la cantidad de 2400 sucres. El 22 de Mayo hace un arreglo con el acreedor, para pagarle dicha cantidad en dos dividendos: el primero, el 4 de Junio; y el segundo, el 6 de Agosto. Á cuánto asciende cada dividendo?

Explicación.—Del 22 de Mayo, que es la fecha del *convenio*, á la del segundo pago, es decir, hasta el 6 de Agosto, hay 74 días, apreciando los meses como comerciales.

Del 22 de Mayo al 20 de Julio, que es la fecha en que debía pagarse toda la cantidad, hay 58 días.

Del mismo 22 de Mayo al 4 de Junio, hay 12 días.

El problema se plantea ahora como una regla de mezclas inversa simple. Como especie superior, se pone el número 74; como especie media, el número 58; y como especie inferior, el número 12, así:

74 46 (diferencia de 58 y 12)
58
12 16 (diferencia de 74 y 58)

El número 2400 se parte, pues, proporcionalmente á las diferencias 46 y 16, así:

$$\begin{array}{rl} 2400\times46=110400 : 62= & 1780,65 \\ 2400\times16=\ \ 38400 : 62= & 619,35 \\ \hline 62 \qquad\qquad & 2400\ ,, \end{array}$$

Luego el 4 de Junio debe pagarse 1780 sucres 65 centavos; y el 6 de Agosto, 619 sucres 35 centavos.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para resolver el cuarto caso, se averiguan los días transcurridos desde la fecha del convenio hasta la del segundo pago, y el número que resulta se pone como especie superior. El número de días transcurridos desde la fecha del convenio hasta la fecha en que debía pagarse toda la cantidad, se pone como es-*

pecie media. El número de días transcurridos desde la misma fecha del convenio hasta la del primer pago, se pone como especie inferior. En seguida se resta la especie media de la especie superior, y se obtiene cierta diferencia; luego se resta la especie inferior de la especie media, y se obtiene cierta diferencia. Por último, se parte el número, que expresa la deuda, proporcionalmente á las diferencias obtenidas, y los resultados indican las cantidades que deben pagarse antes y después del plazo.

PROBLEMAS

1°. Un negociante de ganado tiene que hacer tres pagos: el primero, de 2300 sucres, al cabo de 1 año 2 meses; el segundo, de 800 sucres, al cabo de 10 meses; y el tercero, de 500 sucres, al cabo de 3 meses. ¿En qué tiempo debe hacer un solo pago, á partir de una misma fecha?

2°. ¿Cuál es el vencimiento medio de tres pagarés firmados en las siguientes fechas: el primero, de 2000 sucres, el 18 de Julio; el segundo, de 900 sucres, el 26 de Agosto; y el tercero, de 600 sucres, el 10 de Septiembre, á partir de una misma fecha?

3°. Un comerciante de Guayaquil ha recibido de Europa varias mercancías, què le cuestan 1810 sucres, para pagarlos en tres dividendos, y firma tres documentos: el primero, el 6 de Abril, por 842 sucres, con 6 meses de plazo; el segundo, el 20 de Mayo, por 630 sucres, con 4 meses de plazo; y el tercero, el 24 de Junio, por 338 sucres, con 2 meses de plazo. ¿En qué tiempo debe hacer un solo pago, según convenio celebrado con el acreedor?

4°. Un individuo, que ha comprado á crédito unas cuantas cabezas de ganado gordo, debe 8600 sucres, pagaderos el 10 de Agosto. El 15 de Junio paga 5900. ¿Cuándo debe pagar el resto de 2700 sucres?

5°. Un comerciante vende una factura de mercancías por 5000 sucres, con 4 meses de plazo. A' los 2 meses recibe 3200 sucres. Cuánto tiempo debe esperar por el resto?

LECCION VIGÉSIMASEGUNDA

Del arbitraje.

Arbitraje es una operación que tiene por objeto comparar monedas de diferentes países.

También se define el arbitraje diciendo que es una operación de cambio de valores mercantiles, con el fin de averiguar la utilidad que resulte de comparar los precios de diferentes plazas.

Emplear sucres en la compra de francos, para por medio de éstos conseguir libras esterlinas, á fin de comprarlas más baratas que comprándólas directamente con sucres, *es hacer una operación de arbitraje.*

Comprar una letra sobre la plaza de París, para adquirir por medio de ella otra sobre Londres con ventaja, también es *hacer una operación de arbitraje.*

Como se ve, el objeto del arbitraje es obtener ventajas sobre la reducción directa de monedas por medio de una reducción indirecta, así como sobre la compra de letras de una manera igualmente indirecta.

Al hacer la comparación de varias reducciones de monedas, ó al hacer un cálculo de arbitraje antes de comprar una letra, se toma *arbitrariamente* un resultado cualquiera, con el fin de buscar la vía más ventajosa. De aquí proviene el nombre de *arbitraje*, que se da á la operación de que tratamos.

Ejemplo. Un comerciante de Guayaquil tiene que pagar 2040 sucres en Londres; pero sabedor de que las letras sobre París están al 2 °/o; que las de París sobre Londres están al 4 °/o, y las de Guayaquil sobre Londres al 20 °/o, hace los respectivos cálculos de arbitraje, para ver si le conviene verificar el pago de una manera directa ó indirecta.

Explicación 1ª—Para saber cuánto vale una letra comprada en Guayaquil sobre la plaza de París, se raciocina de este modo:

Si para conseguir 100 fuertes franceses necesita 102 sucres, claro está que para conseguir 2040 fuertes ha menester mayor cantidad de sucres.

La operación se dispone y se ejecuta así

$$\frac{100}{2040}=\frac{102}{x}$$

De donde: $x=\frac{208080}{100}=2080$ sucres con 80 centavos

Restando 2040 de 2080,80, se obtiene el cambio por diferencia, así:

2080,80
2040,00 (cantidad que debo dar un Banco en París)

40,80 (cambio)

Como se ve, la letra importa 2080,80 centavos

Explicación 2ª—Para saber cuánto vale una letra comprada en París sobre Londres, al 4 °/o, se raciocina así:

Si para conseguir 100 fuertes ingleses, necesita 104 fuertes franceses, claro está que para conseguir 2040 fuertes ingleses, ha menester mayor cantidad de fuertes franceses.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{100}{2040}=\frac{104}{x}$$

De donde: $x=\frac{212160}{100}=2121$ fuertes franceses 60 céntimos

Restando 2040 de 2121,60, se obtiene por diferencia el cambio, así:

2121,60
2040,00 (cantidad que debe dar un Banco de Londres)

81,60 (cambio)

Como se ve, la letra importa 2121,60

Explicación 3ª—Para saber cuánto vale una letra comprada en Guayaquil sobre la plaza de Londres, al 20 °/o, se raciocina así:

Si para conseguir 100 fuertes ingleses, se necesitan 120 sucres, claro está que para conseguir 2040 fuertes ingleses, ha menester mayor cantidad de sucres.

La operación se dispone y se ejecuta así:

$$\frac{100}{2040}=\frac{120}{x}$$

De donde: $x=\frac{244800}{100}=2448$ sucres

Restando 2040 de 2448, se obtiene por diferencia el cambio:

2448
2040 (cantidad que debe dar un Banco de Londres)

408 (cambio)

Como se ve, la letra importa 2448 sucres.

Ahora bien, el cambio de Guayaquil sobre París importa 40 sucres 80 centavos.

El cambio de París sobre Londres importa 81 fuertes franceses con 60 céntimos, esto es, 81 sucres 60 centavos. Los dos cambios, sumados entre sí, ascienden á 122 sucres 40 centavos, así:

$$\begin{array}{r} 40{,}80 \\ 81{,}60 \\ \hline 122{,}40 \end{array}$$

El cambio de Guayaquil sobre la plaza de Londres importa 408 sucres.

Restando 122,40 de 408, se obtiene la diferencia 285,60, así:

$$\begin{array}{l} 408{,}00 \\ 122{,}40 \\ \hline 285{,}60 \end{array}$$ (cantidad que se economiza por medio del arbitraje)

Según se ve con toda claridad, la vía de París es sumamente ventajosa, esto es, la operación de arbitraje es la que debe adoptar el comerciante de Guayaquil, para economizar 285 sucres 60 centavos.

Potencias y raíces.

Se llama *potencia de un número* el producto que resulta de multiplicar el número dos ó más veces por sí mismo.

Se llama *raíz de una potencia* el número que, multiplicado dos ó más veces por sí mismo, produce la potencia.

Ejemplo. $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

Explicación.—El producto 256 es la potencia; y el número 4, que también se llama *factor*, es la raíz.

Se llama *grado de una potencia* el número de veces que se repite un mismo factor.

Explicación.—En el ejemplo que antecede, la potencia 256 es de cuarto grado, porque el número 4 entra cuatro veces como factor.

Primera potencia de un número es el número mismo.

Se llama *segunda potencia ó cuadrado* de un número el producto que resulta de multiplicar el número por sí mismo.

Ejemplos. $3 \times 3 = 9$; $5 \times 5 = 25$; $7 \times 7 = 49$; $9 \times 9 = 81$

Explicación.—El producto 9 es la potencia, y es de 2°. grado; porque el número 3, que es la raíz, está tomado dos veces como factor. Lo mismo se dice de los demás ejemplos.

Se llama *tercera potencia ó cubo* de un número el producto que resulta de tomar el número tres veces como factor.

Ejemplo. $4 \times 4 \times 4 = 64$

Explicación.—El producto 64 es la potencia, y es de tercer grado; porque el número 4, que es la raíz, está repetido tres veces como factor.

Se llama *cuarta potencia ó bicuadrado* de un número el producto que resulta de tomar el número cuatro veces como factor.

Ejemplo. $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

Explicación.—El producto 16 es la potencia, y es de cuarto grado; porque el número 2, que es la raíz, está tomado cuatro veces como factor.

El producto de cinco factores iguales se llama *quinta potencia*; el de seis, se llama *sexta potencia*, y así en adelante.

Indicación de las potencias.

La potencia de un número se indica por medio de un número pequeño, que se escribe en la parte superior y á la derecha del primero. El número pequeño se llama *exponente ó grado* de la potencia, é indica las veces que el número dado debe repetirse como factor.

Los tres últimos ejemplos se escriben así:

$$3^2 = 3 \times 3 = 9; \quad 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64; \quad 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16,$$

y se leen así:

Tres elevado al cuadrado ó á la segunda potencia, ó también, tres al cuadrado.

Cuatro elevado á la tercera potencia ó al cubo, ó también, cuatro á la tercera potencia.

Dos elevado á la cuarta potencia ó al bicuadrado, ó también, dos á la cuarta potencia.

Para indicar la potencia de un número compuesto, se escribe el número en un paréntesis; fuera de éste, y en la parte superior de la derecha, se escribe el exponente.

Ejemplo. $(341)^2$, y se lee: trescientos cuarenta y uno al cuadrado. El exponente indica que el número 341 se multiplique por sí mismo, así: $341 \times 341 = 116281$

También se indica la potencia de un número compuesto, trazando una línea horizontal por encima del número, y escribiendo el exponente en el extremo derecho de la línea.

El ejemplo anterior se escribe, pues, así:

$$\overline{341}^2=341\times 341=116281$$

Ejemplo 1°. La multiplicación de 5 al cuadrado por 5 á la cuarta potencia, se dispone así:

$$5^2\times 5^4=5\times 5\times 5\times 5\times 5\times 5=15625$$

Ejemplo 2°.

$$3^2\times 3^4\times 3^5=3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3=177147$$

Explicación.—En el primer ejemplo, se suman los exponentes 2 y 4, y la suma 6 indica que el número 5 se repita seis veces como factor, y puede escribirse así:

$$5^6=5\times 5\times 5\times 5\times 5\times 5, \text{ ó también } 5^{2+4}=5^6$$

La suma 11 de los exponentes del segundo ejemplo indica que el número 3 debe repetirse once veces como factor, y puede escribirse así:

$$3^{11}=3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3,$$

$$\text{ó también: } 3^{2+4+5}=3^{11}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para multiplicar entre sí varias potencias de un mismo número, basta sumar los exponentes, y luego hacer las multiplicaciones.*

Ejemplo. 2×6

Explicación.—Para elevar á la tercera potencia estos dos factores, se los escribe en un paréntesis; fuera de éste, y en la parte superior de la derecha, se escribe el exponente 3, así:

$$(2\times 6)^3=(2\times 6)\ (2\times 6)\ (2\times 6)=12\times 12\times 12=1728,$$

$$\text{ó también: } 2^3\times 6^3=(2\times 2\times 2)\ (6\times 6\times 6)=8\times 216=1728$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para elevar á una potencia cualquiera dos ó más factores, se eleva cada factor á dicha potencia, y luego se multiplican los resultados.*

Escolio. Cuando se multiplica un paréntesis por otro, como en el ejemplo anterior, se sobrentiende entre ellos el signo de multiplicar.

Ejemplo. $(4^2)^3 = 4^2 \times 4^2 \times 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^6 = 4096$

Explicación.—El exponente 3 indica que la expresión 4^2 debe repetirse tres veces como factor; luego se suman los exponentes del factor 4, que hacen 6. Este exponente indica, en definitiva, que el número 4 debe repetirse seis veces como factor.

De aquí se deduce la siguiente

REGLA.—*Para elevar una potencia á otra, se multiplican los exponentes, y el producto indica las veces que el número dado debe repetirse como factor.*

Extracción de la raíz cuadrada.

Se llama *extracción de raíces*, en general, una operación que tiene por objeto averiguar la raíz cuadrada ó cúbica, etc., de un número dado.

Se llama *raíz de un número* la cantidad que, multiplicada dos ó más veces por sí misma, produce el número.

La extracción de la raíz cuadrada se indica por medio de este signo $\sqrt{}$, llamado *signo radical.*

Ejemplo. $\sqrt[2]{4}$, y se lee: *raíz cuadrada de* 4

Explicación.—Dentro del ángulo se escribe un número 2 pequeño, que se llama *índice de la raíz*, é indica que ésta debe tomarse dos veces como factor, para que produzca la potencia, que es 4, la cual, por estar escrita debajo de la línea horizontal, se llama *subradical.*

En este ejemplo, la raíz es 2 que, multiplicada por sí misma, esto es, por 2, produce la potencia 4, así: $2 \times 2 = 4$

Cuando la extracción de la raíz es cuadrada, se suele no escribir el índice. El ejemplo anterior se escribe entonces así: $\sqrt{4}$

Se dice que un número *es potencia perfecta*, cuando existe otro número que, elevado á esa potencia, lo produce.

Ejemplo. Los números 25, 36 y 49 son cuadrados perfectos de 5, 6 y 7.

Explicación.—Los mismos números 25, 36 y 49 son potencias perfectas, porque los números 5, 6 y 7, elevados á la segunda potencia, producen los primeros.

Escolio. La elevación á potencias es una operación de composición; la extracción de raíces, una operación de descomposición.

En la extracción de la raíz cuadrada de números enteros se distinguen tres casos:

1°. Cuando el número es menor que 100.

2°. Cuando el número es mayor que 100, y menor que 10000.

3°. Cuando el número es mayor que 10000.

PRIMER CASO. Para extraer la raíz cuadrada de un número menor que 100, basta saber de memoria los cuadrados de los números dígitos, y ver cuál es el mayor cuadrado contenido en el número propuesto.

Los cuadrados de los números dígitos son, pues, los siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	(dígitos)
1	4	9	16	25	36	49	64	81	(cuadrados)

Ejemplo 1°. Cuál es la raíz cuadrada de 68? 8 con un residuo 4

Explicación.—El cuadrado de 8, es decir 64, se aproxima más á 68; de suerte que la raíz cuadrada de 68 es 8, con un residuo 4, que es el exceso de 68 sobre 64. En efecto, dividiendo 68 por 8, se obtiene 8 por cociente, y 4 por residuo.

Ejemplo 2°. Cuál es la raíz cuadrada de 39? 6 con un residuo 3

Ejemplo 3°. Cuál es la raíz cuadrada de 75? 8 con un residuo 11

Escolio. Cuando el número dado es cuadrado perfecto, se lo descompone en sus factores primos; luego se toma uno de cada dos factores iguales; en seguida se multiplican entre sí, y el producto es la raíz cuadrada.

Ejemplo 4°. Cuál es la raíz cuadrada del número 324? 18

Explicación.—Descomponiéndolo en sus factores primos, se tiene:

324	2
162	2*
81	3
27	3*
9	3
3	3*
1	

Ahora se toma uno de cada dos factores iguales, esto es, los señalados con los asteriscos; se los multiplica entre sí, y el producto 18 es la raíz cuadrada, así: $2 \times 3 \times 3 = 18$

Multiplicando la raíz 18 por sí misma, produce el número 324, así:

$$18 \times 18 = 324$$

SEGUNDO CASO. *Ejemplo* 1º. ¿Cuál es la raíz cuadrada del número 4682? 68 con un residuo 58

Explicación 1ª—Como este número es mayor que 100, y menor que 10000, es claro que la raíz cuadrada está comprendida entre 10 y 100; porque el cuadrado de 10 es 100, y el de 100 es 10000. Por tal motivo, la raíz tiene dos cifras, es decir, consta de decenas y unidades, y son $60+8$.

Elevándolas al cuadrado, esto es, multiplicándolas por sí mismas, se tiene:

$$\begin{array}{l} 60\ +8\ \text{(multiplicando)} \\ 60\ +8\ \text{(multiplicador)} \\ \hline 60^2+60 \times 8+60 \times 8+8^2, \text{ ó sea:} \end{array}$$

$$60^2+2 \text{ veces } 60 \times 8+8^2$$

El producto de 60^2 es 3600. El producto de 60 por 8 es 480; pero como es dos veces 480, es decir, $480+480$, resulta 960. El producto de 8^2 es 64.

Sumando los resultados 3600, 960 y 64, se obtiene 4624.

Multiplicando ahora la raíz 68 por sí misma, resulta la misma cantidad 4624, así:

$$68 \times 68 = 4624$$

De todo lo dicho se deduce que un número compuesto de decenas y unidades es igual al cuadrado de las decenas, más el doble producto de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.

En efecto, el número 3600 es el cuadrado de las decenas; el número 960 es el doble producto que proviene de multiplicar las decenas por las unidades; y el número 64 es el cuadrado de las unidades.

Explicación 2ª—En la práctica se procede así: Se traza el signo radical, y debajo de la línea horizontal se escribe el número 4682, así: $\sqrt{4682}$

No se escribe el índice 2 en el ángulo, según queda dicho, porque la extracción de la raíz es cuadrada.

Partiendo de derecha á izquierda, se divide el número con un punto en porciones de á dos cifras, así: 46.82

El cuadrado que más se aproxima á 46 es el de la raíz 6, esto es, 36, con un residuo 10.

A la derecha del residuo 10 se baja la porción 82, y se separa con un punto la cifra 2, así: 108.2

Ahora se duplica la raíz 6, que da 12, y este duplo se escribe debajo de ella; luego se divide la porción 108 por el número 12; y según el ensayo, el dividendo contiene 8 veces al divisor. La cifra 8 se escribe á la derecha de la raíz 6, y también á la derecha del duplo 12. En seguida se multiplica el número 8 por sí mismo y por 12, y el producto se resta del número 1082, y se obtiene 58 por diferencia.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{46.82} & 68 \\ 108.2 & \overline{128} \\ 58 & \end{array}$$

Como se ve, la raíz 6, elevada al cuadrado, da 36, el cual se resta abreviadamente de 46, y se obtiene 10 por diferencia, y se continúa la operación de la manera que queda explicada.

Para comprobar que 68 es la raíz cuadrada de 4682, se la eleva al cuadrado, esto es, se la multiplica por sí misma; y el producto, sumado con el residuo 58, da el número propuesto 4682, así:

$$68 \times 68 = 4624 + 58 = 4682$$

Ejemplo 2°. ¿Cuál es la raíz cuadrada del número 964? 31 con un residuo 3

Explicación.—Comenzando de derecha á izquierda, se divide el número con un punto en porciones de á dos cifras, y la porción de la izquierda no contiene sino una cifra. Como el 9 es cuadrado perfecto, la raíz es 3. Ahora se duplica la raíz, que da 6, y la porción 64 se divide con un punto. La cifra 6 se divide por el duplo de la raíz 3, que da 6, y cabe 1 vez. Esta cifra 1 se escribe á la derecha de la raíz 3 y á la derecha del duplo 6. Dicha cifra 1 se multiplica por sí misma y por el duplo 6, y el producto 61 se resta de 64, y se obtiene 3 por diferencia.

Para mayor claridad, la operación se dispone así:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9.64} & 31 \\ 06.4 & \overline{61} \\ 3 & \end{array}$$

De aquí se deduce la siguiente

Regla.—*Para extraer la raíz cuadrada de un número entero mayor que* 100 *y menor que* 10000, *se divide el número propues-*

lo, de derecha á izquierda, en porciones de á dos cifras, aun cuando la última porción de la izquierda conste de una sola cifra. En seguida se traza el signo radical, de modo que el número propuesto quede debajo de la línea horizontal. Se extrae la raíz cuadrada del mayor cuadrado perfecto contenido en la primera porción de la izquierda, y la raíz se escribe encima de la línea horizontal de la galera. Se cuadra la raíz, y el cuadrado se resta de dicha porción. A la derecha del residuo, si lo hay, se escribe la porción siguiente, y se separa con un punto la primera cifra de la derecha. La porción de la izquierda se divide por el duplo de la raíz, el cual se coloca debajo de la línea horizontal; la cifra que resulte en el cociente se escribe á la derecha de la raíz y á la derecha del duplo. Dicha cifra se multiplica por sí misma y por el duplo, y el producto se resta del dividendo. Para saber si está bien hecha la operación, se multiplica la raíz por sí misma, y el producto, sumado con el residuo, si lo hay, debe ser igual al número propuesto.

Escolio. En la raíz resultarán tantas cifras cuantas sean las porciones del número propuesto.

TERCER CASO. ¿Cuál es la raíz cuadrada del número 685472? 827 con un residuo 1543

Según las explicaciones que anteceden, la operación se dispone y se ejecuta así:

√68.54.72	827	(raíz)
45.4	162	
130.72	1647	
1543 (residuo)		

El número 16 es duplo de la raíz 8; el número 164 es duplo de la raíz 82.

Multiplicando por sí misma la raíz 827, y agregando al producto el residuo 1543, se obtiene el número propuesto 685472.

FIN

INDICE