

Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, FLACSO Ecuador
Departamento de Desarrollo, Ambiente y Territorio
Convocatoria 2011-2014

Tesis para obtener el título de doctorado en Economía del Desarrollo

Modelo multicriterio paramétrico compensatorio no-compensatorio

Rafael Tiberio Burbano Rodríguez

Directora: Alexandra Miranda Espinosa

Lectores: Wilson Pérez Oviedo, William Sacher, Ramiro A. Sánchez López
y Sandra Gutiérrez Pombosa

Quito, noviembre de 2018

Este trabajo de tesis está dedicado a mi Madre, a mamá Gilma como la llamaban la mayoría de sus nietos. Qué Dios la tenga en su gloria.

Epígrafe

Everything should be made as simple as possible, but not simpler.

Albert Einstein

There is also the other side of the coin minted by Einstein: a scientist's defense of art and knowledge - of lightness, completeness and accuracy.

Louis Zukofsky

Tabla de contenido

Resumen	XIV
Agradecimientos	XVI
Introducción.....	1
Capítulo 1	13
Marco teórico.....	13
1.1. Introducción	13
1.2 Definiciones generales.....	14
1.2.1 Estructuras <i>I-P</i> y estructuras <i>I-P-J</i>	14
1.2.2 Preferencias parciales	23
1.3 Preferencias no compensatorias Fishburn	25
Capítulo 2	28
Preferencias no compensatorias T2, T2b y T3	28
2.1 Preferencias no compensatorias T2 y T2b.....	28
2.1.1 Interacciones no compensación T2 y T2b	31
2.1.2 Interacciones no compensación Fishburn y T2	32
2.2 Preferencias no compensatorias T3	40
2.2.1 Independencia no compensación T2 y T3	42
Capítulo 3	44
Preferencias compensatorias.....	44
3.1 Preferencias compensatorias y parcialmente compensatorias T2.....	44
3.1.1 Preferencias compensatorias T2	46
3.2 Preferencias compensatorias y parcialmente compensatorias T3.....	47
3.3 Estructuras de preferencia paramétrica.....	49
Capítulo 4	51

Preferencias cónicas y cuasi cónicas	51
4.1 Estructura de preferencia paramétrica ilimitada cónica	51
4.2 Estructura de preferencia paramétrica limitada cuasi cónica	56
4.2.1 Representaciones gráficas de los modelos cónicos	61
4.3 Preferencias cónicas y no compensación y compensación T3.	62
4.4 Preferencias en semicriterios	64
4.4.1 Transformación semicriterio-criterio.....	65
4.4.2 Preferencias cónicas en semicriterios	65
4.5 Ponderación de los criterios.....	68
4.6 Ponderaciones y semicriterios	72
Capítulo 5	75
Ejemplo de aplicación del modelo cuasi cónico.....	75
5.1 Matriz de datos	75
5.2 Vectores diferencia y regiones	76
5.3 Matriz coloreada.....	77
Capítulo 6	82
Preferencia difusa	82
6.1 Conjuntos difusos	82
6.1.1 Operaciones entre conjuntos difusos	83
6.2 Extensión difusa de un subconjunto de \mathbb{R}^n	85
6.3 Preferencia débil difusa R	87
6.4 Estructura $I-P-J$ difusa	88
6.5 Relación entre α y z	90
6.6 Representación gráfica del modelo difuso.....	93
6.7 Ponderación de los criterios.....	97

6.8 Sinergia.....	99
Capítulo 7	101
Agrupación de criterios	101
7.1 Partición de Ω y conos.....	101
7.2 Conos mixtos	103
7.3 Preferencia débil difusa R con criterios agrupados en dimensiones	107
7.4 Simetría en criterios intragrupo	108
Capítulo 8	110
Criterios difusos, estocásticos y categóricos	110
8.1 Números difusos reales y variables estocásticas	110
8.2 Variables cualitativas ordinales	110
8.3 Simulación de Montecarlo (Análisis de sensibilidad)	111
Capítulo 9	112
Agregación global de las preferencias.....	112
9.1 Modelo descriptivo. Operador \mathcal{G}_1	113
9.2 Modelo de decisión. Operador \mathcal{G}_2	117
Capítulo 10	120
Modelo paramétrico compensatorio no-compensatorio	120
10.1 Ejemplo de aplicación	121
10.2 Resultados.....	123
10.2.1 Matriz coloreada	124
10.2.2 Rangos de las alternativas	125
10.2.3 Análisis de sensibilidad	126
10.2.4 Comparación por pares	126
Capitulo 11	128

Evaluación multicriterio de los proyectos multipropósito.....	128
11.1 Introducción.....	128
11.2 Los recursos hídricos en el Ecuador.....	129
11.2.1 Riego.....	130
11.2.2 Agua potable y saneamiento.....	132
11.2.3 Eventos adversos.....	133
11.2.4 Hidroelectricidad.....	134
11.2.5 Recursos hídricos y proyectos multipropósito.....	135
11.3 Metodología.....	135
11.3.1 Formulación del problema y planteamiento del objetivo general.....	136
11.3.2 Identificación de las alternativas y los criterios de evaluación.....	137
11.3.3 Evaluación de las alternativas en los criterios.....	140
11.3.4 Selección del método multicriterio.....	140
11.3.5 Aplicación del método multicriterio y análisis de sensibilidad.....	141
11.3.6 Análisis y evaluación de los resultados.....	141
11.3.7 Conclusiones y recomendaciones para los proyectos multipropósito.....	146
11.3.8 Decisión.....	146
Capítulo 12.....	147
Conclusiones y recomendaciones.....	147
Anexo 1.....	150
Relaciones sobre un conjunto.....	150
Anexo 2.....	158
Lista de referencias.....	162

Lista de Ilustraciones

Figuras

Figura 1: Orden Usual	18
Figura 2: Orden Lexigráfico	19
Figura 3: Índice Lineal	19
Figura 4: Preferencia no paretiana.....	20
Figura 5: Semiorden	21
Figura 6: Preferencia sinérgica	22
Figura 7: Sinergia, no sinergia.....	38
Figura 8: Estructura de preferencias paramétrica ilimitada.....	50
Figura 9: Cono de base $B = \{b_1, b_2\}$	51
Figura 10: Cono $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$	53
Figura 11: Criterio difuso	57
Figura 12: Preferencia cuasi cónica.....	59
Figura 13: Modelos cónicos	62
Figura 14: $\alpha = 1$. Modelo compensatorio T2 y parcialmente compensatorio T3	63
Figura 15: Transformación semicriterio-criterio	65
Figura 16: Preferencia cónica	66
Figura 17: Preferencia cuasi cónica.....	66
Figura 18: Modelos cónicos en semicriterios	67
Figura 19: Preferencia cónica	69
Figura 20: Preferencia cuasi cónica.....	70
Figura 21: Modelos cónicos ponderados	71
Figura 22: Ponderación límite ($\omega_1 \rightarrow 1, \omega_2 \rightarrow 0$), $0 < \alpha \leq 1$	72
Figura 23: Modelos cónicos ponderados en semicriterios.....	73
Figura 24: Ponderación límite ($\omega_1 \rightarrow 1, \omega_2 \rightarrow 0$), $0 < \alpha \leq 1$	75
Figura 25: Alternativas	77
Figura 26: Pares de alternativas.....	78
Figura 27: Grafo asociado	81
Figura 28: Número difuso triangular	86
Figura 29: Conjunto difuso $A \subset \mathbb{R}^2$. Curvas de nivel de $\mu_A(r) = gr(r \in A)$	87

Figura 30: Cono y cuasi cono difusos	89
Figura 31: Cuarteta de funciones $I_z(r), P_z(r), P_z^{-1}(r), J_z(r)$	91
Figura 32: Interpolación lineal	93
Figura 33: Funciones $\alpha = \psi(z)$ y $\alpha' = 1/z$	94
Figura 34: Modelo difuso no compensatorio, $\alpha = 0$	95
Figura 35: Modelo parcialmente compensatorio, $0 < \alpha < 1$ con $\alpha = 0,4$ y $\alpha = 0,6$	96
Figura 36: Modelo compensatorio, $\alpha = 1$	98
Figura 37: Modelo difuso ponderado en criterios	99
Figura 38: Ponderación límite, $\omega_1 \rightarrow 1, \omega_2 \rightarrow 0$	100
Figura 39: Preferencia no sinérgica, espacio d.....	101
Figura 40: $\mathbb{C}_+^3(\alpha), \mathbb{C}_+^2(B_1) \subset \mathbb{R}^3$	103
Figura 41: Cono local $\mathbb{C}_+^2(\alpha_1) \subset \mathbb{R}^2$	103
Figura 42: Conos de bases $B(z_0)$ y $E(z_0, z_1)$	105
Figura 43: Base $B(z_0)$ y bloques I_1 y G_1	106
Figura 44: Conos de base $B(z_0)$ y de base $E(z_0, z_1) = \{u_1, u_2, b_3\}$	107
Figura 45: Variables lingüísticas difusas.....	112
Figura 46: Regiones y pares de alternativas	116
Figura 47: Grafo asociado	117
Figura 48: Grafo asociado	120
Figura 49: Grafo asociado	126
Figura 50: Frecuencias relativas de los rangos.....	127
Figura 51: Comparación por pares: Ecuador - Colombia.....	128
Figura 52: Megaproyectos. SENAGUA. 2013	130
Figura 53: Disponibilidad de Recursos Hídricos. SENAGUA. 2014.....	131
Figura 54: Diagrama de fases del análisis multicriterio	137
Figura 55: Grafo orden parcial entre las alternativas	143
Figura 56: Rangos de Condorcet - Frecuencia relativa	145
Figura 57: Comparación por pares: Tahuín – Tumbambiro.....	145
Figura 58: Comparación por pares: Pampas de Salasaca - Puma.....	148
Figura 59: Grafo R	151
Figura 60: $R: A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$	155

Figura 61: $R: A_3 \sim A_5 \succ A_2 \succ A_1 \sim A_4$	155
Figura 62: Grafo asociado	156
Figura 63: Grafo asociado	157
Figura 64: Grafo asociado	158
Figura 65: Grafo asociado	158

Tablas

Tabla 1: Clasificación de los métodos multicriterio.....	4
Tabla 2: Índice lineal	22
Tabla 3: No compensación Fishburn.....	26
Tabla 4: No compensación T2 y T2b	31
Tabla 5: No compensación Fishburn y T2	33
Tabla 6: No compensación T2 y T3	42
Tabla 7: Relación entre α y θ	54
Tabla 8: $\alpha = 0$. Modelo no compensatorio	55
Tabla 9: $0 < \alpha < 1$. Modelo parcialmente compensatorio ilimitado	55
Tabla 10: $\alpha = 1$. Modelo compensatorio ilimitado.....	55
Tabla 11: $\alpha = 0$. Modelo no compensatorio	59
Tabla 12: $0 < \alpha < 1$. Modelo parcialmente compensatorio limitado	60
Tabla 13: $\alpha = 1$. Modelo compensatorio limitado.....	60
Tabla 14: Matriz de Datos	76
Tabla 15: Alternativas en escalas comparables	77
Tabla 16: Vectores diferencia d, d', r	77
Tabla 17: Vectores r_B y columna Relación.....	80
Tabla 18: Funciones $\alpha = \psi(z)$, $\alpha' = 1/z$	93
Tabla 19: Datos y parámetros como variables difusas	112
Tabla 20: Vectores diferencia d y r	115
Tabla 21: Distancias $d(r, \mathbb{C}_+^n)$ y $d(-r, \mathbb{C}_+^n)$; relaciones, $I(x, y)$, $P(x, y)$, $P^{-1}(x, y)$ y $J(x, y)$; y, función T	116
Tabla 22: Nodos y pesos.....	119
Tabla 23: Matriz de datos	123
Tabla 24: Preferencia débil difusa R (valores promedios)	124
Tabla 25: Matriz de comparación por pares $I(x, y)$ (valores promedios).....	124
Tabla 26: Matriz de comparación por pares $P(x, y)$ (valores promedios).....	125
Tabla 27: Matriz de comparación por pares $J(x, y)$ (valores promedios).....	125
Tabla 28: Rangos de las alternativas (valores promedios)	126

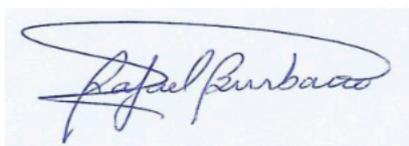
Tabla 29: Pesos de las dimensiones.....	141
Tabla 30: Rangos de las alternativas	144
Tabla 31: Rangos netos por dimensión	147

Declaración de cesión de derecho de publicación de la tesis

Yo, Rafael Tiberio Burbano Rodríguez, autor de la tesis titulada “Modelo multicriterio paramétrico compensatorio no-compensatorio”, declaro que la obra es de mi exclusiva autoría, que la he elaborado para obtener el título de doctorado en Economía del Desarrollo, concedido por la Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, FLACSO Ecuador.

Cedo a la FLACSO Ecuador los derechos exclusivos de reproducción, comunicación pública, distribución y divulgación, bajo la licencia Creative Commons 3.0 Ecuador (CC BY-NC-ND 3.0 EC), para que esta universidad la publique en su repositorio institucional, siempre y cuando el objetivo no sea obtener un beneficio económico.

Quito, noviembre de 2018

A handwritten signature in blue ink, reading "Rafael Burbano", with a large, sweeping flourish above the name.

Rafael Tiberio Burbano Rodríguez

Resumen

La posibilidad o imposibilidad de compensar las desventajas en unos criterios con las ventajas en otro u otros criterios es una de las temáticas de mayor importancia en el análisis multicriterio que, sin embargo, no ha podido ser sistematizada en un corpus conceptual consistente. Las mayores contribuciones en el análisis multicriterio se fundamentan en la definición de no compensación de Peter Fishburn (1976) que, a pesar de permitir grandes desarrollos, ha alcanzado sus límites.

En esta tesis se presenta un marco conceptual formal que precisa los conceptos de compensación, compensación parcial y no compensación entre criterios con la determinación rigurosa de un parámetro de compensación que varía en el intervalo $[0,1]$. El parámetro vale cero en el caso no compensatorio, uno en el caso compensatorio, y toma algún valor entre 0 y 1 de acuerdo al menor o mayor grado de compensación parcial.

Se introducen tres definiciones adicionales que se denominan “no compensación tipo 2 - T2”, “no compensación tipo 2b - T2b” y “no compensación tipo 3 - T3”. La no compensación T2 y T2b están muy asociadas con la definición de Fishburn, y permiten la construcción de la compensación paramétrica. La no compensación T3 se relaciona con la comparabilidad e incomparabilidad entre alternativas.

Los órdenes cónicos y cuasi cónicos son los modelos paradigmático de las estructuras de preferencia paramétrica no-compensatoria compensatoria no difusa.

Como se conoce, los modelos no difusos presentan problemas de saltos por discontinuidad. Por ejemplo, puede ocurrir que la preferencia de la alternativa x sobre la alternativa y se invierta si algún criterio de x disminuye en una cantidad infinitesimal. De igual manera, se conoce que la solución a estos problemas es la aplicación o utilización de los conjuntos no difusos. Así, se construye el modelo no difuso como una extensión difusa del modelo no difuso.

A modo de aplicación de los conceptos y modelos propuestos y construidos, se analiza la problemática de los recursos hídricos en el Ecuador en relación a los proyectos multipropósito, es decir, los proyectos de infraestructura con finalidad múltiple: provisión de

agua para consumo humano, para riego, protección frente a desastres naturales y generación de electricidad. Se analizan y evalúan ocho de los principales proyectos de inversión pública del gobierno, tomando en consideración las dimensiones económica, social, ambiental, de servicios y política.

Finalmente, se resumen las conclusiones y se proponen algunos desarrollos para investigaciones futuras.

Agradecimientos

Esta tesis es el resultado de un trabajo que involucra mucho de mi formación como matemático. De esta manera muchas personas han sido un apoyo en lo académico o en lo humano y anímico o en ambos.

Quiero en primer lugar agradecer a mis colegas de la Escuela Politécnica Nacional por su constante preocupación por mis estudios de doctorado. Una mención especial merece el Dr. Melio Sáenz quien contribuyó mucho en la revisión de la primera versión de la tesis.

A mi familia que siempre ha sido el soporte para que yo pueda dedicar el tiempo a las actividades académicas, a mi esposa Narcisa, a mis hijas Vanessa y Rafaela, a mi nieto Matías Rafael, que ha llenado mi vida de alegría, a mi yerno, y a mis hermanos y hermanas, y mi Madre.

De igual manera, destaco mis agradecimientos para con el Dr. Gonzalo Gamboa, que como primer Director, con sus comentarios y observaciones contribuyó a la realización de un mejor trabajo.

Un agradecimiento especial para la Dra. Alexandra Miranda Espinosa que supo apoyarme y orientarme para la conclusión de este trabajo.

Introducción

El mundo real se caracteriza por la complejidad y la incertidumbre y, en el intento de comprenderla y actuar para modificarla, es necesario recurrir a los instrumentos adecuados. Por sus características, el análisis multicriterio (AMC) es una herramienta apropiada para el análisis de los problemas del mundo real, en tanto que permite analizarlos a partir de un enfoque riguroso y flexible a la vez. Esta herramienta permite integrar las diversas dimensiones en las que estas problemáticas se manifiestan: económica, social, ambiental, cultural, etc.

El AMC permite trabajar con indicadores cualitativos y numéricos expresados en sus propias y diversas unidades de medida: monetarias (dólares, euros, etcétera), físicas (toneladas, hectáreas, vatios, etcétera), biológicas (partes por millón, gramos/m³, etcétera) y otras (% , etcétera). Algunos métodos multicriterio admiten también variables difusas y aleatorias, y variables cualitativas. De esta manera, el análisis multicriterio permite tratar cuestiones complejas como la sostenibilidad, el desarrollo, etcétera; temas donde las cosmovisiones e intereses de los actores involucrados están muchas veces en contraposición.

El uso del AMC tiene varios antecedentes en la economía, las matemáticas y las ciencias políticas. En la década de los cincuenta y sesenta del siglo pasado, el AMC se constituye en disciplina académica por sí misma a partir de los trabajos de Charnes et al. (1955) en la programación por metas (Goal programming), y de Bernard Roy (1991) con el método ELECTRE. El Análisis Multicriterio (AMC) o Análisis de Decisión Multicriterio (ADM) o Multicriteria Decision Making (MCDM), se consolida en la década de los setenta (Fernández-Barberis y Escribano 2011). En ese entonces, el AMC se consideraba como una técnica particular de la Teoría de la Decisión que buscaba soluciones óptimas en contextos bien estructurados.

Posteriormente, reconociendo que un problema con criterios múltiples no necesariamente admite una solución óptima, el AMC evoluciona a la Ayuda a la Decisión Multicriterio o Multiple-Criteria Decision Aid (MCDA) (Roy 1996). El enfoque es buscar una solución “satisfactoria” que responda lo mejor (o lo menos mal) a los múltiples criterios. El cambio fundamental es reconocer que los problemas multicriterio no están bien estructurados

matemáticamente en el sentido de que no es posible obtener una única solución óptima. En muchos casos, tal solución no existe, de manera que la solución final es más una creación que un descubrimiento. Por eso, el énfasis en la palabra “ayuda”.

En un tercer cambio trascendental, se impulsa la participación de los actores sociales en el proceso decisional en aquellos problemas que involucran o afectan a un sector o a la sociedad en su conjunto (Banville et al. 1998) y se llega a la Evaluación Multicriterio Participativa o Participatory Multicriteria Evaluation (PMCE). Como una síntesis de estos procesos, Munda (2004) propone la Evaluación Multicriterio Social (EMS) o Social Multicriteria Evaluation (SMCE), que enfatiza la participación de los actores sociales en problemas de decisión social caracterizados por la alta incertidumbre y el alto impacto social. La diferencia entre la evaluación multicriterio participativa y la evaluación multicriterio social es más cualitativa que de grado. En la primera, se toma en cuenta las opiniones e intereses de los actores sociales en el proceso de decisión. Sin embargo, estos actores tienen una participación limitada en la toma de decisiones (en la definición de parámetros, alternativas y criterios). Al contrario, en la evaluación multicriterio social, los actores sociales tienen una participación real y efectiva en la toma de las decisiones (ellos determinan los parámetros, alternativas y criterios).

Existe una diversidad de métodos de análisis y evaluación multicriterio, cada uno de ellos con sus características particulares, que los hacen menos o más adecuados para ser aplicados en un problema específico.

A groso modo, los modelos o métodos multicriterio se pueden agrupar en dos grandes categorías. El primer grupo está constituido por los modelos que se fundamentan en la construcción de una función de utilidad multicriterio. Es decir, una función que asigna a cada alternativa un número real. Estos métodos se asocian con la escuela norteamericana, y se consideran métodos compensatorios pues, generalmente, una desventaja en unos criterios se puede compensar con una ventaja en algún o algunos otros criterios. El tipo de modelo representativo es MAUT (Multi-Attribute Utility Theory) de Keeney y Raiffa (1976). Entre estos modelos, podemos destacar a TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) de Hwang y Yoon (1981) que tiene un parámetro de compensación explícito que permite variar de un modelo compensatorio a uno no compensatorio

(Bojóquez-Tapia et al. 2005).

Los modelos del segundo grupo se fundamentan en la comparación por pares de las alternativas y en el concepto de superación. Se dice que la alternativa *A* supera a la alternativa *B* en un criterio cuando, al evaluar las alternativas *A* y *B* en dicho criterio se tiene que, la evaluación de *A* es superior, en al menos un umbral mínimo, a la evaluación *B*. Los métodos de superación son de tradición europea, entre estos están las distintas versiones de ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la REalité), desarrolladas por Bernard Roy (1991). Estos métodos se consideran parcialmente compensatorios, pero no tienen un parámetro explícito para la compensación.

Compensación. El Diccionario de la lengua española de la Real Academia Española establece dos acepciones al significado del verbo compensar:

Compensar (de raíz latina *compensare*)¹:

1. tr. Igualar en opuesto sentido el efecto de una cosa con el de otra. *Compensar la dilatación de un cuerpo con la contracción de otro. Compensar las pérdidas con las ganancias, los males con los bienes.*
2. tr. Dar algo o hacer un beneficio a alguien en resarcimiento del daño, perjuicio o disgusto que se ha causado.

Ya en el campo del análisis multicriterio, “intuitivamente, compensación se refiere a la existencia de intercambios, es decir, a la posibilidad de compensar una ‘desventaja’ en algún atributo por una ‘ventaja’ suficientemente grande en otro atributo, mientras que pequeñas ‘ventajas’ no harían lo mismo.” (Bouyssou 1986, 150).

Martínez-Alier et al. (1998, 283) complementan esta noción indicando que una relación de preferencia es no compensatoria si no hay resarcimiento; y, si ocurre lo contrario, es compensatoria.

Para muchos practicantes del análisis multicriterio, una noción intuitiva de compensación - no compensación, como la indicada previamente, es suficiente. Por ejemplo, Guitouni y Martel (1998) clasifican a los principales métodos multicriterio a partir de la taxonomía de

¹ www.rae.es

Colson y de Bruyn (1989), que califica un método multicriterio como:

1. Compensatorio: en este caso, se acepta que puede existir una compensación absoluta entre las diferentes evaluaciones. Por lo tanto, un buen rendimiento en un criterio puede contrarrestar fácilmente una pobre evaluación en otro. Existen muchos métodos que caen en esta categoría, por ejemplo, la suma ponderada.
2. No compensatorio: no se acepta la compensación entre las diferentes dimensiones. Quien toma las decisiones establece cuales dimensiones son lo suficientemente importantes como para rechazar cualquier tipo de compensación. El método lexicográfico se considera un método no compensatorio.
3. Parcialmente compensatorio: en este caso se acepta la existencia de algún tipo de compensación entre las diferentes dimensiones o criterios. La mayoría de los métodos del análisis multicriterio caen dentro de esta categoría. El problema principal es evaluar el grado de compensación de cada uno.

De acuerdo a esta tipología, Guitouni y Martel (1998) clasifican algunos de los métodos multicriterio, tal como se indica en la Tabla 1.

Tabla 1: Clasificación de los métodos multicriterio

Métodos multicriterio	Compensación
Métodos elementales	
Suma ponderada	Total
Método lexicográfico	No
Método conjuntivo	No
Método disyuntivo	No
Maximin	No
Suma difusa ponderada	Total
Métodos de síntesis (en una única evaluación final)	
TOPSIS	Total
MAVT	Parcial
UTA	Parcial
SMART	Parcial
MAUT	Parcial

AHP	Parcial
EVAMIX	Parcial
Maximin difuso	No
Métodos de superación	
ELECTRE I, II	Parcial
ELECTRE III, IV, IS, TRI	Parcial
PROMETHEE I, II	Parcial
MELCHIOR	Parcial
ORESTE	Parcial
REGIME	Parcial
NAIADE	Parcial
Métodos mixtos	
QUALIFEX	Parcial
Método conjuntivo/disyuntivo difuso	No
Método de Martel y Zaras	Parcial

Fuente: Guitouni y Martel (1998)

Esta clasificación presenta algunos problemas. Por ejemplo, el método TOPSIS, como se indicó previamente, tiene un parámetro de compensación explícito que permite variar de un modelo compensatorio a uno no compensatorio.

En cuanto a la definición formal de no compensación, Fishburn (1976) establece el concepto seminal de no compensación, que posteriormente es complementado por Bouyssou y Vansnick (1986). Así, Bouyssou (1986) establece dos definiciones asociadas a la compensación. Por otra parte, Roy (1996) construye un marco conceptual para la compensación y no compensación. En los distintos campos de investigación en el análisis multicriterio, la construcción axiomática de los métodos multicriterio (Bouyssou et al. 1997; Greco et. al. 2003; Bouyssou y Pirlot 2006), la teoría sobre los pesos de criterios (Vansnick 1986; Podinovsky 1994, Podinovsky 2002; Roy y Mousseau 1996), la interacción entre los criterios (Grabisch y Roubens 2000; Greco y Figueira 2003), entre otros, lo que se busca es vincular sus estudios y resultados con la noción de no compensación de Fishburn (1976).

Sin embargo, tal como indican Guitouni y Martel (1998), el problema principal es evaluar el grado de compensación de los distintos métodos. Dicho de otro modo, se está reconociendo

la limitación que existe en este campo.

Frente a ello, en esta tesis se propone construir un nuevo marco conceptual que permite fundamentar la construcción de las denominadas estructuras de preferencias paramétrica no-compensatoria compensatoria con un sentido preciso para el parámetro de compensación.

En este artículo a la compensación se le dará dos sentidos: como “igualdad o balance de las ventajas y desventajas” (primera acepción del diccionario), o como “inversión de la preferencia” (noción propia de esta tesis). Se introducirán tres definiciones propias de no compensación. La primera puede ser considerada una variante o un caso particular de la definición de Fishburn. A ésta se la denominará “no compensación tipo 2 - T2”.

La segunda definición, “no compensación tipo 2b - T2b” es equivalente a la primera bajo el supuesto comúnmente aceptado de que se cumple la condición fuerte de Pareto. Esta definición, conjuntamente con su negación, permite fundamentar a la preferencia paramétrica. Ambas definiciones están relacionadas con la intensidad de las preferencias y con la inversión de la preferencia.

La tercera definición, la cual tiene alguna similitud con la definición de Roy (1996), se denomina “no compensación tipo 3 - T3”, y se asocia con la igualdad en ventajas y desventajas, y con la comparabilidad e incomparabilidad de las alternativas.

El problema del análisis multicriterio.

Desde el punto de vista formal, la teoría del análisis multicriterio tiene muchos elementos en común con la agregación social de las preferencias de la teoría microeconómica. En el análisis multicriterio, cada uno de los criterios define sobre el conjunto de alternativas algún tipo de relación de orden: un orden completo, un preorden o un semiorden. Estos ordenamientos parciales no son iguales. Así, el problema es encontrar el orden agregado que represente al conjunto de ordenamientos parciales. En el caso de la agregación social, cada uno de los agentes, de acuerdo a sus preferencias, puede ordenar a un conjunto de alternativas. Los ordenamientos generalmente son diferentes entre los distintos agentes. La preferencia social es la preferencia agregada que sintetiza al conjunto de preferencias individuales y determina un único ordenamiento de las alternativas.

De manera formal, el problema del análisis multicriterio puede describirse de la siguiente manera: sean $A \subseteq \mathfrak{A}$ un conjunto de alternativas (\mathfrak{A} es el espacio de alternativas), \mathfrak{R} y \mathfrak{B} conjuntos de relaciones sobre A que satisfacen ciertas propiedades o características. Por ejemplo, los elementos de \mathfrak{R} podrían ser relaciones de orden total, los elementos de \mathfrak{B} podrían ser relaciones de semiorden. Se busca determinar un funcional o regla de agregación \mathcal{H} que, a partir de n órdenes parciales $R_i \in \mathfrak{R}$, determina la relación o preferencia global agregada $\mathcal{R} \in \mathfrak{B}$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}: \mathfrak{R}^n & \rightarrow & \mathfrak{B} \\ (R_1, R_2, \dots, R_n) & \mapsto & \mathcal{R} \end{array} \quad (1)$$

Siguiendo a Munda y Nardo (2005, 7), en los modelos o métodos multicriterio que se fundamentan en la comparación por pares de alternativas, el operador \mathcal{H} se descompone en dos procesos diferenciados². El primero que llega hasta la determinación de la matriz o las matrices de comparación por pares (operador \mathcal{F}); el segundo que parte de las matrices de comparación por pares y va hasta la comparación global de las alternativas (operador \mathcal{G}). El funcional es: $\mathcal{H} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.

$$\begin{array}{rcccl} & \mathcal{F} & & \mathcal{G} & \\ \mathcal{H}: \mathfrak{R}^n & \rightarrow & \mathfrak{M} & \rightarrow & \mathfrak{B} \\ (R_1, R_2, \dots, R_n) & \mapsto & M & \mapsto & \mathcal{R} \end{array} \quad (2)$$

Esta tesis se centrará en la construcción de un modelo para determinar las matrices de comparación por pares. Estas matrices corresponderán a las relaciones difusas: indiferencia, I ; preferencia estricta, P ; e incomparabilidad, J . En las llamadas estructuras de preferencia I - P - J , estas relaciones se determinan a partir de una preferencia débil difusa R (Öztürk et al. 2003; Rudas y Fodor, 2009; Fodor y Roubens, 1994). En consecuencia, parte del problema será determinar esta preferencia débil difusa.

En la comparación global de las alternativas consideraremos dos opciones. La primera opción es un modelo descriptivo, el cual determina la relación global mediante la superposición de las relaciones determinadas por la aplicación de una generalización de la

² En los métodos multicriterio que no se fundamentan en la comparación por pares, por ejemplo, en los métodos basados en la utilidad multicriterio, no se aplica esta descomposición.

“regla de la mayoría” (May, 1952; Dasgupta y Maskin, 2003), a cada par de alternativas. Este procedimiento define una preferencia global agregada, la cual describe la relación estructural entre las alternativas.

La segunda opción es un modelo de decisión que genera una preferencia global agregada, la cual permite seleccionar la mejor alternativa. Para este proceso se aplicará una variante del método de Condorcet (Young, 1988; Monjardet, 1990; Cioni, 2010), y se calculará el “flujo neto” de la matriz asociada a la relación global agregada obtenida. Como se conoce, el flujo neto es, a su vez, una extensión del método de Borda (Young, 1974; Johnson, 1983; Truchon 2006). En la literatura, también se conoce que Borda y Condorcet fueron los pioneros en introducir las matemáticas en las ciencias sociales (Brian, 2008).

Describamos de manera general como procederemos para la construcción de estos modelos.

Matrices de comparación por pares. Primero se trabajará con relaciones o preferencias clásicas, esto es, relaciones no difusas; y, posteriormente, los procedimientos se extenderán a un contexto difuso.

Para la definición de la preferencia débil R no difusa utilizaremos las estructuras matemáticas conocidas como “conos”. Un cono es una estructura algebraica que se define en el espacio vectorial \mathbb{R}^n . En esta tesis se trabajará con un tipo particular de conos: aquellos cuyos elementos son una combinación lineal convexa (de coeficientes positivos) de los elementos de una base del espacio vectorial \mathbb{R}^n . Los conos y órdenes cónicos son de uso común en varias áreas de las matemáticas, por ejemplo, en los problemas de optimización multidimensional (Jahn, 2011; Ok, 2007), en los modelos de equilibrio general (Schalk, 1996), entre otros.

Ahora bien, la utilización de los órdenes cónicos impone una restricción sobre las estructuras de preferencia: las preferencias parciales sólo pueden ser el orden mayor o el orden menor en el conjunto de número reales \mathbb{R} . En todo caso, las definiciones se expondrán en un marco conceptual lo más general posible.

La extensión de la preferencia débil no difusa a una preferencia difusa se hará de manera muy simple y natural, mediante la utilización de la distancia de Minkowski (Ok 2007, Rudin

1964), en un proceso muy similar a como se define un número difuso a partir de un número no difuso (Zimmermann 2001). La distancia de Minkowski es una generalización de la distancia euclidiana³.

La definición de las relaciones I , P y J a partir de una preferencia débil difusa R se conoce como la “construcción de una estructura de preferencia difusa I - P - J ”. Estos procesos están plenamente justificados en los trabajos de Fodor y Roubens (1994) y de Alsina (1985) - ver también Fodor y Baets (2008), VandeWalle (1998). El modelo difuso, tal como se presenta en esta tesis, es una aplicación directa del Teorema de Alsina.

Esta tesis se desglosa en doce capítulos y dos anexos:

1. En el Capítulo 1, titulado “Marco teórico”, se establece el marco conceptual para el desarrollo de las propuestas de la tesis. Se presentan las definiciones y conceptos básicos y la definición formal de no compensación establecida por Fishburn, (1976), que constituye, hasta el momento, el modelo con el cual se construye y contrasta los desarrollos de algunas otras temáticas del análisis multicriterio.
2. En el Capítulo 2, “Preferencias no compensatorias T2, T2b y T3”, se presentan las definiciones de las preferencias no compensatorias tipo 2 (T2), tipo 2b (T2b) y tipo 3 (T3). Se ha elegido a propósito el calificativo T2 y T2b para destacar la estrecha relación existente entre ambas definiciones de no compensación. En este capítulo se enuncian y prueban cuatro teoremas que muestran los vínculos entre los conceptos de preferencias no compensatorias T2 y T2b, y entre preferencias no compensatorias T2 y Fishburn. Se muestra, asimismo, la independencia entre las definiciones de preferencias no compensatorias T2 y T3.
3. En el Capítulo 3, “Preferencias compensatorias” se presenta la construcción de los conceptos de preferencias compensatorias T2 y T3, y se establece la tipología de preferencias: no compensatoria, parcialmente compensatoria y (totalmente) compensatoria T2 y T3. El capítulo finaliza con la definición de las estructuras de preferencia paramétrica, estructuras que pueden variar de la no compensación a la

³ La distancia de Minkowski entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ es $d(x, y) = [\sum |x_i - y_i|^p]^{(1/p)}$, con $p > 0$.

compensación total. Se presenta además la clasificación de las preferencias parcialmente compensatorias y compensatorias en ilimitadas y limitadas.

4. El Capítulo 4 “Preferencias cónicas y cuasi cónicas” está dedicado al análisis de las estructuras de preferencia paramétrica cónicas y cuasi cónicas, que son los modelos paradigmáticos de las estructuras de preferencia paramétricas ilimitadas y limitadas respectivamente. Se presenta también, en este capítulo, los modelos de preferencia en semicriterios que permiten el uso de umbrales de indiferencia en los criterios individuales, y los modelos ponderados que posibilitan establecer pesos diferenciados en los criterios.
5. En el Capítulo 5, “Ejemplo de aplicación del modelo cuasi cónico”, se presenta un ejemplo sencillo de aplicación del modelo parcialmente compensatorio limitado para analizar el desarrollo relativo de cinco países latinoamericanos: Ecuador, Colombia, Perú, Costa Rica y República Dominicana; mediante dos indicadores: un indicador económico (PIB per cápita), y un indicador ambiental (emisiones de CO₂ per cápita).
6. En el Capítulo 6, “Preferencia difusa”, se presenta la construcción de la estructura de preferencia paramétrica difusa como una extensión difusa de la estructura de preferencia paramétrica cuasi cónica y se explican las modificaciones necesarias para lograrlo.
7. En los estudios en los que se aplica el análisis multicriterio es usual agrupar los criterios en la dimensión económica, social, ambiental, etc. La compensación entre criterios de una misma dimensión (por ejemplo, dos criterios económicos), seguramente es diferente a la compensación entre criterios de distintas dimensiones (por ejemplo, un criterio económico y un criterio ambiental). El Capítulo 7, “Agrupación de criterios”, presenta una propuesta para resolver este problema.
8. En el Capítulo 8, “Criterios difusos, estocásticos y categóricos”, se analiza cómo se pueden transformar los criterios o variables difusas, estocásticas y categóricas en variables reales para aplicar el modelo de preferencia difusa paramétrica, que se determina a partir de conos en \mathbb{R}^n . También se describe la manera para realizar el análisis de sensibilidad, el cual permite examinar el cambio en los resultados frente a (pequeñas) variaciones en los datos y parámetros.
9. El Capítulo 9, “Agregación global de las preferencias”, está dedicado a la

descripción de los modelos de la comparación global de las alternativas que, tal como se indicó anteriormente, se bifurcan en un modelo descriptivo que determina la relación estructural entre las alternativas; y, un modelo de decisión que define una relación de semiorden entre las alternativas. Estos procedimientos se describen mediante su aplicación al ejemplo tratado en el quinto capítulo.

10. En el Capítulo 10, “Modelo paramétrico compensatorio no-compensatorio”, se presentan las características del modelo Quipu y, como ejemplo de aplicación, se realiza el estudio del nivel de desarrollo relativo de un grupo de 5 países: Ecuador, Colombia, Perú, Costa Rica y República Dominicana; en base a 11 criterios agrupados en las dimensiones económica, ambiental, social y tecnológica.
11. En el Capítulo 11, “Evaluación multicriterio de los proyectos multipropósito”, se examina la problemática de los recursos hídricos en el Ecuador, en relación a los denominados proyectos multipropósito. Se analizan y evalúan los ocho proyectos principales de inversión pública del gobierno ecuatoriano mediante la aplicación del modelo multicriterio paramétrico compensatorio no-compensatorio. La evaluación multicriterio considera las dimensiones: económica, social, ambiental, de servicios y política. Como resultado de la evaluación multicriterio, se obtiene una jerarquía de los proyectos por orden de importancia y se analiza su aporte a la solución de los problemas asociados al agua. Este ejercicio fue realizado con el apoyo de un equipo interdisciplinario conformado por funcionarios de la Secretaría Nacional del Agua (SENAGUA), el Ministerio del Ambiente y la Secretaría Nacional de Planificación y Desarrollo (SENPLADES).
12. En el Capítulo 12, “Conclusiones y recomendaciones”, se exponen las conclusiones que se desprenden de los desarrollos realizados en los diferentes capítulos; de igual manera, se mencionan algunas de las posibles investigaciones futuras que podrían continuar al trabajo realizado en esta tesis.
13. El primer anexo reúne a un conjunto de definiciones sobre las propiedades de las relaciones binarias.
14. En el segundo anexo, en razón de su extensión, se adjunta la matriz de datos del ejercicio de “Evaluación multicriterio de los proyectos multipropósito”.

Una versión preliminar de esta tesis agrupada en tres artículos titulados “Estructuras de

preferencias paramétrica no-compensatoria compensatoria” (capítulos 1 a 5), “Quipu: Un modelo paramétrico compensatorio no-compensatorio de análisis y evaluación multicriterio” (capítulos 6 a 10), y “La problemática múltiple de los recursos hídricos en el Ecuador: evaluación multicriterio de los proyectos multipropósito” (capítulo 11), fue presentada III Congreso Internacional de Economía, Economía Popular y Solidaria, el Buen Vivir y la Economía Matemática, realizado en la Escuela Politécnica Nacional, entre el 13 y 17 de julio de 2015. Los artículos fueron aceptados y aprobados por el Comité Científico del Congreso de Economía. El Comité Científico estuvo conformado por investigadores de universidades nacionales y extranjeras (Escuela Politécnica Nacional, Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, Instituto de Altos Estudios Nacionales, Universidad San Francisco de Quito, Universidad Central del Ecuador, Universidad Técnica Particular de Loja, Universidad de Cuenca; Universidad de Barcelona, Universidad Complutense de Madrid, Universidad del País Vasco, Universidad de Deusto; Escuela Normal Superior de Lyon).

En los artículos presentados al III Congreso Internacional de Economía, al modelo multicriterio paramétrico compensatorio no-compensatorio se le dio el nombre de “Quipu”⁴.

⁴ El quipu (en quechua: khipu, 'nudo') fue un sistema mnemotécnico mediante cuerdas de lana o algodón y nudos de uno o varios colores desarrollado por las civilizaciones andinas. Si bien se sabe que fue usado como un sistema de contabilidad por los quipucamayoc (khipu kamayuq), administradores del Imperio Inca, ciertos autores han propuesto que podría haber sido usado también como una forma de escritura. <https://es.wikipedia.org/wiki/Quipu>

Capítulo 1

Marco teórico

1.1. Introducción

El fundamento para el estudio formal del análisis multicriterio es la modelización de las preferencias. Usualmente, en el análisis multicriterio se comparan objetos denominados genéricamente “alternativas”, mediante la valoración o evaluación de estas alternativas en un conjunto de “criterios”, con el objetivo de ordenarlos o determinar la cercanía entre unos y otros.

Se considera que quien toma decisiones frente a dos alternativas x e y , tiene las siguientes opciones:

1. Prefiere x a y ó prefiere y a x .
2. Es indiferente entre x e y .
3. No puede o no quiere comparar las alternativas.

De esta manera, se definen tres relaciones binarias sobre X , el conjunto de alternativas, denominadas de “preferencia estricta” o simplemente de “preferencia” que se notará con el símbolo \succ ; de “indiferencia” denotada con \sim ; y, de “incomparabilidad” notada por ϕ . Otras relaciones adicionales son: la “preferencia débil” notada con \succcurlyeq , la “preferencia inversa” \prec ; la “preferencia débil inversa”, notada con \preccurlyeq .

Así, sean $x, y \in X$ dos alternativas cualesquiera. Si $x \succ y$, se dirá que x es preferida a y , o que x es mejor que y . Si $x \sim y$, diremos que x es indiferente a y , o que x e y son indiferentes. Si $x \phi y$, se dirá que x no se compara con y , o que x e y no se pueden comparar, o que x e y son incomparables. Si $x \succcurlyeq y$ diremos que x es débilmente preferida a y , o que x es al menos tan buena como y . Si $x \prec y$ se dirá que y es preferida a x , o que x es peor que y . Si $x \preccurlyeq y$ diremos que y es débilmente preferida a x , o que x es al menos tan mala como y .

La relación de preferencia estricta \succ es una relación asimétrica. La indiferencia \sim es una relación reflexiva y simétrica. La incomparabilidad ϕ es una relación irreflexiva y simétrica.

En términos formales, una relación binaria sobre el conjunto X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X$. Así por ejemplo si $X = \{a, b, c\}$, una relación cualquiera podría ser $T = \{(a, b), (a, c)\}$. Como se desprende de los párrafos anteriores, la relación T también se puede representar o describir de modo operacional mediante algún símbolo, por ejemplo \triangleright , o una letra (usualmente la misma). Esto es, la relación T se describe por: $a \triangleright b$, $a \triangleright c$; o, $a T b$, $a T c$.

El complemento de la relación T es $T^c = \{(a, b) \in X \times X | (a, b) \notin T\}$; y la relación inversa es $T^{-1} = \{(a, b) \in X \times X | (b, a) \in T\}$ (ver Anexo 1).

Cuando se quiera hacer referencia al conjunto de pares ordenados se representarán las relaciones por las letras: la preferencia con la P ; la preferencia inversa con P^{-1} ; la indiferencia con la letra I ; la incomparabilidad con la J ; la preferencia débil con la R ; y la preferencia débil inversa con R^{-1} .

1.2. Definiciones generales

Iniciamos con una pequeña variación de la definición de estructura de preferencia de Fishburn (1976).

Definición 1 (Estructura de preferencia). *Una estructura de preferencia es una pareja (X, \triangleright) , donde el conjunto $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ es el producto cartesiano de n conjuntos no vacíos X_i ; y, \triangleright es una relación de preferencia sobre X que puede ser: a) una preferencia estricta \succ ; o, b) una relación de preferencia débil \succcurlyeq .*

Notaremos por $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a una alternativa (o vector) $x \in X$; por $X_{-i} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$, al producto cartesiano de los n conjuntos X_j excluido el conjunto X_i ; por $x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ a un elemento de X_{-i} ; por (x_i, y_{-i}) al vector $(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$; y, por $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ al conjunto de índices.

1.2.1. Estructuras I - P y estructuras I - P - J

La estructura (X, \triangleright) define únicamente una de las siguientes relaciones: la preferencia estricta o la preferencia débil. En la estructura (X, \succ) se definen adicionalmente las relaciones de indiferencia (\sim) y preferencia débil (\succcurlyeq); y, en la estructura (X, \succcurlyeq) , se definen

de forma adicional las relaciones de indiferencia (\sim), preferencia estricta (\succ), e incomparabilidad (ϕ), tal como se indica a continuación.

Estructuras I-P. Consideremos una estructura de preferencia estricta (X, \succ) , y sean $x, y \in X$ dos alternativas cualesquiera. Se dice que x es indiferente a y , si no se cumple que la alternativa x sea preferida a y , ni tampoco ocurre que y sea preferida a x . Por otra parte, se dice que la alternativa x es débilmente preferida a y , si no se cumple que y sea preferida a x . De manera formal:

Definición 2 (Estructura I-P). Sea (X, \succ) una estructura de preferencia estricta y sean $x, y \in X$ dos alternativas cualesquiera. Las relaciones de indiferencia (\sim) y de preferencia débil (\succcurlyeq) se definen por:

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow \neg(x \succ y) \wedge \neg(y \succ x), \\ x \succcurlyeq y &\Leftrightarrow \neg(y \succ x). \end{aligned} \quad (1.1)$$

De manera equivalente, en notación de conjuntos, las relaciones están definidas por:

$$I = (P \cup P^{-1})^c, R = P^{-1c}. \quad (1.2)$$

Se dice que $(X, \succ, \sim, \succcurlyeq)$ es una estructura I-P (Öztürk et al. 2003, 11).

Estructuras I-P-J. Consideremos ahora una estructura de preferencia débil (X, \succcurlyeq) , y dos alternativas cualesquiera $x, y \in X$. Se dice que x es indiferente a y , o que x e y son indiferentes, si se cumple que la alternativa x es débilmente preferida a y , y la alternativa y es débilmente preferida a x . Por otra parte, se dice que la alternativa x es estrictamente preferida a y , si se cumple que x es débilmente preferida a y , y que y no es débilmente preferida a x . Finalmente, cuando la alternativa x no es débilmente preferida a y , y la alternativa y tampoco es débilmente preferida a x , las alternativas se definen como incomparables.

Definición 3 (Estructura I-P-J). Sean (X, \succcurlyeq) una estructura de preferencia débil, y $x, y \in X$ dos alternativas cualesquiera. Las relaciones de indiferencia (\sim), preferencia estricta (\succ) e incomparabilidad (ϕ) se definen por:

$$\begin{aligned}
x \sim y &\Leftrightarrow (x \succcurlyeq y) \wedge (y \succcurlyeq x), \\
x \succ y &\Leftrightarrow (x \succcurlyeq y) \wedge \neg(y \succcurlyeq x), \\
x \phi y &\Leftrightarrow \neg(x \succcurlyeq y) \wedge \neg(y \succcurlyeq x).
\end{aligned}
\tag{1.3}$$

En notación de conjuntos, las relaciones están definidas por:

$$I = R \cap R^{-1}, P = R \cap R^{-1c}, J = R^c \cap R^{-1c}.$$
(1.4)

La estructura $(X, \succcurlyeq, \sim, \succ, \phi)$ se denomina estructura I - P - J (Öztürk et al. 2003, 11).

Observación 1. En ambas estructuras, I - P e I - P - J , la preferencia débil R satisface que $R = I \cup P$. Además, en una estructura I - P , se cumple que $X \times X = I \cup P \cup P^{-1}$; y, en una estructura I - P - J se tiene que $X \times X = I \cup P \cup P^{-1} \cup J$, y que $R^{-1c} = P \cup J$.

Cabe remarcar que en una estructura I - P la preferencia débil es completa. Esto es, se cumple que dos alternativas cualesquiera se pueden comparar (débilmente). En una estructura I - P - J la preferencia débil no es completa, lo que quiere decir que no todas las alternativas se pueden comparar (débilmente). Dicho de otro modo, existe al menos un par de alternativas $x, y \in X$, tales que x no es débilmente preferida a y , e y no es débilmente preferida a x .

La no comparabilidad puede ser consecuencia de la falta de información, la incertidumbre, la ambigüedad, o el conflicto en las evaluaciones en las preferencias multi-dimensionales (Öztürk et al. 2003). La incomparabilidad también puede ocurrir porque, en nuestro legítimo derecho como ciudadanos, nos negamos a comparar alternativas. La economía ecológica al postular la comparabilidad débil de valores (Martínez-Alier et al. 1998), considera natural la posibilidad de incomparabilidad cuando hay conflicto entre valores distintos. Si se excluye el caso de la negativa a comparar y se asume que contamos con toda la información relevante para tomar una decisión, la incomparabilidad sólo puede ser el resultado de evaluaciones contradictorias o en conflicto de los criterios de las alternativa en comparación (más adelante se precisará el concepto de evaluaciones contradictorias).

Las estructuras $(X, \succ, \sim, \succcurlyeq)$ y $(X, \succcurlyeq, \sim, \succ, \phi)$ son denominadas de estructuras de preferencia asociadas a un problema de decisión multicriterio, o modelos multicriterio; y, se notarán por (X, \succ) y (X, \succcurlyeq) , respectivamente. Del contexto se entenderá si se hace referencia al modelo

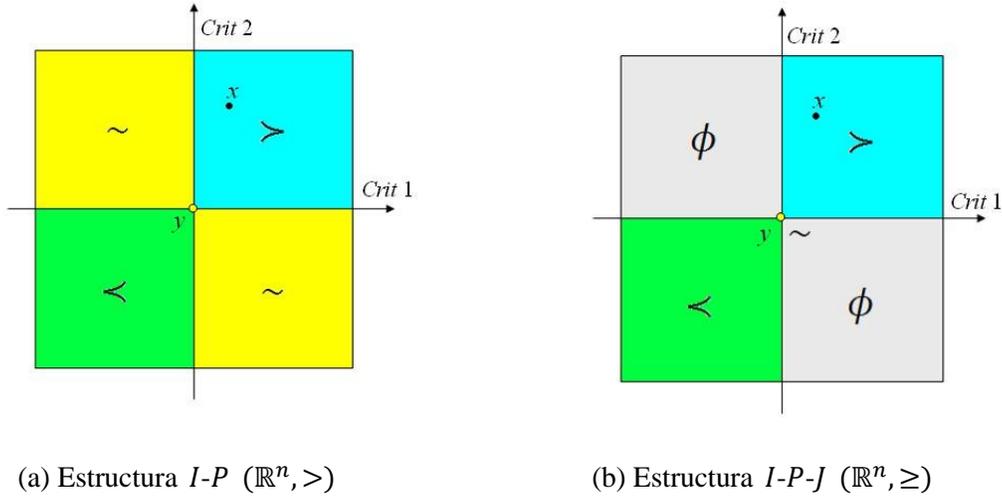
multicriterio o la estructura de una sola relación.

Sea $x \in X$, se notará $R(x) = \{y \in X | y \succcurlyeq x\}$ al conjunto de alternativas débilmente preferidas a la alternativa x ; por $P(x) = \{y \in X | y \succ x\}$ al conjunto de alternativas preferidas a x ; por $I(x) = \{y \in X | y \sim x\}$ al conjunto de alternativas indiferentes a x ; y, por $J(x) = \{y \in X | y \not\sim x\}$ el conjunto de alternativas no comparables con x .

Ejemplo 1. *Considérese \mathbb{R}^n el espacio vectorial n -dimensional real. Sea $(\mathbb{R}^n, >)$ la estructura de preferencia estricta donde $>$ es el orden mayor ($x > y$ si $x_i \geq y_i$ para todo $i \in \Omega$ y $x_j > y_j$ para algún $j \in \Omega$) (Figura 1(a)). Por otra parte, sea (\mathbb{R}^n, \geq) la estructura de preferencia débil donde \geq es el orden mayor o igual ($x \geq y$ si $x_i \geq y_i$ para todo $i \in \Omega$) (Figura 1(b)).*

Representación gráfica. Cuando $X = \mathbb{R}^2$, es decir, para el caso de dos criterios, las distintas relaciones de las estructuras $I-P$ $(\mathbb{R}^n, >)$, e $I-P-J$ (\mathbb{R}^n, \geq) del ejemplo 1, se pueden representar gráficamente en el plano cartesiano. Los criterios 1 y 2 se asocian al eje horizontal y vertical respectivamente. Los pares de alternativas (x, y) se representan en el espacio afín $(\mathbb{R}^2; y) = \{d \in \mathbb{R}^2 | d = x - y, x \in \mathbb{R}^2\}$. En el espacio afín, la alternativa y se ubica en el origen del plano, en tanto que la alternativa x varía en todo el plano. Cada punto del plano se pinta con el color de la relación que corresponde de acuerdo a la convención siguiente: amarillo para la indiferencia; celeste para la preferencia estricta; verde para la preferencia inversa; y, gris para la incomparabilidad. Las figuras 1(a) y 1(b) muestran las estructuras $I-P$ e $I-P-J$ respectivamente.

Figura 1: Orden Usual



De aquí en adelante se omitirá en los gráficos los símbolos que denotan las relaciones y los nombres de los ejes.

Ejemplo 2. En los siguientes apartados se presentan algunos ejemplos de preferencias en $X = \mathbb{R}^n$ que serán utilizados más adelante. En las siguientes definiciones $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ son dos alternativas (vectores) cualesquiera de \mathbb{R}^n .

1. *Orden lexicográfico estricto L .* El orden lexicográfico (estricto) es el orden que se utiliza para las palabras de un diccionario. Las palabras se ordenan de acuerdo a la primera letra y, si dos palabras se inician con la misma letra, se compara la segunda, y así sucesivamente. Este principio se aplica a las coordenadas de los vectores en comparación (Figura 2):

$$x L y \Leftrightarrow (x_1 > y_1) \vee [(x_1 = y_1) \wedge \dots \wedge (x_k = y_k) \wedge (x_{k+1} > y_{k+1})], \quad (1.5)$$

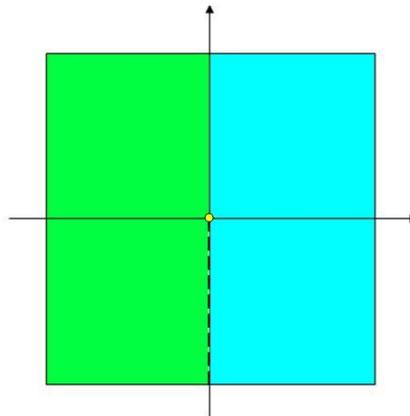
para $1 \leq k \leq n - 1$.

El orden lexicográfico débil \bar{L} se define añadiendo la identidad ($=$) a la preferencia estricta:

$$x \bar{L} y \Leftrightarrow (x L y) \vee (x = y). \quad (1.6)$$

Puesto que $J = \phi$ las estructuras $I-P$ e $I-P-J$ son iguales.

Figura 2: Orden Lexigráfico



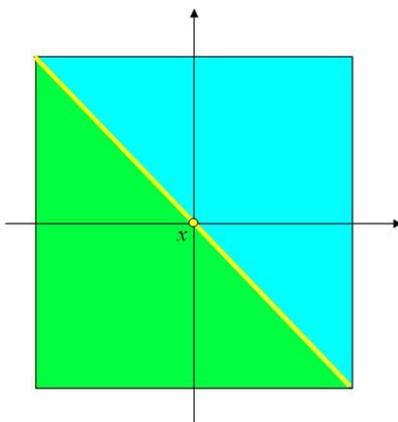
2. Índice lineal estricto \succ^{IL} . Se prefiere la alternativa x a la y cuando la suma de las coordenadas de x es mayor que la suma de las coordenadas de y (Figura 3(a)):

$$x \succ^{IL} y \Leftrightarrow \sum x_i > \sum y_i. \quad (1.7)$$

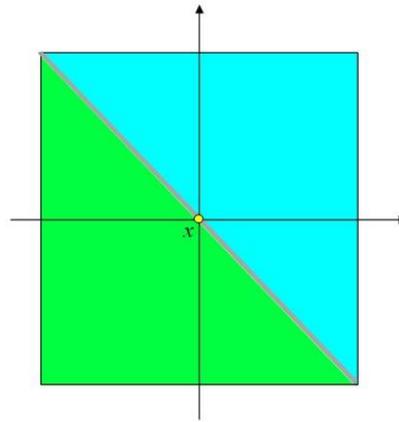
Índice lineal débil \succsim^{IL} . La preferencia débil se define añadiendo la identidad ($=$) a la preferencia estricta (Figura 3(b)):

$$x \succsim^{IL} y \Leftrightarrow (x \succ^{IL} y) \vee (x = y). \quad (1.8)$$

Figura 3: Índice Lineal



(a) Estructura I-P $(\mathbb{R}^n, \succ^{IL})$



(b) Estructura I-P-J $(\mathbb{R}^n, \succsim^{IL})$

3. Preferencia no paretiana estricta \succ^* en \mathbb{R}^2 . Se dice que $x \succ^* y$ cuando el vector

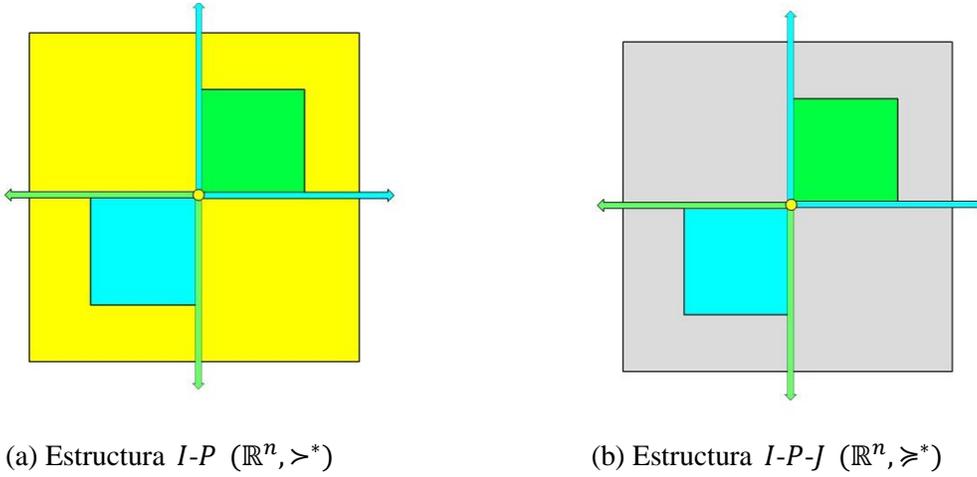
diferencia $d = (x - y)$ pertenece al conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, con $A = E_1 \cup E_2 \cup [-1, 0]^2$ donde $E_1 = \{(a, 0) | a > 0\}$ y $E_2 = \{(0, a) | a > 0\}$ son los ejes positivos de las abscisas y ordenadas respectivamente⁵ (Figura 4(a)):

$$x \succ^* y \Leftrightarrow d = (x - y) \in A. \quad (1.9)$$

La preferencia no paretiana débil \succcurlyeq^* en \mathbb{R}^2 se define añadiendo la identidad (=) a la preferencia estricta (Figura 4(b)).

$$x \succcurlyeq^* y \Leftrightarrow (x \succ^* y) \vee (x = y). \quad (1.10)$$

Figura 4: Preferencia no paretiana



4. Semiorden débil \succcurlyeq^c de umbral de indiferencia $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_{++}^n$. Se define $x \succcurlyeq^c y$ y por:

$$x \succcurlyeq^c y \Leftrightarrow d = (x - y) \in \prod [-c_i, \infty). \quad (1.11)$$

Los ejes son bandas centradas de longitud $2c_i > 0$. Las alternativas indiferentes a x forman un hiperrectángulo en \mathbb{R}^n (un rectángulo en \mathbb{R}^2 , un paralelepípedo en \mathbb{R}^3) con lados de longitud $2c_i$ (Figura 5(b) para \mathbb{R}^2 y $c = (1, 1)$).

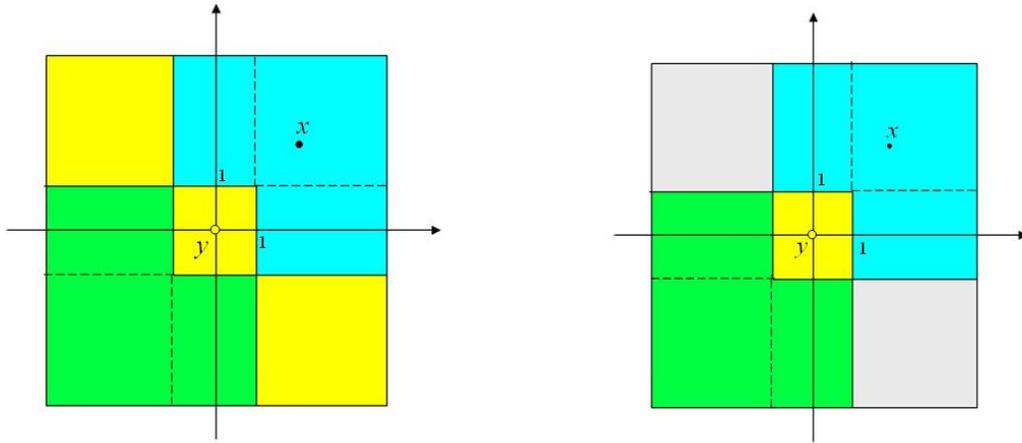
Semiorden orden $>^c$ de umbral $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_{++}^n$. Se determina excluyendo

⁵ La propiedad fuerte de Pareto se puntualiza en la Definición 10. La preferencia del presente apartado es un ejemplo de una preferencia no fuertemente paretiana que se la denomina simplemente preferencia no paretiana.

del semiorden débil las alternativas indiferentes (Figura 5(a) para \mathbb{R}^2 y $c = (1, 1)$).

$$x \succ^c y \Leftrightarrow d = (x - y) \in \prod [-c_i, \infty) \setminus \prod [-c_i, c_i]. \quad (1.12)$$

Figura 5: Semiorden



(a) Estructura I-P (\mathbb{R}^n, \succ^c)

(b) Estructura I-P-J (\mathbb{R}^n, \succ^c)

5. *Preferencia sinérgica⁶ débil \succ^s de umbral $s = (1, 1) \in \mathbb{R}_{++}^2$. Sea $\bar{B}(0,1)$ la bola cerrada de centro 0 y radio 1. La relación de $x \succ^s y$ se define por (Figura 6(b)):*

$$x \succ^s y \Leftrightarrow d = (x - y) \in [-1, \infty)^2 \setminus [\bar{B}(0,1)^c \cap \mathbb{R}_+^2]. \quad (1.13)$$

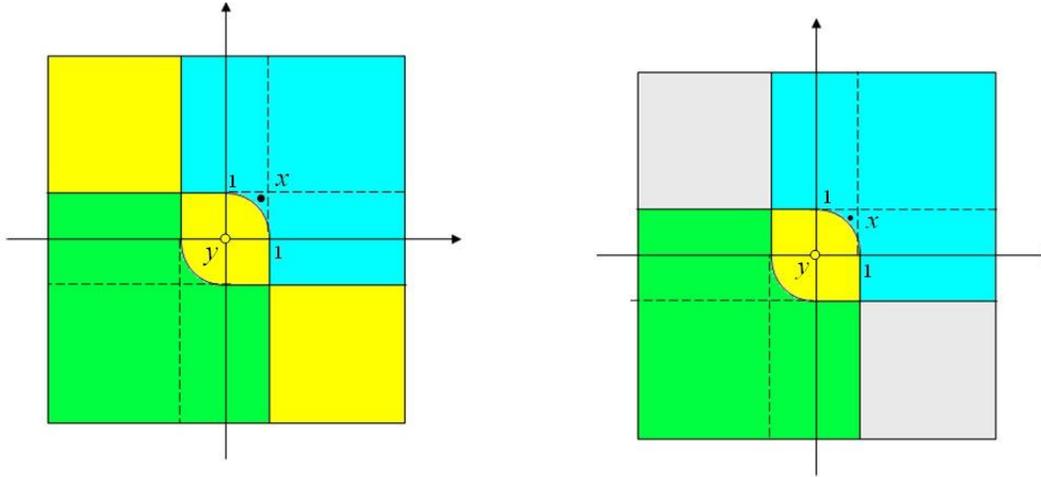
Preferencia sinérgica estricta \succ^s de umbral $s = (1, 1) \in \mathbb{R}_{++}^2$. Se determina excluyendo del semiorden débil las alternativas indiferentes (Figura 2(a)).

$$x \succ^s y \Leftrightarrow d = (x - y) \in ([-1, \infty)^2 \setminus [-1, 1]^2) \cup [\bar{B}(0,1)^c \cap \mathbb{R}_+^2]. \quad (1.14)$$

El conjunto de alternativas indiferentes a y tiene secciones circulares en los cuadrantes positivo y negativo (Figura 2).

⁶ La preferencia de este apartado es un ejemplo de una preferencia sinérgica, cuya definición se presenta en la Definición 15.

Figura 6: Preferencia sinérgica



(a) Estructura $I-P$ ($\mathbb{R}^n, >^c$)

(b) Estructura $I-P-J$ (\mathbb{R}^n, \succ^s)

Nótese que en estos ejemplos, que la preferencia estricta es la misma para la estructura $I-P$ como para la estructura $I-P-J$. Las denominaremos estructuras pares.

En el índice lineal, los conjuntos de alternativas débilmente preferidas $R(y)$, preferidas $P(y)$, indiferentes $I(y)$, y no comparables a y , $J(y)$, se describen mediante conjuntos afines de la forma $y + A = \{x | x = y + z, z \in A\}$, donde A es el semiespacio positivo, \mathbb{S}^n , o es el hiperplano, H , ortogonal al vector v , bisectriz de \mathbb{R}_+^n . Se definen $\mathbb{S}_+^n = \{d \in \mathbb{R}^n | \sum d_i \geq 0\}$, $H = \{d \in \mathbb{R}^n | \sum d_i = 0\}$, y $v = (1, \dots, 1)$.

Tabla 2: Índice lineal

Conjunto de alternativas	Estructura $I-P$	Estructura $I-P-J$
$R(y)$	$y + \mathbb{S}_+^n$	$y + (\mathbb{S}_+^n \setminus H) \cup \{0\}$
$P(y)$	$y + (\mathbb{S}_+^n \setminus H)$	$y + (\mathbb{S}_+^n \setminus H)$
$I(y)$	$y + H$	$y + \{0\} = \{y\}$
$J(y)$		$y + H \setminus \{0\}$

Por ejemplo, $y + (\mathbb{S}_+^n \setminus H) = \{x | x = y + d, d \in (\mathbb{S}_+^n \setminus H)\} = \{x | x - y = d, d \in (\mathbb{S}_+^n \setminus H)\} = \{x | \sum (x_i - y_i) > 0\} = \{x | \sum x_i > \sum y_i\} = \{x | x \succ^{IL} y\} = P(y)$.

1.2.2. Preferencias parciales

En la estructura (X, \succ) la preferencia \succ está definida sobre X , de modo que se puede comparar la alternativa (el vector) x con la alternativa (el vector) y . El interés está en comparar las coordenadas de x con las coordenadas de y . Para ello, a partir de la preferencia agregada, \succ , sobre cada uno de los n conjuntos X_i , se definen las relaciones parciales \succ_i .

Siguiendo a Fishburn (1976), se procede de la siguiente manera: sean $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ un vector; $y_i, z_i \in X_i$ dos elementos cualesquiera. Para comparar y_i con z_i , comparamos los vectores $(y_i, x_{-i}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$, y $(z_i, x_{-i}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Si por ejemplo $(y_i, x_{-i}) \succ (z_i, x_{-i})$ se dirá que $y_i \succ_i z_i$. Ahora bien, para que la relación esté bien definida, la condición anterior debe satisfacerse para cualquier vector $x_{-i} \in X_{-i}$, lo que nos lleva a definir:

Definición 4 (Preferencias parciales). Sean (X, \succ) una estructura de preferencia, $i \in \Omega$. Consideremos el conjunto X_i , y sean $y_i, z_i \in X_i$ dos elementos cualesquiera.

1. La preferencia estricta parcial \succ_i se define por:

$$y_i \succ_i z_i \Leftrightarrow (y_i, x_{-i}) \succ (z_i, x_{-i}) \text{ para todo } x_{-i} \in X_{-i}. \quad (1.15)$$

2. A partir de la preferencia \succ_i se define la indiferencia parcial \sim_i y la preferencia débil parcial \succsim_i aplicando las definiciones de una estructura I-P a (X_i, \succ_i) ; esto es:

$$\begin{aligned} y_i \sim_i z_i &\Leftrightarrow \neg(y_i \succ_i z_i) \wedge \neg(z_i \succ_i y_i). \\ y_i \succsim_i z_i &\Leftrightarrow \neg(z_i \succ_i y_i). \end{aligned} \quad (1.16)$$

La estructura (X_i, \succ_i) y el índice i se denominan criterio. Si $x, y \in X$ son dos alternativas y si $x_i \succ_i y_i$, diremos que x es preferida a y , o que x es mejor que y , en el criterio i .

Nótese que la estructura completa está determinada por el conjunto $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, por las relaciones \succ, \sim, \succsim (en el caso I-P), o por \succ, \sim, \succ, ϕ (en el caso I-P-J), y las preferencias parciales $\succ_i, \sim_i, \succsim_i$, para $i = 1, \dots, n$.

El término “parcial” hace referencia a que se considera un único criterio, el criterio i . De hecho, de acuerdo a la Definición 1, las relaciones de preferencia débil \succsim_i son completas

(dos elementos cualesquiera de X_i se pueden comparar).

Ejemplo 3. En las estructuras $(\mathbb{R}^n, >)$, (\mathbb{R}^n, L) , $(\mathbb{R}^n, >^{LL})$ y $(\mathbb{R}^n, >^*)$ y sus estructuras pares respectivas, los criterios son las estructuras $(\mathbb{R}, >)$. Es decir, las preferencias parciales son el orden mayor real $>$. En las estructuras $(\mathbb{R}^n, >^c)$ y $(\mathbb{R}^2, >^s)$ y sus estructuras pares respectivas, los criterios son las estructuras $(\mathbb{R}, >^{c_i})$ y $(\mathbb{R}, >^1)$ donde $>^{c_i}$ y $>^1$ son el semiorden mayor de umbral c_i y 1, respectivamente.

En la recta real, el semiorden mayor de umbral $c > 0$ es la relación definida por: $u >^c v$ si $u > v + c$; el semiorden menor $<^c$ se define de manera análoga. Este tipo de estructura de preferencia es común entre los métodos multicriterio.

Notemos que en $(X_i, >_i) = (\mathbb{R}, >)$, la preferencia débil \succsim_i es el orden mayor o igual \geq , y que la indiferencia \sim_i es la igualdad $=$. Se tiene además que \geq es una relación de orden completa: reflexiva, antisimétrica y transitiva; y que $=$ es una relación de equivalencia: reflexiva, simétrica y transitiva (ver Anexo 1).

Por otra parte, si $(X_i, >_i) = (\mathbb{R}, >^c)$, la preferencia débil \succsim_i es el semiorden mayor o igual \geq^c , en tanto que \sim_i es la relación de indiferencia $=^c$. En este caso se tiene que \geq^c es una relación de semiorden completa: reflexiva, semitransitiva y Ferrer; y que $=^c$ es una relación de semejanza: reflexiva y simétrica. Una relación de semejanza no es transitiva. Justamente, la característica distintiva de una relación de semiorden es que la preferencia estricta es transitiva; pero la indiferencia no es transitiva. Por ejemplo, para $=^1$, puesto que $u =^1 v$ si $|u - v| \leq 1$, se tiene que $(2 =^1 1,25)$ y $(1,25 =^1 0,5)$, pero $(2 >^1 0,5)$.

El interés de este trabajo es el caso particular de las estructuras $(X, >) = (\mathbb{R}^n, >)$ donde la preferencia $>$ es tal que la preferencia parcial $>_i$ en \mathbb{R} es el orden mayor ($>$) o el semiorden mayor ($>^c$), o es el orden menor ($<$) o el semiorden menor ($<^c$). En el primer caso diremos que el objetivo del criterio es de maximización (más es mejor), en el segundo caso se dice que el objetivo del criterio es de minimización (menos es mejor). Sin pérdida de generalidad, a menos que se indique lo contrario, asumiremos que los criterios son de maximización.

Por otra parte, las definiciones y teoremas válidos para una estructura cualesquiera (X, \succ) se enunciarán sobre esta estructura general.

Siguiendo la terminología de Roy (1996), cuando todas las preferencias parciales \succ_i son el orden mayor o menor, a la estructura (\mathbb{R}^n, \succ) se la denominará estructura de preferencia (real) en criterios (EPCr). Bajo la terminología señalada, una EPCr determina sobre las coordenadas “criterios verdaderos”. De igual manera, si todas las preferencias parciales \succ_i son relaciones de semiorden, continuando con la terminología de Roy, se la llamará estructura de preferencia (real) en semicriterios (EPsCr).

Ejemplo 4. Las estructuras (\mathbb{R}^n, \succ) , (\mathbb{R}^n, L) , $(\mathbb{R}^n, \succ^{Ll})$ y (\mathbb{R}^n, \succ^*) y sus estructuras pares respectivas son EPCr. Las estructuras (\mathbb{R}^n, \succ^c) y (\mathbb{R}^2, \succ^s) y sus estructuras pares respectivas son EPsCr.

Nótese que si se acepta que el umbral de indiferencia puede ser cero, se tiene que una EPsCr de umbral $c = 0$ es una EPCr. Dicho de otro modo una EPsCr es el caso más general y cubre el caso de una EPCr.

Finalmente una característica importante de las EPsCr se describe en la Observación 2:

Observación 2. Sea (\mathbb{R}^n, \succ^c) una EPsCr con $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_{++}^n$ se tiene que para cualquier $i \in \Omega$, y cualquier $\varepsilon > 0$:

$$(x_i + (1 + \varepsilon)c_i, x_{-i}) \succ (x_i, x_{-i}). \quad (1.17)$$

1.3. Preferencias no compensatorias Fishburn

En esta sección se revisará las estructuras de preferencia no compensatorias (EPNC) definidas por Peter Fishburn (1976) que, hasta el momento, han sido las estructuras que han sustentado los diferentes desarrollos del análisis multicriterio.

Para $x, y \in X$, notemos por $\Omega_p(x, y)$ al conjunto de índices de los criterios en los cuales la alternativa x es preferida a y , y por $\Omega_I(x, y)$ al conjunto de índices de los criterios en los cuales la alternativas son indiferentes: $\Omega_p(x, y) = \{i \in \Omega \mid x_i \succ_i y_i\}$; $\Omega_I(x, y) = \{i \in \Omega \mid x_i \sim_i y_i\}$.

Se dice que preferencia \succ es no compensatoria Fishburn (PNC F) si la preferencia de x sobre y depende sólo de la lista de criterios en los que x es mejor que y , y de la lista en la que y es mejor que x ([394]Fishburn1976; [253]Bouyssou_Vansnick1986). Esto es, si $x, y, z, w \in X$ son cuatro alternativas cualesquiera y se satisface que $\Omega_P(x, y) = \Omega_P(z, w)$, $\Omega_P(y, x) = \Omega_P(w, z)$, se debe cumplir $(x \succ y) \Leftrightarrow (z \succ w)$ o, de manera equivalente, $(x \succ y)$ y $(z \succ w)$, o $\neg(x \succ y)$ y $\neg(z \succ w)$.

Definición 5 (EPNC Fishburn). *La estructura de preferencia (X, \succ) se denomina estructura de preferencia no compensatoria Fishburn (EPNC F) si para $x, y, z, w \in X$ cuatro alternativas cualesquiera se satisface:*

$$[\Omega_P(x, y) = \Omega_P(z, w)] \wedge [\Omega_P(y, x) = \Omega_P(w, z)] \Rightarrow [(x \succ y) \Leftrightarrow (z \succ w)]. \quad (1.18)$$

Ejemplo 5. *La Tabla 3 muestra las preferencias de los ejemplos 1 y 2 (relaciones de preferencia de ejemplo) y su conexión con la no compensación Fishburn.*

Tabla 3: No compensación Fishburn

Preferencia		No compensación Fishburn
Orden mayor	\succ	V
Lexicográfica	L	V
Índice lineal	\succ^{IL}	F
No paretiana	\succ^*	F
Semiorden mayor	\succ^c	V
Sinérgica	\succ^s	F

Por ejemplo, si $x = (2, -4)$, $y = (1, 2)$; $z = (3, -1)$, $w = (0, 1)$, se tiene que $\Omega_P(x, y) = \Omega_P(z, w) = \{1\}$, y que $\Omega_P(y, x) = \Omega_P(w, z) = \{2\}$. Entonces, en este ejemplo, para el orden lexicográfico se cumple que $(x L y)$ y $(z L w)$, es decir, el orden lexicográfico satisface la condición para ser no compensatorio Fishburn. Por otra parte, para el orden mayor se tiene que $\neg(x \succ y)$ y $\neg(z \succ w)$, de donde se concluye que el orden mayor (en este ejemplo) también satisface la condición para la no compensación Fishburn. Finalmente, para el índice lineal, $\sum y_i = 3 > -2 = \sum x_i$, lo cual que implica $(y \succ x)$. Pero, por otra parte se tiene que $\sum z_i = 2 > 1 = \sum w_i$, que implica $(z \succ w)$. En consecuencia, el índice lineal no es no

compensatorio Fishburn.

Capítulo 2

Preferencias no compensatorias T2, T2b y T3

2.1. Preferencias no compensatorias T2 y T2b

En esta sección se introducen las definiciones de estructura de preferencia no compensatoria tipo 2 y tipo 2b (EPNC T2 y EPNC T2b respectivamente). Para ello se requiere algunos conceptos previos que se presentan a continuación.

Recuérdese que en la noción intuitiva de compensación, se dice que la compensación se refiere a “() la posibilidad de compensar una ‘desventaja’ en algún atributo por una ‘ventaja’ suficientemente grande en otro atributo ()”. Por otra parte, extendiendo y precisando el concepto de ventaja de [Roy(1996)], para alternativas en \mathbb{R}^n , la ventaja en un criterio simplemente se define como la diferencia a favor entre las coordenadas de dos alternativas (recuérdese que se asume que los criterios son positivos, que se prefiere más a menos). Una desventaja es una diferencia en contra.

Definición 6 (Ventajas y desventajas). Sean (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencia; $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas.

1. La ventaja de x sobre y es el vector $V(x, y) = (V_1(x, y), \dots, V_n(x, y))$, donde $V_i(x, y)$ es la ventaja de x sobre y en el atributo o criterio i que se define por $V_i(x, y) = \max(x_i - y_i, 0)$.
2. La desventaja de x respecto a y es $D(x, y) = V(y, x)$.
3. Si $V_i(x, y) > 0$ e $i \in I_p(x, y)$ se dice que la ventaja es relevante. Y, si $V_i(x, y) > 0$ e $i \notin I_p(x, y)$ se dice que la ventaja es irrelevante.
4. Si $V_i(x, y)$ es mayor que $V_i(z, w)$, se dice que la intensidad de la i -ésima preferencia entre x e y es mayor que la intensidad entre z y w .

Ejemplo 6. Sean $x = (2, 0, -2)$; $y = (0, 0, 1)$. Entonces, $V(x, y) = (2, 0, 0)$; $D(y, x) = (0, 0, 3)$. Si la preferencia \succ es el semiorden de umbral $c = (2, 1, 2)$. La ventaja $V_1(x, y) = 2$ es irrelevante, la desventaja $D_3(x, y) = 3$ es relevante.

Cuando para las alternativas $x, y, z, w \in \mathbb{R}^n$ ocurra que $V(z, w) \leq V(x, y)$ se dirá que las ventajas del par de alternativas (z, w) tienen menor magnitud o intensidad que las ventajas

de (x, y) . Un concepto similar se puede definir para las desventajas.

En una EPCr cualquier ventaja es relevante. A partir de este punto, a menos que se indique lo contrario, se entenderá por ventaja las ventajas relevantes.

No compensación T2. Para la definición de preferencia no compensatoria tipo 2, consideremos dos alternativas $x, y \in X$ tales que $x \succ y$. Si y tuviese alguna ventaja sobre x o, lo que es mismo, si x tuviese alguna desventaja sobre y , para que $x \succ y$, debería ocurrir que “algo” *compense* tal desventaja. Ese “algo” solo puede ser las ventajas de x sobre y . Así, se dice que la preferencia \succ es no compensatoria tipo 2 (PNC T2) siempre que cuando la alternativa x es preferida a y , ocurre que y no tiene ninguna ventaja (relevante) sobre x .

Definición 7 (EPNC T2). Se dice que la estructura de preferencia (X, \succ) es no compensatoria T2 (EPNC T2) si para cualquier $x, y \in X$ se cumple:

$$(x \succ y) \Rightarrow \Omega_P(y, x) = \emptyset. \quad (2.1)$$

Ejemplo 7. La Tabla 4, al final de esta sección, muestra las preferencias de ejemplo y su conexión con la no compensación T2.

No compensación T2b. Veamos una definición de no compensación muy asociada con la Definición 7 (más adelante se mostrará que bajo ciertas condiciones son equivalentes), por lo cual se la ha denominado tipo 2b.

Introducimos un concepto adicional, el de *mejorar* una alternativa que no es otra cosa que incrementar el valor de sus coordenadas.

Definición 8 (Mejora). Sean (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencia, $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas, y Λ un subconjunto de Ω .

1. Una mejora de y en Λ es una alternativa $y' = y + t_\Lambda$, con $t_\Lambda \in \mathbb{R}_+^n$, tal que $t_{\Lambda_i} > 0$ para $i \in \Lambda$, $t_{\Lambda_i} = 0$ para $i \in \Lambda^c$.
2. Supongamos que $\Omega_P(x, y) \neq \emptyset$. Una mejora de y , que excluye alguna de las ventajas de x sobre y , es una mejora de y en $\Lambda \subseteq \Omega \setminus \{i\}$ con $i \in \Omega_P(x, y)$.

A la alternativa mejorada $y' \in X$ también se la denominará alternativa compensada, y se dirá que t_Λ es la compensación.

En una mejora que excluye alguna de las ventajas de x sobre y puede ocurrir los siguientes casos: que se incrementen las ventajas de y sobre x ; que las indiferencias entre x e y cambien a preferencias de y sobre x ; que las desventajas de y respecto de x disminuyan en intensidad o se transformen en indiferencias o en ventajas de y sobre x ; pero, al menos, una ventaja de x sobre y no se altera.

Nótese también que la alternativa mejorada satisface $y' > y$.

Ejemplo 8. Sean $x = (3,0,-2,2)$, $y = (2,0,1,1)$. Una mejora que excluye la ventaja en el primer criterio es $y' = (2,1,2,3) = y + t_\Lambda$ con $t_\Lambda = (0,1,1,2)$.

Se dirá que la preferencia $>$ es no compensatoria tipo 2b (PNC T2b) siempre que cuando la alternativa x es preferida a y , por más que se compensen las desventajas de y mediante una mejora que excluya alguna de las ventajas de x sobre y , la relación de preferencia no se invierte. De manera simplificada se dirá que *ninguna desventaja puede ser compensada*.

Definición 9 (EPNC T2b). La estructura de preferencia es $(\mathbb{R}^n, >)$ es no compensatoria T2b (EPNC T2b) si para cualquier $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $\Lambda \subseteq \Omega \setminus \{i\}$ con $i \in \Omega_p(x, y)$ se satisface que:

$$(x > y) \Rightarrow \forall t_\Lambda > 0, \neg(y + t_\Lambda > x). \quad (2.2)$$

Ejemplo 9. La Tabla 4 valora las preferencias de ejemplo según la no compensación T2 y T2b.

Tabla 4: No compensación T2 y T2b

Preferencia		No compensación T2	No compensación T2b
Orden mayor	$>$	V	V
Lexicográfica	L	F	F
Índice lineal	\succ^{IL}	F	F
No paretiana	\succ^*	F	V
Semiorden mayor	\succ^c	V	V
Sinérgica	\succ^s	V	V

Nótese que no existe un ejemplo de una preferencia que sea no compensatoria T2 y no sea no compensatoria T2b. Tal como se demuestra en el Teorema 1, esta imposibilidad se debe a que, cuando una preferencia es no compensatoria T2, entonces, es no compensatoria T2b.

2.1.1. Interacciones no compensación T2 y T2b

Para determinar las interacciones entre las definiciones de no compensación T2 y T2b se requiere definir la propiedad de regularidad o fuerte de Pareto que nos dice simplemente que x es preferida a y si en algún criterio la alternativa x es mejor que la alternativa y , y si en ningún criterio la alternativa y no es mejor que x .

Definición 10 (Propiedad fuerte de Pareto). Sean (X, \succ) una estructura de preferencia; $x, y \in X$ dos alternativas cualquiera. Se dice que la preferencia \succ satisface propiedad de regularidad o fuerte de Pareto (fp) si:

$$[\Omega_P(x, y) \neq \emptyset \wedge \Omega_P(y, x) = \emptyset] \Rightarrow (x \succ y). \quad (2.3)$$

Ejemplo 10. En las preferencias de ejemplo, sólo la preferencia no paretiana \succ^* no cumple la condición fuerte de Pareto. Por ejemplo, si $x = (0,5, 0,5)$, $y = (0, 0)$ se tiene que $\Omega_P(x, y) = \{1, 2\} \neq \emptyset$, $\Omega_P(y, x) = \emptyset$, pero $y \succ x$. Las otras preferencias (orden mayor, orden lexicográfico, índice lineal, semiorden y sinérgica) satisfacen la condición fuerte de Pareto.

Bouyssou y Vansnick (1986) denominan a la preferencia no compensatoria Fishburn fuertemente paretiana como “preferencia no compensatoria”.

Las interacciones entre las definiciones EPNC T2 y EPNC T2b se establecen en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencia.*

1. *Si (\mathbb{R}^n, \succ) es una EPNC T2 entonces es una EPNC T2b.*
2. *Si (\mathbb{R}^n, \succ) es una EPNC T2b fp entonces es una EPNC T2.*

Demostración.

1. *Supongamos que se cumple que la preferencia \succ es no compensatoria T2, pero no es no compensatoria T2b, es decir, existen dos alternativas $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x \succ y$, y una mejora $t_\Lambda > 0$ con $\Lambda \subseteq \Omega \setminus \{i\}$, $i \in \Omega_P(x, y)$, tal que $y + t_\Lambda \succ x$.
Aplicando la definición de EPNC T2 al par $(y + t_\Lambda, x)$ se tendría que $\Omega_P(x, y + t_\Lambda) = \emptyset$ que contradice el hecho que $\Omega_P(x, y + t_\Lambda) \ni i$, pues la mejora t_Λ deja sin cambio el criterio i .*
2. *Ahora supongamos que la preferencia \succ es no compensatoria T2b fuertemente paretiana, pero no es no compensatoria T2. Se tiene que existen $y', x \in X$ tal que $y' \succ x$ y $\Omega_P(x, y') \neq \emptyset$. Si $\Omega_P(y', x) = \emptyset$; por la condición fuerte de Pareto se concluye que $x \succ y'$, lo que es contradictorio. Si $\Omega_P(y', x) \neq \emptyset$ definamos $y \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera: $y_i = y'_i$ para $i \in \Omega_P(x, y') \cup \Omega_I(x, y')$, $y_i = x_i$ para $\Omega_P(y', x)$. Tenemos que $\Omega_P(x, y) = \Omega_P(x, y') \neq \emptyset$, $\Omega_P(y, x) = \emptyset$, $\Omega_I(x, y) = \Omega_P(y', x) \cup \Omega_I(x, y')$; y por la condición fuerte de Pareto se concluye que $x \succ y$. Sean $i \in \Omega_P(x, y) \neq \emptyset$ cualesquiera, $\Lambda = \Omega_P(y', x) \subseteq \Omega \setminus \{i\}$, $t_\Lambda = y' - y$, $t_{\Lambda_j} = 0$ para $j \in \Omega_P(x, y') \cup \Omega_I(x, y') = \Lambda^c$, $t_{\Lambda_j} = y'_j - x_j > 0$ para $j \in \Lambda$. Se cumplen las condiciones de preferencia no compensatoria T2b, por tanto se concluye que $\neg(y' \succ x)$, lo que se contradice con $y' \succ x$.*

Observación 3. *En adelante se asumirá que la preferencia estricta \succ satisface la condición fuerte de Pareto, por tanto las definiciones de EPNC T2 y EPNC T2b serán equivalentes. Sin embargo, la condición de ser fuertemente paretiana (fp) se explicitará en los enunciados de los teoremas 2 a 4 y en el enunciado del Lema 1 que se presentarán en la Sección 2.1.2.*

2.1.2. Interacciones no compensación Fishburn y T2

La Tabla 5 valora las preferencias de ejemplo según la no compensación Fishburn y T2.

Tabla 5: No compensación Fishburn y T2

Preferencia		No compensación Fishburn	No compensación T2
Orden mayor	$>$	V	V
Lexicográfica	L	V	F
Índice lineal	\succ^{LL}	F	F
No paretiana	\succ^*	F	F
Semiorden mayor	\succ^c	V	V
Sinérgica	\succ^s	F	V

En la Tabla 5 se muestran las 4 posibilidades (V-V, V-F, F-V, F-F), de donde se concluye que las definiciones de preferencia no compensatoria Fishburn y preferencia no compensatoria T2 son independientes. Sin embargo, a continuación se verificará que estos dos tipos de no compensación, bajo ciertas condiciones bastante generales, están relacionados. Para ello, primero veamos algunas definiciones necesarias.

Si (X, \succ) es una estructura de preferencia y $x, y \in X$ son dos alternativas cualesquiera, se dice que x domina estrictamente a y si la alternativa x es débilmente preferida a y en todos los criterios, y es preferida estrictamente en al menos un criterio.

Definición 11 (Dominancia). Sean (X, \succ) una estructura de preferencia; $x, y \in X$ dos alternativas cualesquiera. La relación de dominancia estricta o simplemente dominancia \succ^D se define por:

$$x \succ^D y \Leftrightarrow \forall i \in \Omega, x_i \succsim_i y_i \wedge \exists j \in \Omega, x_j \succ_j y_j. \quad (2.4)$$

Observación 4. La relación de dominancia \succ^D es no compensatoria Fishburn y no compensatoria T2.

Observación 5. En una EPCr (\mathbb{R}^n, \succ) , cuando el objetivo de todos los criterios es de maximización, la relación de dominancia estricta es el orden mayor usual en \mathbb{R}^n . En el caso general, cuando los criterios son mixtos (de maximización y minimización), la relación de

dominancia estricta es isomorfa al orden mayor⁷.

Inclusión: EPNC F \subset EPNC T2

En esta sección se presentarán dos teoremas que indican cuando una EPNC F es una EPNC T2. El primer caso será para la preferencia no compensatoria Fishburn más restrictiva; el segundo caso tratará con las preferencias continuas y no sinérgicas.

La preferencia no compensatoria Fishburn más restrictiva

En el Ejemplo 3, se había mostrado que en las estructuras de preferencia $(\mathbb{R}^n, >)$, (\mathbb{R}^n, L) y $(\mathbb{R}^n, >^{LL})$, los criterios son las estructuras $(\mathbb{R}, >)$; y, que en las estructuras $(\mathbb{R}^n, >^c)$ y $(\mathbb{R}^2, >^s)$, los criterios son las estructuras $(\mathbb{R}, >^c)$ y $(\mathbb{R}, >^1)$ respectivamente. Esto motiva la Definición 12.

Definición 12 (Direcciones paralelas) Sean $(X, >^1)$, $(X, >^2)$ dos estructuras de preferencia. Decimos que las preferencias $>^1$ y $>^2$ tienen direcciones paralelas o simplemente que son paralelas, lo que se nota por $>^1 \parallel >^2$, si las preferencias parciales son iguales; esto es, cuando $(X_i, >_i^1) = (X_i, >_i^2)$, para todo $i \in \Omega$.

Si $(X, >^1) = (\mathbb{R}^n, >^1)$ y $(X, >^2) = (\mathbb{R}^n, >^2)$ son EPsCr, y las preferencias tienen direcciones paralelas, entonces las preferencias parciales $>_i^1$ y $>_i^2$ tienen iguales objetivos (de maximización o de minimización), e igual umbral de indiferencia.

Puesto que las preferencias son conjuntos (subconjuntos del producto cartesiano, $X \times X$), se pueden aplicar las operaciones de conjuntos. El interés está en la intersección de preferencias paralelas definidas sobre el mismo conjunto de alternativas X (al intersecarse preferencias no paralelas, en el caso general, esta intersección es vacía).

Ahora bien, la intersección de dos preferencias no compensatorias Fishburn paralelas es una preferencia no compensatoria Fishburn.

⁷ Basta considerar el isomorfismo $f: (X, >) \rightarrow (X, >^*)$ definido por $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))$, donde $(X, >^*)$ es una EPCr con todos sus objetivos de maximización; $f_i(x_i) = x_i$ si el objetivo del criterio i es de maximización; o, bien, $f_i(x_i) = -x_i$, cuando el objetivo es de minimización.

Por ejemplo, el orden lexicográfico se puede escribir como $L = L_{123}$ para indicar que primero se compara el primer criterio, luego el segundo y finalmente el tercero. El orden lexicográfico se generaliza a una relación de orden lexicográfica, por ejemplo, L_{213} que indica que primero se compara el segundo criterio, luego el primero y finalmente el tercero.

Ejemplo 11. Consideremos las preferencias lexicográficas L_{123} y L_{213} en \mathbb{R}^3 :

$$L_{123} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid (x_1 > y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 > y_3)\}, \quad (2.5)$$

$$L_{213} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid (x_2 > y_2) \vee (x_2 = y_2 \wedge x_1 > y_1) \vee (x_2 = y_2 \wedge x_1 = y_1 \wedge x_3 > y_3)\}. \quad (2.6)$$

La intersección es: $L_{(12)3} = L_{123} \cap L_{213}$

$$L_{(12)3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mid (x_2 \geq y_2 \wedge x_1 > y_1) \vee (x_1 \geq y_1 \wedge x_2 > y_2) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_3 > y_3)\}. \quad (2.7)$$

Este orden se puede escribir también de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, x_3) L_{(12)3} (y_1, y_2, y_3) \text{ si } \begin{cases} (x_1, x_2) > (y_1, y_2) \\ (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \wedge x_3 > y_3, \end{cases} \quad (2.8)$$

que es una mixtura entre el orden mayor y el orden lexicográfico: primero se comparan los criterios 1 y 2 del par de alternativas, según el orden mayor, luego se compara el tercer criterio.

Además, se dice que $L_{(12)3}$ es más restrictiva que L_{123} y L_{213} , pues sus parejas de alternativas deben cumplir con más condiciones o restricciones.

Las preguntas son ¿cuál es la preferencia no compensatoria Fishburn fp más restrictiva?, y ¿qué relación tiene esta preferencia con la no compensación T2?

Definición 13 (Preferencia no compensatoria Fishburn más restrictiva). Sea $(X, >)$ una estructura de preferencia. La preferencia más gruesa o más restrictiva, no compensatoria Fishburn fp, paralela a $>$, es la preferencia \underline{P} que se obtiene al intersecar todas las PNC F fp paralelas a $>$. Es decir:

$$\underline{P} = \bigcap_{P \in \eta} P \quad (2.9)$$

donde $\eta = \{P \subseteq X \times X \mid P \text{ es una PNCF fp y } P \parallel \succ\}$.

El Teorema 2 caracteriza a la preferencia \underline{P} .

Teorema 2. *Sea (X, \succ) una estructura de preferencia. La preferencia no compensatoria Fishburn fp más restrictiva paralela a \succ es la relación de dominancia \succ^D .*

Demostración. *Sea $\eta = \{P \subseteq X \times X \mid P \text{ es una PNCF fp y } P \parallel \succ\}$; entonces, $\underline{P} = \bigcap_{P \in \eta} P$. Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $D(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \succ^D x\}$, $\underline{P}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \underline{P} x\}$. Para demostrar el Teorema 2, es suficiente con demostrar que $D(x) = \underline{P}(x)$. Es decir, hay que demostrar que $D(x) \subseteq \underline{P}(x)$ y que $\underline{P}(x) \subseteq D(x)$. La continencia $\underline{P}(x) \subseteq D(x)$ es inmediata pues si $y \underline{P} x$, $y P x$ para cualquier $P \in \eta$, en particular para la dominancia estricta \succ^D que es una PNCF fp paralela a \succ . Para la continencia $D(x) \subseteq \underline{P}(x)$, sea $y \in X$ tal que $y \succ^D x$. Se debe demostrar $y \underline{P} x$. Sea P una PNCF fp cualesquiera tal que $P \parallel \succ$. Como $y \succ^D x$, $\Omega_P(y, x) \neq \emptyset$, $I_P(x, y) = \emptyset$; puesto que P es paretiana fuerte se tiene que $y P x$; por tanto, $y (\bigcap_{P \in \eta} P) x$, es decir, $y \underline{P} x$.*

Tal como se indicó en la Observación 3, asumiendo que la estructura (\mathbb{R}^n, \succ) es fuertemente paretiana y, puesto que, la dominancia \succ^D es una preferencia no compensatoria T2, el Teorema 2 afirma que:

La EPNC F más restrictiva es una EPNC T2.

Preferencias continuas y preferencias sinérgicas

Una segunda clase de preferencias no compensatorias Fishburn que resultan ser preferencias no compensatorias T2 son las preferencias continuas y no sinérgicas. Analicemos estos conceptos.

Preferencias continuas. En una preferencia continua una sucesión convergente de alternativas tiene la característica de que, si cada alternativa que conforma la sucesión es estrictamente preferida a una cierta alternativa, el límite de la sucesión es, a lo sumo, débilmente preferida a tal alternativa⁸. Esta condición también se interpreta diciendo que no

⁸ La definición de preferencia \succ continua es una ligera variación de las “preferencias continuas” de la teoría del consumidor (Mas-Colell et al. 1995).

hay saltos por discontinuidad. Por ejemplo, en el orden lexicográfico, que más adelante verificaremos no es continuo, se presenta un salto discontinuo, se tiene que $(2 + \varepsilon, 3) \in L^{-1}(2,4)$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Si L fuese P-continuo, ocurriría que $(2,3) \in \bar{L}(2,4)$, pero ocurre que $(2,3) \notin L^{-1}(2,4)$. La definición formal de continuidad es:

Definición 14 (Preferencias P-continuas). Sean (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencia, $y \in \mathbb{R}^n$ una alternativa, $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión cualquiera de elementos de \mathbb{R}^n convergente a $x \in \mathbb{R}^n$ ($x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$) tal que $x_k \succ y$. La estructura de preferencia se dice P-continua si se tiene que $x \succ y$.

Ejemplo 12. En \mathbb{R}^n , el orden mayor y el índice lineal son continuos; en tanto que, el orden lexicográfico y la preferencia no paretiana \succ^* no son continuos.

Sinergia. El término sinergia proviene del griego *synergo* que significa “trabajar en conjunto”. Se dice que hay sinergia o que la sinergia es positiva, cuando el resultado del trabajo conjunto de las partes de un sistema es mayor que cuando las partes actúan independientemente. En la dinámica de sistemas se enfatiza la expresión “el todo es más que la suma de las partes”. En el campo del análisis multicriterio, Grabisch_Roubens2000 formalizan el concepto de sinergia mediante la interacción positiva del conjunto de criterios.

En (\mathbb{R}^n, \succ) , se entiende por sinergia cuando, a pesar de que una alternativa x tiene sus coordenadas indiferentes a las de otra alternativa y , resulta que, como consecuencia de los efectos positivos de la combinación entre ventajas irrelevantes, x es preferida a y . La “no sinergia” simplemente es la negación de la “sinergia”.

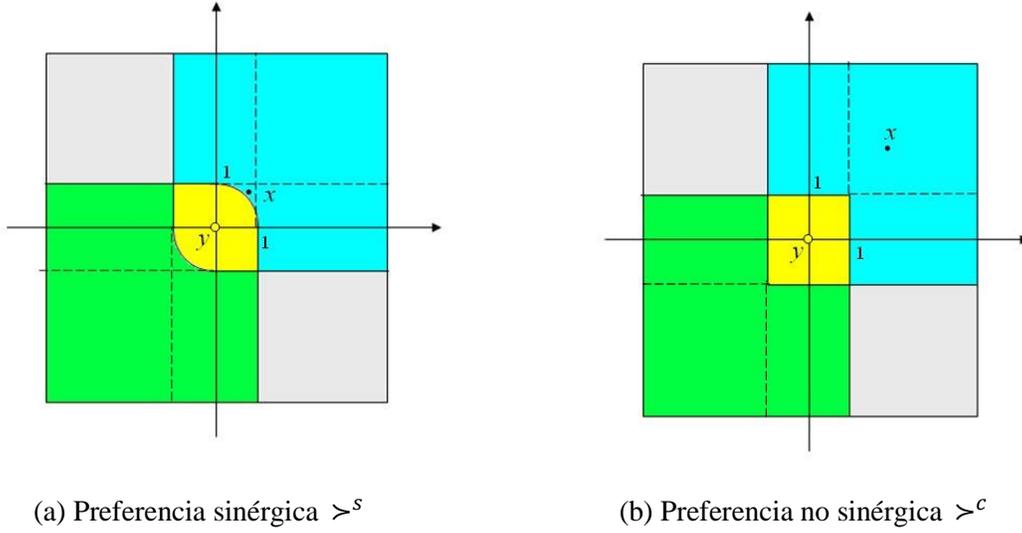
Definición 15 (Sinergia y no sinergia). Sea (X, \succ) una estructura de preferencia. La preferencia \succ es sinérgica si existen dos alternativas $x, y \in X$ tales que:

$$[I_I(x, y) = \Omega] \wedge (x \succ y). \quad (2.10)$$

La preferencia \succ es no sinérgica si para dos alternativas $x, y \in X$ cualesquiera se tiene que:

$$[I_I(x, y) = \Omega] \Rightarrow [\neg(x \succ y) \wedge \neg(y \succ x)]. \quad (2.11)$$

Figura 7: Sinergia, no sinergia



Ejemplo 13. La estructura (\mathbb{R}^2, \succ^s) con umbral de indiferencia $c = (1, 1)$ es una estructura de preferencia sinérgica (Figura 7(a)). La estructura (\mathbb{R}^2, \succ^c) con $c = (1, 1)$ es una preferencia no sinérgica (Figura 7(b)).

Observación 6. Si (X, \succ) es una EPCr, se tiene que la preferencia \succ es no sinérgica. Previo a la enunciación del Teorema 3, se demuestra el Lema 1.

Lema 1. Sean (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencia no compensatorio Fishburn fuertemente paretiana P-continua, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $x \succ y$, entonces, $\Omega_P(y, x) = \{i \in \Omega | y_i \succ_i x_i\} = \emptyset$.

Demostración. Sea $c = (c_1, c_1, \dots, c_1) \in \mathbb{R}_+^n$ el vector de umbrales de indiferencia. Considérese que se cumplen las hipótesis y no se cumple la conclusión; esto es, (\mathbb{R}^n, \succ) es una estructura de preferencia no compensatoria Fishburn fp P-continua, $x, y \in \mathbb{R}^n$ son dos alternativas tales que $x \succ y$, y $\Omega_P(y, x) \neq \emptyset$. a) Si $\Omega_P(x, y) = \emptyset$, por la condición fuerte de Pareto, $y \succ x$, que es contradictorio. b) Asíumase ahora que $\Omega_P(x, y) \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad asumamos que los r primeros índices corresponden a $\Omega_P(x, y)$, los medios y últimos a $\Omega_I(x, y)$ y $\Omega_P(y, x)$. Sea (x^k) , $k \geq 1$ la sucesión de vectores donde el k -ésimo vector es $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$; con $x_i^k = y_i + \frac{1}{k}$ si $i \in \Omega_P(x, y)$, y $x_i^k = x_i$ si $i \in \Omega_P(y, x) \cup \Omega_I(x, y)$. Entonces, $x^k = (y_1 + c_1 + \frac{1}{k}, \dots, y_r + c_r + \frac{1}{k}, x_{r+1}, \dots, x_n)$, donde c_i

es el umbral de indiferencia del criterio i . Se concluye que $\Omega_P(x, y) = \Omega_P(x^k, y)$, $\Omega_P(y, x) = \Omega_P(y, x^k)$; y, por ser PNC Fishburn, $x^k \succ y$. Sea $x' = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = (y_1 + c_1, \dots, y_r + c_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$. Como $x^k \succ y$, la P-continuidad de \succ implica: $x' \succcurlyeq y$. Comparando x' e y tenemos $\Omega_P(x', y) = \emptyset$, $\Omega_P(y, x') = \Omega_P(y, x) \neq \emptyset$, que, por la condición fuerte de Pareto, implica $y \succ x'$, que es contradictorio con $x' \succcurlyeq y$.

Teorema 3. Sea (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencia. Si la preferencia \succ es no compensatoria Fishburn fp P-continua y no sinérgica, entonces es la relación de dominancia \succ^D .

Demostración. Debemos demostrar la relación de preferencia \succ es igual a la relación de dominancia \succ^D , dicho de otro modo, hay que demostrar: $x \succ y$ si y solo si $x \succ^D y$. Si $x \succ^D y$, por ser \succ fuertemente paretiana se concluye $x \succ y$. Si $x \succ y$, por el Lema 1 se tiene que $\Omega_P(y, x) = \emptyset$. Si $\Omega_P(x, y) = \emptyset$, se tiene que $\Omega_I(x, y) = \Omega$ y por la no sinergia se tendría que $\neg(x \succ y)$, que es contradictorio. Queda la opción $\Omega_P(x, y) \neq \emptyset$. Esta condición y $\Omega_P(y, x) = \emptyset$ implican $x \succ^D y$.

Observación 7. En una EPNCr la condición de no sinergia puede suprimirse.

De igual manera, asumiendo que la estructura (\mathbb{R}^n, \succ) es fuertemente paretiana (Observación 3), considerando las observaciones 6 y 7, y que la dominancia \succ^D es una preferencia no compensatoria T2, el Teorema 3 dice que:

Una EPNC F P-continua y no sinérgica es una EPNC T2.

Una EPNCr NC F P-continua es una EPNC T2.

Inclusión: EPNC T2 \subset EPNC F

Veamos ahora las interacciones entre una preferencia no compensatoria T2 y la relación de dominancia.

Teorema 4. Sea (X, \succ) una estructura de preferencia. Si la preferencia \succ es no compensatoria T2 fp y no sinérgica entonces la preferencia \succ es la relación de dominancia \succ^D .

Demostración. Se debe demostrar que si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \succ y$ implica $x \succ^D y$, y que $x \succ^D y$

implica $x \succ y$. Sea $x \succ y$, como la preferencia es no compensatoria T2, $\Omega_P(y, x) = \emptyset$. Si $\Omega_P(x, y) = \emptyset$, por ser no sinérgica, $\neg(x \succ y)$ que es contradictorio, por tanto solo puede ocurrir $\Omega_P(x, y) \neq \emptyset$ que implica $x \succ^D y$. Ahora supongamos que $x \succ^D y$. Se tiene que $\Omega_P(x, y) \neq \emptyset$ y $\Omega_P(y, x) = \emptyset$; puesto que \succ es fuertemente paretiana, se cumple que $x \succ y$.

Bajo el supuesto que la estructura de preferencia es fuertemente paretiana (Observación 3), considerando las observaciones 6 y 7, y dado que la dominancia \succ^D es una PNC Fishburn, el Teorema 4 es el “recíproco” de los teoremas 2 y 3, y dice que:

Una EPNC T2 no sinérgica es una EPNC F.

Una EPNCr NC T2 es una EPNC F.

Como conclusión general se tiene que la definición de no compensación T2 está estrechamente relacionada a la definición de no compensación de Fishburn. Asumiendo que las preferencias cumplen la condición fuerte de Pareto, bajo ciertas condiciones (si la preferencia es la más restrictiva, o es P-continua y no sinérgica, o es P-continua en criterios), una preferencia no compensatoria Fishburn es una preferencia no compensatoria T2 y, recíprocamente, dadas ciertas condiciones (no sinergia o si es una estructura de preferencia en criterios) una preferencia no compensatoria T2 es una preferencia no compensatoria Fishburn.

2.2. Preferencias no compensatorias T3

Para introducir la definición de no compensación tipo 3 (NC T3), se requiere el concepto de preferencias simétricas entre criterios que es idéntico al concepto de operador de agregación simétrico entre agentes de la teoría de la elección social. En un operador de agregación simétrico entre agentes, los “agentes reciben igual tratamiento”. Este concepto se vuelve operativo definiendo que la preferencia agregada no cambia cuando se permutan los argumentos del operador de agregación. Iniciemos entonces con los conceptos de permutación.

Una función biyectiva σ de Ω en Ω se denomina permutación de los elementos de Ω . Si, por ejemplo, $\Omega = \{1,2,3,4\}$, la permutación σ tal que $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 2$ y

$\sigma(4) = 1$, se nota, $(4,3,2,1)$. La permutación del vector $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector $\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ que se obtiene al permutar las coordenadas de x . El conjunto de permutaciones de Ω se nota por $\Gamma(\Omega)$. Se dice que una estructura de preferencia es simétrica entre criterios si la preferencia de la alternativa x sobre y no cambia cuando se aplica la misma permutación tanto a x como a y .

Definición 16 (Simetría entre criterios). *La estructura de preferencia (X, \succ) se dice simétrica entre criterios (EP SC) si para cualquier par de alternativas $x, y \in X$, y para cualquier permutación σ de elementos de Ω , se tiene que:*

$$x \succ y \Leftrightarrow \sigma(x) \succ \sigma(y). \quad (2.12)$$

Se introducen algunos conceptos adicionales sobre ventajas y desventajas para estructuras de preferencia simétricas entre criterios.

Definición 17 (Información contradictoria). *Sean (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencia, $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas.*

1. *Se dice que las alternativas x e y tienen evaluaciones contradictorias o que la información es contradictoria si la alternativa x tiene alguna ventaja sobre y , y recíprocamente, la alternativa y tiene alguna ventaja sobre x ; esto es, si $V(x, y) > 0$ y $V(y, x) > 0$.*
2. *La información contradictoria es equilibrada si $V(y, x) = \sigma(V(y, x))$ para alguna permutación $\sigma \in \Gamma(\Omega)$.*

Ejemplo 14. *Sean $x = (2,1,0,-3,4)$, $y = (-1,1,2,0,2)$. Se tiene que $V(x, y) = (3,0,-2,-3,2)$, $V(y, x) = (-3,0,2,3,-2)$.*

Se nota por ICE e $ICER$ los conjuntos de parejas de alternativas con información contradictoria equilibrada e información contradictoria equilibrada relevante respectivamente. Nótese que en una EPCr se tiene que $ICE = ICER$.

La no compensación T3 dice simplemente que la incomparabilidad está estrechamente asociada a la información contradictoria equilibrada. Específicamente, si la preferencia es NC T3, y si una pareja de alternativas es un elemento de $ICER$, las alternativas no son

comparables.

Definición 18 (EPNC T3). Sean (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencia, $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas cualesquiera. Se dice que la estructura de preferencia es no compensatoria T3 (EPNC T3) si:

$$(x, y) \in ICER \Rightarrow (x \phi y). \quad (2.13)$$

Ejemplo 15. La Tabla 6, al inicio de la Sección 2.2.1, valora las preferencias de ejemplo según la no compensación T2 y T3.

2.2.1. Independencia no compensación T2 y T3

Puesto la Tabla 6 muestra las 4 posibilidades (V-V, V-F, F-V, F-F), se concluye que las definiciones de no compensación T2 y T3 son independientes. Además, la Tabla 6 muestra que la no compensación T3 depende del tipo de estructura definida: en una estructura *I-P-J*, la preferencia \succ es no compensatoria T3; en una estructura *I-P*, la preferencia \succ no es no compensatoria T3.

Tabla 6: No compensación T2 y T3

Preferencia		Estructura	No compensación T2	No compensación T3
Orden mayor	\succ	$(\mathbb{R}^n, \geq) I-P-J$	V	V
		$(\mathbb{R}^n, \succ) I-P$	V	F
Índice lineal	\succ^{IL}	$(\mathbb{R}^n, \succ^{IL}) I-P-J$	F	V
		$(\mathbb{R}^n, \succ^{IL}) I-P$	F	F
No paretiana	\succ^*	$(\mathbb{R}^n, \succ^*) I-P-J$	F	V
		$(\mathbb{R}^n, \succ^*) I-P$	F	F
Semiorden mayor	\succ^c	$(\mathbb{R}^n, \succ^c) I-P-J$	V	V
		$(\mathbb{R}^n, \succ^c) I-P$	V	F
Sinérgica	\succ^s	$(\mathbb{R}^n, \succ^s) I-P-J$	V	V
		$(\mathbb{R}^n, \succ^s) I-P$	V	F

Téngase en cuenta que la Definición 18, de no compensación T3, no aplica para el orden lexicográfico, pues no es simétrico entre criterios.

Capítulo 3

Preferencias compensatorias

En principio, la compensación es la negación de la no compensación. Bouyssou (1986) aplica este concepto para la definición de las denominadas preferencias mínimamente compensatorias como aquellas que resultan de la negación lógica de la no compensación Fishburn.

En nuestro caso no se trabajará con preferencias mínimamente compensatorias. El punto importante es que en las proposiciones que resultan de la negación lógica de las preferencias no compensatorias T2b y T3, se puede realizar modificaciones que permitirán la construcción de las estructuras paramétricas.

En adelante, se seguirá asumiendo que las preferencias son fuertemente paretianas. En este caso, ya no se explicitará este supuesto. La implicación de esta condición es que una preferencia no compensatoria T2 es una preferencia no compensatoria T2b y viceversa. Será esta última definición la que se niegue. Además se trabajará sólo sobre estructuras de preferencia real $(\mathbb{R}^n, >)$, EPCr o EPsCr.

La negación de preferencia no compensatoria T2b es: existen dos alternativas $x, y \in \mathbb{R}^n$, un índice $i \in \Omega_p(x, y)$, un conjunto $\Lambda \subseteq \Omega \setminus \{i\}$, y un vector $t_\Lambda \in \mathbb{R}_+^n$ tal que:

$$(x > y) \wedge (y + t_\Lambda > x). \quad (3.1)$$

Esta expresión dice que, mediante una cierta mejora que excluye alguna de las ventajas de x sobre y , las desventajas de la alternativa y (desventajas que hacen que x sea preferida a y) pueden invertirse de tal manera que se llega a que $y + t_\Lambda$ sea preferida a x .

3.1. Preferencias compensatorias y parcialmente compensatorias T2

Las preferencias compensatorias y parcialmente compensatorias T2 serán preferencias que no satisfacen la condición de ser no compensatorias T2. Las preferencias compensatorias serán un subconjunto de las preferencias parcialmente compensatorias que cumplirán una cierta condición adicional.

Se introducirán dos tipos de compensación: ilimitada y limitada. La compensación limitada

busca expresar el concepto de capital crítico: la consideración de que hay funciones ambientales críticas que no pueden ser remplazadas por el capital artificial England (2000). Es decir, la compensación entre capital artificial y natural es limitada. Otro concepto que igualmente se trata de recoger es el que los sistemas ecológicos presentan alta resiliencia a impactos negativos de pequeña magnitud. Sin embargo, la resiliencia, es decir, la capacidad de auto regenerarse y regresar a su estado original pasado cierto tiempo, disminuye o se anula completamente frente a afectaciones negativas de gran magnitud.

Se dirá que la estructura de preferencia es parcialmente compensatoria ilimitada cuando la preferencia $x \succ y$ se pueda invertir mediante una mejora a la alternativa y que excluya alguna ventaja de x sobre y , a la alternativa y . Más aún, la mejora puede ser en un único criterio, en cualquier criterio diferente a aquel cuya ventaja se excluye. De manera simplificada se dirá que *cualquier desventaja puede ser compensada*.

Diremos que la estructura de preferencia es parcialmente compensatoria limitada cuando existe un umbral de compensación $\Delta_0 > 0$ tal que, cuando se da la preferencia $x \succ y$, ocurre que: las desventajas de y pueden ser compensadas si las desventajas de y sobre x son menores que el umbral de compensación; pero, si las desventajas son mayores que el umbral, no pueden ser compensadas. Se parafrasea diciendo que *solamente desventajas limitadas pueden ser compensadas*.

Se exigirá además que la preferencia \succ sea monótona. En una preferencia monótona la preferencia entre alternativas se mantiene frente a eventuales mejoras de la mejor alternativa. Esto es, si la alternativa x es preferida a y ; y, si x' es igual a o es una mejora de x , ocurre que x' también es preferida a y .

Definición 19 (EP PCI, EP PCL). Sean (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencia, e_j el j -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n , $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas cualesquiera. Decimos que la estructura de preferencia es parcialmente compensatoria T2.

1. *Ilimitada (EP PCI):* si para cualquier $i \in \Omega_p(x, y)$ y cualquier $j \neq i$, se tiene que:

$$(x \succ y) \Rightarrow \exists t > 0, (y + te_j \succ x). \quad (3.2)$$

2. *Limitada (EP PCL):* si existe un umbral de compensación $\Delta_0 > 0$ tal que si $x \succ y$ se tiene que:

(a) Si $\max V(x, y) < \Delta_0$, se cumple que: cualquiera que sea $i \in \Omega_P(x, y)$, cualquiera que sea $j \neq i$, se satisface:

$$\exists t > 0, y + te_j \succ x. \quad (3.3)$$

(b) Si $\min V(x, y) > \Delta_0$, se cumple que: cualquiera que sea $i \in \Omega_P(x, y)$, cualquiera que sea $\Lambda \subseteq \Omega \setminus \{i\}$, se satisface:

$$\forall t_\Lambda > 0, \neg(y + t_\Lambda \succ x). \quad (3.4)$$

Además se satisface que la preferencia \succ es monótona, esto es, para tres alternativas cualesquiera $x, x', y \in \mathbb{R}^n$

$$(x' \geq x) \wedge (x \succ y) \Rightarrow (x' \succ y). \quad (3.5)$$

Ejemplo 16. El índice lineal \succ^{IL} es una preferencia compensatoria T2 ilimitada. Digamos que $x \succ^{IL} y$. Se tiene que $\sum x_i > \sum y_i$ que implica que para algún i , $x_i > y_i$. Ahora para cualquier $j \neq i$, la compensación $t = \sum x_i - \sum y_i + 1$, satisface $y' = (y + te_j) \succ^{IL} x$. La monotonía se cumple pues si $x' \geq x$, $x \succ y$ se tiene que $\sum x'_i \geq \sum x_i > \sum y_i$.

La definición de monotonía del análisis multicriterio es distinta a la definición de monotonía de la microeconomía. En microeconomía se define: la preferencia débil \succcurlyeq es monótona si para cualesquiera canastas $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $x \gg y$ (esto es, $x_i > y_i$, para todo i) se cumple que $x \succ y$. La definición de monotonía permite diferenciar “bienes” de “males”. Los bienes son aquellos productos que satisfacen la monotonía y representan un beneficio para el consumidor.

3.1.1. Preferencias compensatorias T2

Para que una preferencia parcialmente compensatoria (ilimitada o limitada) sea compensatoria (ilimitada o limitada) se impone una condición adicional: que la preferencia sea fuertemente monótona. Esta condición dice que si la alternativa x es indiferente o no es comparable con y , se cumple que cualquier mejora de x es preferida a y .

Definición 20 (Monotonía fuerte). Sean (\mathbb{R}^n, \succ) una estructura de preferencias, y $x, x', y \in \mathbb{R}^n$ tres alternativas cualesquiera. Se dice que las preferencia \succ satisface la monotonía fuerte si $(x' > x) \wedge (x \sim y \vee x \phi y)$, se cumple que $x' > y$.

En la microeconomía también se define la monotonía fuerte diciendo que si la canasta x

tiene más cantidad de productos que la canasta y , entonces, la canasta y es preferida a x . Es decir, para $x, y \in \mathbb{R}^n$, si $x > y$, se cumple que $x \succ y$.

Las definiciones de monotonía fuerte del análisis multicriterio y de la microeconomía están relacionadas. En la microeconomía, la monotonía fuerte indica que el conjunto de canastas indiferentes a x , $I(x)$, no contiene una bola $B(x, r)$, $r > 0$. En \mathbb{R}^2 , la curva de indiferencia de la canasta x no contiene partes “sólidas”, es decir, es justamente una curva, y no una banda. En el análisis multicriterio, la monotonía fuerte dice que los conjuntos $I(x)$, de alternativas indiferentes a x , y $J(x)$, de alternativas no comparables a x , no contienen una bola $B(x, r)$, $r > 0$.

Definición 21 (EP CI, EP CL). *La estructura de preferencia (\mathbb{R}^n, \succ) parcialmente compensatoria (ilimitada o limitada T2) se dice compensatoria T2 si satisface la monotonía fuerte.*

Para énfasis, a una preferencia compensatoria se la puede denominar también preferencia totalmente compensatoria.

Ejemplo 17. *La preferencia índice lineal \succ^{IL} es (totalmente) compensatoria ilimitada T2 (ver ejemplo 2, figuras 3(a) y 3(b)).*

A las preferencias parcialmente compensatorias y compensatorias T2 (ilimitadas y limitadas) se las denominará también simplemente preferencias parcialmente compensatorias y compensatorias (ilimitadas o limitadas).

3.2. Preferencias compensatorias y parcialmente compensatorias T3

En esta sección se considera que (\mathbb{R}^n, \succ) es una estructura de preferencia simétrica entre criterios (EP SC).

La negación de preferencia no compensatoria T3 es la siguiente: existen dos alternativas $x, y \in \mathbb{R}^n$ con información contradictoria relevante tales que son comparables. De manera simbólica, $\exists(x, y) \in ICER \wedge \neg(x \phi y)$. Puesto que las ventajas y desventajas se equilibran (ambas alternativas tienen las mismas ventajas y desventajas), y los criterios reciben el mismo tratamiento, si x e y son comparables, $\neg(x \phi y)$, entonces no puede ocurrir que

$x \succ y$, ni que $y \succ x$. Por lo tanto, la única opción es que las alternativas sean indiferentes, de donde se concluye que la negación de preferencia no compensatoria T3 es: existe un par de alternativas $(x, y) \in ICER$ tales que $x \sim y$. En este caso diremos que la compensación T3 es parcial.

Además, sería deseable un comportamiento parsimonioso o monótono de la indiferencia, que se define como: si se parte de un par de alternativas indiferentes con información contradictoria equilibrada, y si las ventajas y desventajas disminuyen en magnitud, puesto que las alternativas tienden a la igualdad, entonces las alternativas seguirán siendo indiferentes. Lo anterior no excluye la posibilidad de que si las ventajas y desventajas incrementan en magnitud, las alternativas se vuelvan incomparables.

Nótese que en una estructura EP SC, las ventajas y desventajas del par de alternativas (z, w) tienen menor o igual magnitud que las ventajas y desventajas del par (x, y) si $V(z, w) \leq V(x, y)$.

Definición 22 (EP PC T3). *La estructura de preferencia simétrica entre criterios (\mathbb{R}^n, \succ) se dice que es parcialmente compensatoria T3 si existe una pareja de alternativas x, y con información contradictoria equilibrada relevante e indiferentes, y si la relación de indiferencia \sim es monótona. Esto es:*

$$\exists (x, y) \in ICER, (x \sim y) \wedge \forall (z, w) \in ICE, [V(z, w) \leq V(x, y)] \Rightarrow (z \sim w). \quad (3.6)$$

Si, adicionalmente para cualquier par $(x, y) \in ICE$ ocurre que $x \sim y$, se tiene que las ventajas y desventajas equilibradas de cualquier magnitud se anulan o compensan mutuamente. En esta circunstancia, se asumirá que se está en el caso compensatorio T3, denominado también caso totalmente compensatorio, para mayor énfasis.

Definición 23 (EP C T3) *La estructura de preferencia simétrica entre criterios (\mathbb{R}^n, \succ) parcialmente compensatoria T3 se dice compensatoria T3 (EPC T3) si para dos alternativas cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$:*

$$(x, y) \in ICE \Rightarrow (x \sim y). \quad (3.7)$$

Ejemplo 18. *La estructura de preferencia índice lineal estricto $(\mathbb{R}^n, \succ^{IL})$ es una estructura*

de preferencia totalmente compensatoria T3 (EPC T3) (ver Figura 3(a)). La estructura índice lineal débil $(\mathbb{R}^n, \succ^{LL})$ no es compensatoria, ni parcialmente compensatoria T3 (ver Figura 3(b)).

3.3. Estructuras de preferencia paramétrica

Las definiciones de preferencias no compensatorias, parcialmente compensatorias y compensatorias T2 se pueden agrupar para conformar el concepto de estructura de preferencia paramétrica no-compensatoria compensatoria o, por simplicidad, estructura de preferencia paramétrica. El parámetro de compensación $\alpha \in [0, 1]$, que también se lo puede denominar grado de compensación, indica que no hay compensación ($\alpha = 0$), o que la compensación es parcial ($\alpha \leq 1$), o que es total ($\alpha = 1$).

Definición 24 (EPP I, EPP L). Sea $(\mathbb{R}^n, \succ^\alpha)$ una estructura de preferencia donde la preferencia \succ^α depende de un parámetro real $\alpha \in [0, 1]$. Se dice que $(\mathbb{R}^n, \succ^\alpha)$ es una estructura de preferencia paramétrica (ilimitada - EPP I o limitada - EPP L) si la estructura de preferencia satisface:

1. Para $\alpha = 0$ es no compensatoria T2.
2. Para $\alpha \in [0, 1]$ es parcialmente compensatoria (ilimitada o limitada).
3. Para $\alpha = 1$ es compensatoria (ilimitada o limitada).
4. Las preferencias están encajadas, esto es, $P^\alpha \supset P^{\alpha'}$ para $\alpha > \alpha'$.

Hay una infinidad de familias de preferencias paramétricas. Por ejemplo, consideremos la preferencia débil \succ^α , $\alpha \in [0, 1]$, en \mathbb{R}^2 definida por: sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \succ^\alpha y \Leftrightarrow d = (x - y) \in A^\alpha \subset \mathbb{R}^2$, donde:

$$A^0 = \mathbb{R}_+^2, \quad (3.8)$$

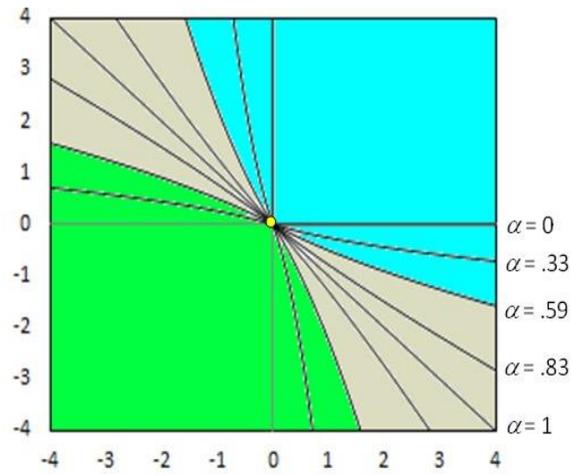
$$A^\alpha = B_1 \cup B_2 \cup \mathbb{R}_+^2, \alpha \in (0, 1], \quad (3.9)$$

$$B_1 = \{(d_1, d_2) \mid d_1 \in (-\infty, 1], d_2 \geq [1 + |d_1|]^{1/\alpha} - 1\}, \quad (3.10)$$

$$B_2 = \{(d_1, d_2) \mid d_2 \in (-\infty, 1], d_1 \geq [1 + |d_2|]^{1/\alpha} - 1\}. \quad (3.11)$$

Se tiene que $A^1 = \mathbb{S}_+^2$.

Figura 8: Estructura de preferencias paramétrica ilimitada



Las familias de preferencias paramétricas más importantes son las familias de preferencias cónicas y cuasi cónicas que se estudiarán en el Capítulo 4.

Capítulo 4

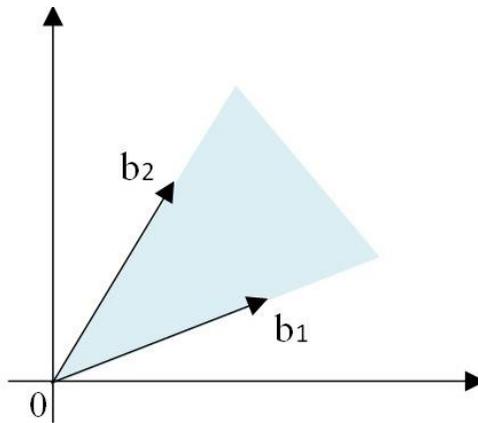
Preferencias cónicas y cuasi cónicas

4.1. Estructura de preferencia paramétrica ilimitada cónica

Una de las estructuras matemáticas más utilizadas en distintas áreas de la matemática y la economía son los conos. Los conos permiten combinar la estructura de espacio vectorial y el concepto de convexidad. En un espacio vectorial, un vector es una combinación lineal de los elementos de la base. En un cono, en cambio, un vector es una combinación lineal con escalares positivos de los elementos de la base del cono (combinación lineal convexa). Como se conoce, los vectores de la base de un espacio vectorial son linealmente independientes; los vectores de la base de un cono pueden ser linealmente dependientes.

Definición 25 (Cono). Sea $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto de vectores \mathbb{R}^n . El cono $\mathbb{C}_+^n(B)$ de base B es el conjunto $\mathbb{C}_+^n(B) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum \lambda_i b_i, b_i \in B, \lambda_i \geq 0\}$.

Figura 9: Cono de base $B = \{b_1, b_2\}$



Para otras propiedades de los conos ver Pomerol y Barba-Romero (2000) y Jahn (2011).

Trabajaremos con los conos $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$ de base $B(\alpha) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$, donde el i -ésimo vector de la base es $b_i = (-1/z, \dots, 1, \dots, -1/z)$, con $z = \varphi(\alpha) = (n-1)/\alpha$, para $0 < \alpha \leq 1$. De manera equivalente, $\alpha = \psi(z) = (n-1)/z$, para $z > 0$. Se tiene que $z = n-1 = \varphi(\alpha)$ si $\alpha = 1$, y que $\alpha = 1 = \varphi(z)$ si $z = n-1$. Para $\alpha = 0$, ponemos $b_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Nótese que si $\alpha \rightarrow 0$, $z \rightarrow \infty$, $1/z \rightarrow 0$, por lo que, por convención, se toma

$1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$, de modo que, se puede decir que $z = \infty = \varphi(\alpha)$ si $\alpha = 0$; y, $\alpha = 0 = \varphi(z)$ si $z = \infty$, es decir, $\varphi: [0,1] \rightarrow [n-1, \infty]$, $\psi = \varphi^{-1}: [n-1, \infty] \rightarrow [0,1]$.

La base $B(\alpha)$ expresada como matriz es:

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -1/z & \cdots & -1/z \\ -1/z & 1 & \cdots & -1/z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1/z & -1/z & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Caso $0 \leq \alpha < 1$. Para estos valores de α , los vectores de $B(\alpha)$ son linealmente independientes, es decir son una base del espacio vectorial \mathbb{R}^n . Para $\alpha = 0$ la base es $B(0) = \{e_1, \dots, e_n\}$, la base canónica, y el cono es $\mathbb{C}_+^n(0) = \mathbb{R}_+^n$, el ortante positivo.

Matriz de cambio de base

Puesto que $B(\alpha)$ es una base del espacio vectorial \mathbb{R}^n , cualquier $d \in \mathbb{R}^n$ se expresa como la combinación lineal de los elementos de la base: $d = \sum \lambda_i b_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. El vector d expresado en la base $B(\alpha)$ es $d_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

La matriz de cambio de base A , de la base canónica a la base $B(\alpha)$, es la matriz que satisface la condición $d_B = Ad$, y es igual a la matriz $B(\alpha)^{-1}$:

$$B(\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

donde $a = \frac{z(z-n+2)}{z(z-n+2)-(n-1)}$, $b = \frac{z}{z(z-n+2)-(n-1)}$.

Nótese que $a/b = (z-n+2) \geq 1$.

Ejemplo 19. Para $n = 2, 3$ y $\alpha = 0,5$ las matrices B y B^{-1} son las siguientes:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1,333 & 0,667 \\ 0,667 & 1,333 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 1 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 0,4 & 1,2 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Caso $\alpha = 1$. Los vectores de la base $B(1)$ son linealmente dependientes y el cono $\mathbb{C}_+^n(1)$ es igual a H , el hiperplano ortogonal a $v = (1,1, \dots, 1)$, el vector bisectriz de \mathbb{R}_+^n . En este caso, se define la base del cono por $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, v\}$, y se tiene que $\mathbb{C}_+^n(1) = \mathbb{S}_+^n$, el semiespacio positivo. Entonces, para $0 \leq \alpha \leq 1$, se tiene que $\mathbb{C}_+^n(0) = \mathbb{R}_+^n \subseteq \mathbb{C}_+^n(\alpha) \subseteq \mathbb{S}_+^n = \mathbb{C}_+^n(1)$. Además, para $0 \leq \alpha' < \alpha \leq 1$, los conos están encajados: $\mathbb{C}_+^n(\alpha) \supset \mathbb{C}_+^n(\alpha')$.

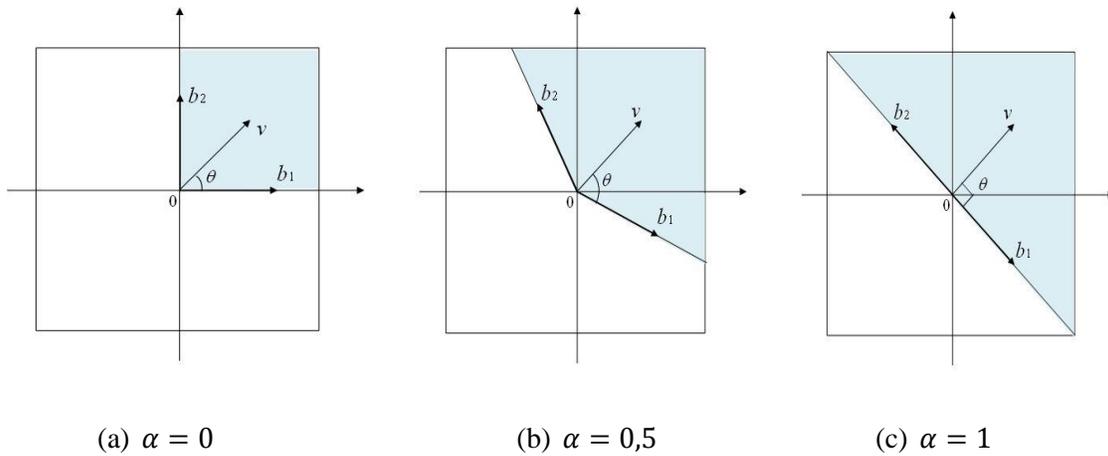
Apertura entre vectores de la base. El parámetro α también determina la apertura de los vectores de la base del cono. La apertura se mide mediante el ángulo θ formado por cualquiera de los vectores b_i de la base y el vector v , y se cumple que:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(1-\alpha)\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n-1+\alpha^2)}}\right), \quad (4.5)$$

de donde se deduce que si la compensación α se incrementa, la apertura θ también crece.

La Figura 10 muestra los conos en \mathbb{R}^2 para $\alpha = 0; 0,5; 1$.

Figura 10: Cono $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$



La Tabla 7 muestra la relación entre α y θ para $n = 2,3$ y 4 .

Tabla 7: Relación entre α y θ

α	θ		
	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
0	45°	54,7°	60°
0,25	59,0°	64,8°	68,2°
0,50	71,6°	74,2°	76,1°
0,75	81,9°	82,7°	83,4°
1	90°	90°	90°

Orden cónico débil. Para un valor dado de α , el orden cónico débil se define por: x es débilmente preferido a y siempre que el vector diferencia $d = x - y$ pertenezca al cono $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$. Esto nos lleva a la Definición 26.

Definición 26 (Preferencia cónica). Sean $\alpha \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas, $d = x - y$ el vector diferencia, $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$ el cono de base $B(\alpha)$. La estructura de preferencia paramétrica cónica es la estructura (\mathbb{R}^n, \succsim) , donde \succsim se define por:

$$x \succsim y \Leftrightarrow d = (x - y) \in \mathbb{C}_+^n(\alpha). \quad (4.6)$$

La estructura de preferencia paramétrica ilimitada (EPP I) es la estructura I - P - J determinada por la estructura de preferencia cónica (\mathbb{R}^n, \succsim) .

Para $\alpha \in [0, 1[$, la condición $d \in \mathbb{C}_+^n(\alpha)$ es equivalente a $d = \sum \lambda_i b_i$, $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in \Omega$, que es equivalente a $d_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \geq 0$. Además, se tiene que $\mathbb{C}_+^n(0) = \mathbb{R}_+^n$. Por otra parte, $\mathbb{C}_+^n(1) = \mathbb{S}_+^n$. De esta última igualdad se deduce que la condición $d \in \mathbb{C}_+^n(1)$ es equivalente a $\sum d_i \geq 0$. Las condiciones anteriores permiten expresar el modelo paramétrico cónico de varias maneras equivalentes, tal como se muestra en las tablas 8, 9 y 10.

Tabla 8: $\alpha = 0$. Modelo no compensatorio

Relación	Condición sobre d	Condición sobre d	Condición sobre x e y
$x \succcurlyeq y$	$d \in \mathbb{R}_+^n$	$d \geq 0$	$x \geq y$
$x \succ y$	$d \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$	$d > 0$	$x > y$
$x \sim y$	$d \in \{0\}$	$d = 0$	$x = y$
$x \not\phi y$	$d \notin \mathbb{R}_+^n \cup \mathbb{R}_-^n$	$\exists i, j, d_i < 0, d_j > 0$	$\exists i, j, x_i < y_i, y_j > x_j$

El modelo cónico de parámetro $\alpha = 0$, $(\mathbb{R}^n, \succcurlyeq)$, es el orden mayor o igual (\mathbb{R}^n, \geq) .

Tabla 9: $0 < \alpha < 1$. Modelo parcialmente compensatorio ilimitado

Relación	Condición sobre d	Condición sobre d	Condición sobre x e y
$x \succcurlyeq y$	$d \in \mathbb{C}_+^n(\alpha)$	$d_B \in \mathbb{R}_+^n$	$d_B \geq 0$
$x \succ y$	$d \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \setminus \{0\}$	$d_B \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$	$d_B > 0$
$x \sim y$	$d \in \{0\}$	$d_B \in \{0\}$	$d_B = 0$
$x \not\phi y$	$d \notin \mathbb{C}_+^n(\alpha) \cup \mathbb{C}_-^n(\alpha)$	$d_B \notin \mathbb{R}_+^n \cup \mathbb{R}_-^n$	$\exists i, j, d_{Bi} < 0, d_{Bj} > 0$

Tabla 10: $\alpha = 1$. Modelo compensatorio ilimitado

Relación	Condición sobre d	Condición sobre d	Condición sobre x e y
$x \succcurlyeq y$	$d \in \mathbb{S}_+^n$	$\sum d_i \geq 0$	$\sum x_i \geq \sum y_i$
$x \succ y$	$d \in \mathbb{S}_+^n \setminus H$	$\sum d_i > 0$	$\sum x_i > \sum y_i$
$x \sim y$	$d \in H$	$\sum d_i = 0$	$\sum x_i = \sum y_i$

El modelo cónico de parámetro $\alpha = 1$, $(\mathbb{R}^n, \succcurlyeq)$, es el índice lineal $(\mathbb{R}^n, >^{IL})$ que define el funcional lineal, $I(x) = \sum x_i$.

Valoración de la compensación. Para $\alpha = 0$, ninguna desventaja relevante se puede compensar. Para $0 < \alpha < 1$, una desventaja de 1 unidad en un criterio se compensa con una ventaja de $t = z - n + 2$ unidades en otro criterio. Y, si $\alpha = 1$, la desventaja de una unidad se compensa con una ventaja de $t = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ unidades y se balancea con una ventaja de $t = 1$ unidades.

Para valorar la compensación a una desventaja de 1 unidad, consideremos el vector $y - x = d = (-1, t, 0, \dots, 0)$, que indica que la desventaja en una unidad en el primer criterio se compensa con t unidades en el segundo criterio.

Para $0 < \alpha < 1$, la condición $y \succ x$ es equivalente a $B^{-1}d = (-a + bt, -b + at, -b + bt, \dots, -b + bt) > 0$. Por tanto debe cumplirse que, $t \geq a/b$, $t \geq b/a$, y $t \geq 1$, con alguna de las condiciones estrictamente positiva. Como $a > b$, los requerimientos se satisfacen si $t = a/b = z - n + 2$; lo que concluye el cálculo. En el caso del índice lineal ($\alpha = 1$), la condición es $d \in S_+^n \setminus H$, equivalente a $\sum d_i = -1 + t > 0$, de donde se obtiene que $t = 1 + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$.

4.2. Estructura de preferencia paramétrica limitada cuasi cónica

La estructura paramétrica limitada es la estructura de preferencia paramétrica cuasi cónica. Antes de definirla, veremos previamente el concepto de funciones de credibilidad.

Una función de credibilidad real con umbral de indiferencia es una función que indica si la diferencia entre dos valores es relevante o importante, o si es irrelevante o no importante.

Por ejemplo, si deseamos comprar un automóvil y comparamos dos autos de precios, digamos \$20.000 y \$20.200, estaremos de acuerdo que una diferencia de \$200 en el precio es pequeña y que nuestra decisión se basará en otros criterios; pero si la diferencia es, por ejemplo, \$2.000, seguramente consideraremos esta diferencia importante y el precio será un factor a tomar en cuenta al momento de la decisión.

Hay dos maneras de formalizar esta situación. La primera es con una función de credibilidad discreta de umbral $c > 0$. Aquí simplemente se dice que si x e y son dos números reales, entonces, si $|x - y| \leq c$, la diferencia entre x e y no es importante y podemos considerar a estas magnitudes similares o indiferentes; pero si $|x - y| > c$, se considera que la diferencia es importante y que, por tanto, uno de los valores es mayor al otro. Una segunda posibilidad es introducir una función de credibilidad difusa. En una función de este tipo se asigna un valor de credibilidad a la condición $x > y$. La credibilidad es un valor en el intervalo $[0, 1]$. El valor 0 indica que la proposición $x > y$ es absolutamente no creíble, en tanto que el valor 1 indica credibilidad absoluta y total en $x > y$.

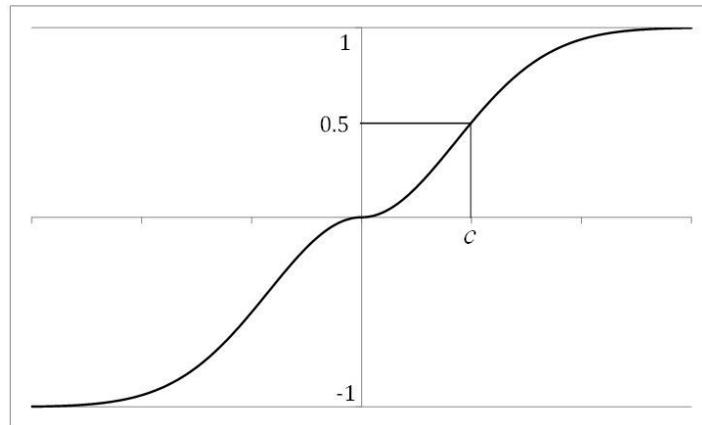
Específicamente, si h es la función de credibilidad, x, y son dos números reales y $d = x - y$ es la diferencia, se tiene que si $d > 0$, $h(d)$ es el grado de credibilidad de $d > 0$ (de $x > y$ o de $x \succ y$, puesto que se está asumiendo que el objetivo de los criterios es de maximización); cuando $d < 0$, $-h(d)$ es la credibilidad de $d < 0$ (de $y > x$ o de $y \succ x$); en tanto que $1 - |h(d)|$ es la credibilidad de $d = 0$ (de $x = y$ o de $x \sim y$). El umbral de indiferencia marca el límite entre la indiferencia y la preferencia estricta. Por esta razón se exige que $h(c) = 0,5$. De manera formal:

Definición 27 (Función de credibilidad real). Sea $d \in \mathbb{R}$. Una función de credibilidad real o un criterio difuso de umbral de indiferencia $c > 0$ es una función $h: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$, que cumple las condiciones $h(0) = 0$, h es creciente, h es impar $h(-d) = -h(d)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$, $h(c) = 1/2$.

Ejemplo 20. Sea $s(d)$ la función signo: $s(0) = 0$, $s(d) = d/|d|, d \neq 0$. Consideremos la función de credibilidad (ver Figura 20):

$$h(d) = s(d) \frac{(d/c)^2}{1+(d/c)^2} \quad (4.7)$$

Figura 11: Criterio difuso



Otra posible función es la variante del “criterio gaussiano” del método PROMETHEE (Brans y Mareschal 2005):

$$h(d) = s(d) \exp(-\ln(2)(d/c)^2) \quad (4.8)$$

Si $|d| < c$, se cumple que $|h(d)| < 0,5$ y, en consecuencia, el grado de indiferencia es

mayor a 0,5. Por el contrario, cuando $|d| > c$, se cumple que $|h(d)| > 0,5$ y, el grado de preferencia es mayor que 0,5.

La función de credibilidad real se extiende al caso vectorial. Sean $d \in \mathbb{R}^n$ un vector, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_{++}$ el vector de umbrales de indiferencia y $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ las funciones de credibilidad real de umbral $c_i > 0$, respectivamente. La función de credibilidad vectorial $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ se define por:

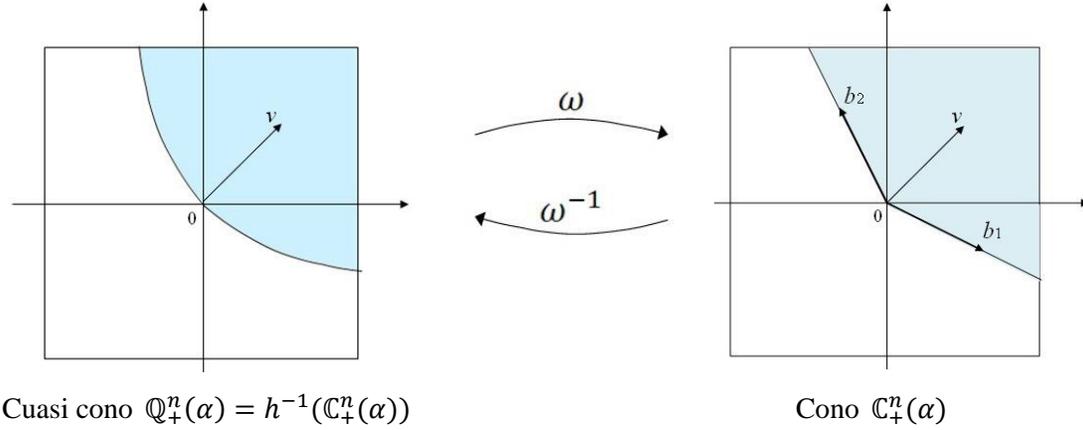
$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^n &\rightarrow [-1, 1]^n \\ d &\mapsto r = h(d) = (h_1(d_1), h_2(d_2), \dots, h_n(d_n)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

La función de credibilidad vectorial también puede ser vista como la normalización de las coordenadas del vector diferencia $d = x - y$. Esto es, poner todas las coordenadas de d en una misma escala, el intervalo $[-1, 1]$. También diremos que h “transforma el espacio d ” en el “espacio r ”.

Para mantener la simetría entre criterios, se requiere que los umbrales de indiferencias sean iguales. Tomaremos $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (1, 1, \dots, 1)$. En la Sección 4.4, preferencias en semicriterios, se mostrará que esto es siempre posible. La función de credibilidad vectorial h de umbrales $c_i = 1$ se denomina función de credibilidad vectorial estándar.

Para un valor dado de α , el orden cuasi cónico débil se define por: $x \succcurlyeq y$ siempre que el vector diferencia $r = h(d) = h(x - y)$ pertenezca al cono $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$. Esta condición es equivalente a que $d = h^{-1}(r)$ pertenezca al conjunto $h^{-1}(\mathbb{C}_+^n(\alpha))$, la preimagen del cono. A este conjunto lo denominamos cuasi cono, y se nota por $\mathbb{Q}_+^n(\alpha)$.

Figura 12: Preferencia cuasi cónica



Definición 28 (Preferencia cuasi cónica). Sean $\alpha \in [0,1]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas; $d = x - y$ el vector diferencia, $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$ el cono de base $B(\alpha)$, h la función de credibilidad vectorial estándar de umbrales de indiferencia $c_i = 1$, $\mathbb{Q}_+^n(\alpha) = h^{-1}(\mathbb{C}_+^n(\alpha))$ el cuasi cono. La estructura de preferencia paramétrica cuasi cónica es la estructura (\mathbb{R}^n, \succsim) donde \succsim se define por:

$$x \succsim y \Leftrightarrow r = h(d) \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \Leftrightarrow d \in \mathbb{Q}_+^n(\alpha). \quad (4.10)$$

La estructura de preferencia paramétrica limitada (EPP L) es la estructura I - P - J determinada por la estructura de preferencia cuasi cónica (\mathbb{R}^n, \succsim) .

Con las mismas consideraciones que en la Sección 4.1, el modelo paramétrico cuasi cónico puede expresarse de varias maneras equivalentes (tablas 11, 12 y 13):

Tabla 11: $\alpha = 0$. Modelo no compensatorio

Relación	Condición sobre r	Condición sobre r	Condición sobre d	Condición sobre x e y
$x \succsim y$	$r \in \mathbb{R}_+^n$	$r \geq 0$	$d \geq 0$	$x \geq y$
$x > y$	$r \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$	$r > 0$	$d > 0$	$x > y$
$x \sim y$	$r \in \{0\}$	$r = 0$	$d = 0$	$x = y$
$x \not\sim y$	$r \notin \mathbb{R}_+^n \cup \mathbb{R}_-^n$	$\exists i, j, r_i < 0, r_j > 0$	$\exists i, j, d_i < 0, d_j > 0$	$\exists i, j, x_i < y_i, y_j > x_j$

El modelo cuasi cónico de parámetro $\alpha = 0$, (\mathbb{R}^n, \succsim) , es el orden mayor o igual (\mathbb{R}^n, \geq) .

Los modelos cónico y cuasi cónico son iguales.

Tabla 12: $0 < \alpha < 1$. Modelo parcialmente compensatorio limitado

Relación	Condición sobre r	Condición sobre d	Condición sobre r_B	Condición sobre r_B
$x \succcurlyeq y$	$r \in \mathbb{C}_+^n(\alpha)$	$d \in \mathbb{Q}_+^n(\alpha)$	$r_B \in \mathbb{R}_+^n$	$r_B \geq 0$
$x \succ y$	$r \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \setminus \{0\}$	$d \in \mathbb{Q}_+^n(\alpha) \setminus \{0\}$	$r_B \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$	$r_B > 0$
$x \sim y$	$r \in \{0\}$	$d \in \{0\}$	$r_B \in \{0\}$	$r_B = 0$
$x \not\phi y$	$r \notin \mathbb{C}_+^n(\alpha) \cup \mathbb{C}_-^n(\alpha)$	$d \notin \mathbb{Q}_+^n(\alpha) \cup \mathbb{Q}_-^n(\alpha)$	$r_B \notin \mathbb{R}_+^n \cup \mathbb{R}_-^n$	$\exists i, j, r_{Bi} < 0, r_{Bj} > 0$

En el modelo cuasi cónico de parámetro $\alpha = 1$, para $n = 2$, la condición $\sum r_i > 0$ es equivalente a $\sum d_i > 0$. El modelo cuasi cónico es el índice lineal, $(\mathbb{R}^2, \succ^{IL})$, que define el funcional lineal $I(x) = \sum x_i$. Para $n \geq 3$, el modelo cuasi cónico es lineal en el espacio r ($x \succ y$ si $\sum r_i > 0$); pero, no es lineal en el espacio d ($x \succ y$ si $\sum d_i^2 / (1 + d_i^2) > 0$).

Tabla 13: $\alpha = 1$. Modelo compensatorio limitado

Relación	Condición sobre r	Condición sobre d	Condición sobre r_B
$x \succcurlyeq y$	$r \in \mathbb{S}_+^n$	$\sum r_i \geq 0$	$\sum d_i^2 / (1 + d_i^2) \geq 0$
$x \succ y$	$r \in \mathbb{S}_+^n \setminus H$	$\sum r_i > 0$	$\sum d_i^2 / (1 + d_i^2) > 0$
$x \sim y$	$r \in H$	$\sum r_i = 0$	$\sum d_i^2 / (1 + d_i^2) = 0$

Nótese que los modelos son simétricos entre criterios.

Valoración de la compensación. Para $\alpha = 0$, ninguna desventaja se puede compensar. Para $0 < \alpha < 1$, en el origen, la desventaja marginal de una unidad en un criterio se compensa con una ventaja de $t = \sqrt{z - n + 2}$ unidades en otro criterio. Además, la compensación marginal es creciente. Para $\alpha = 1$, la desventaja marginal de una unidad se balancea con una ventaja de $t = 1$ unidades.

El procedimiento de cálculo de la compensación se explica a continuación. Para $0 < \alpha < 1$,

sea $k = z - n + 2$, puesto que en el modelo cónico la compensación es k , se tiene entonces que en el espacio r , $r_2 = -kr_1$. Por otra parte, $r_i = d_i^2/(1 + d_i^2)$, de donde se llega a:

$$d_2 = -\frac{\sqrt{k}d_1}{\sqrt{1-(k-1)d_1^2}}, \quad (4.11)$$

que al derivar se obtiene que $\partial d_2/\partial d_1 = -\sqrt{k}$.

Para $\alpha = 1$, puesto que para el cálculo de la compensación se toma el vector $d = (-1, t, 0, \dots, 0)$, la condición $\sum r_i > 0$ es equivalente a $\sum d_i > 0$, de donde se obtiene el resultado.

Por otra parte, en el espacio r , dado que $b_1 = (-1/z, -1/z, \dots, -1/z, 1) \in B(\alpha)$, se tiene que cualquier desventaja tal que el $\min h_i(V_i(x, y))$ sea inferior a $1/z$ podrá ser compensada. De donde se concluye que el umbral de compensación Δ_0 es igual a $\Delta_0 = h^{-1}(1/z) = \sqrt{1/(z-1)}$.

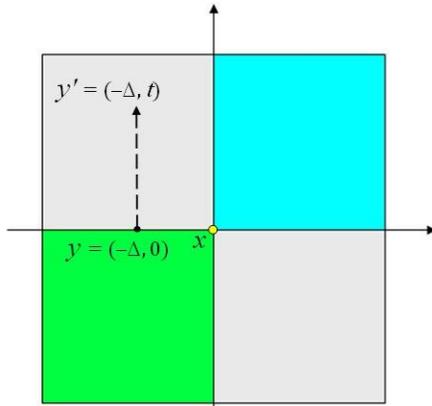
El marco conceptual actual establece las definiciones de no compensación T2 y T2b, complementarias a la de no compensación de Fishburn, el cual ha permitido fundamentar la construcción de las estructuras de preferencia paramétrica ilimitada y limitada con un sentido preciso para el parámetro de compensación. La compensación y la no compensación T2 se asocian con la inversión y no inversión de la preferencia, respectivamente.

4.2.1. Representaciones gráficas de los modelos cónicos

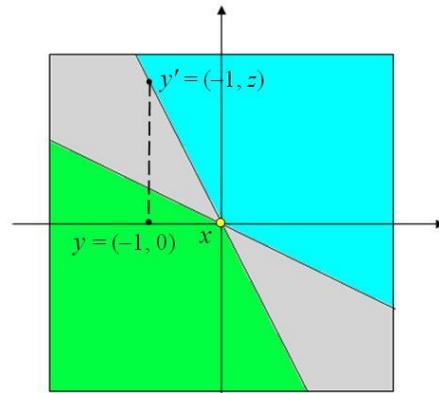
En la representación gráfica de los modelos cónicos⁹ en el plano \mathbb{R}^2 , la alternativa x se ubica en el origen; la alternativa y en el eje horizontal izquierdo, lo que implica que x tiene una ventaja sobre y en el primer criterio; y, la alternativa compensada $y' = y + te_2$, se coloca sobre la prolongación vertical de la alternativa y . Las figuras 13(a)–13(d) muestran las representaciones gráficas de los modelos cónicos.

⁹ Para una redacción más clara, el adjetivo cónico expresará cónico y cuasi cónico.

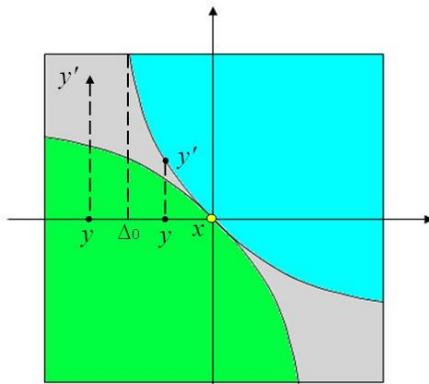
Figura 13: Modelos cónicos



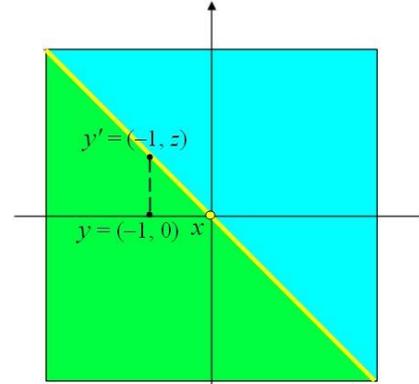
(a) No compensatorio, $\alpha = 0$
(cónico y cuasi cónico)



(b) Parcialmente compensatorio ilimitado,
 $0 < \alpha < 1$ (cónico)



(c) Parcialmente compensatorio limitado,
 $0 < \alpha < 1$ (cuasi cónico)



(d) Compensatorio, $\alpha = 1$
(cónico y cuasi cónico)

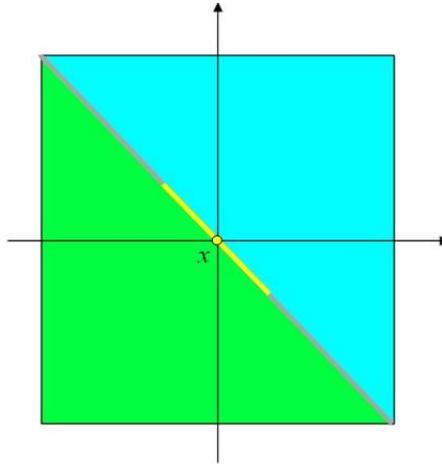
4.3 Preferencias cónicas y no compensación y compensación T3

Los modelos no compensatorio y parcialmente compensatorio limitado e ilimitado son estructuras $I-P-J$; es decir, son no compensatorios T3. En particular, si $(x, y) \in ICER$, entonces $x \not\phi y$. La incomparabilidad es consecuencia de la presencia de información contradictoria equilibrada. Sin embargo, estos modelos se pueden definir como estructuras $I-P$ y obtener modelos compensatorios T3. Basta con considerar la preferencia cónica estricta ($x \succ y \Leftrightarrow d \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \setminus \{0\}$), y la cuasi cónica ($x \succ y \Leftrightarrow r \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \setminus \{0\}$), como preferencia inicial. Ahora ocurre que si $(x, y) \in ICER$, entonces $x \sim y$. Esto es, cuando las ventajas y desventajas se igualan o equiparan, la relación entre las alternativas es de

indiferencia.

Por otra parte, los modelos compensatorio limitado e ilimitado son estructuras $I-P$ y, por tanto, compensatorios T3 ($(x, y) \in ICER \Rightarrow x \sim y$). Estos modelos se pueden definir como estructuras $I-P-J$, y obtener modelos no compensatorios T3. Para lograr esto, se debe tomar las preferencias débiles cónica ($x \succcurlyeq y \Leftrightarrow d \in (\mathbb{S}_+^n \setminus H) \cup \{0\}$) y cuasi cónica ($x \succcurlyeq y \Leftrightarrow r \in (\mathbb{S}_+^n \setminus H) \cup \{0\}$) como preferencia de partida. En este caso, se tendrá que si $x, y \in ICER$ entonces, $x \not\phi y$.

Figura 14: $\alpha = 1$. Modelo compensatorio T2 y parcialmente compensatorio T3



También pueden realizarse construcciones para obtener modelos parcialmente compensatorios T3. Por ejemplo, en el índice lineal se puede definir $R(y) = y + (\mathbb{S}_+^n \setminus H) \cup (H \cap \overline{B}(0, \delta))$, y se tiene que la estructura $I-P-J$ viene determinada por:

$$I(y) = y + H \cap \overline{B}(0, \delta), P(y) = y + \mathbb{S}_+^n \setminus H, J(y) = y + H \setminus \overline{B}(0, \delta). \quad (4.12)$$

Esta estructura de preferencia es parcialmente compensatoria T3, pero no es totalmente compensatoria (ver Figura 14).

Esta sección muestra que las definiciones de compensación no compensación T2 y compensación no compensación T3 son independientes. La compensación no compensación T3 se relaciona con el balance de las ventajas y desventajas, y con la indiferencia y la incomparabilidad de las alternativas como consecuencia de información contradictoria,

respectivamente.

4.4. Preferencias en semicriterios

Para definir estructuras de preferencia en semicriterios, es decir, modelos con umbrales de indiferencia, se procede como sigue:

Considérese que están dados: una alternativa cualquiera $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y el conjunto de umbrales de indiferencia de los n criterios $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, con $c_i > 0$, donde las coordenadas de la alternativa y los umbrales de los criterios están expresados en una misma unidad de medida.

Denótese por $x' \in \mathbb{R}^n$ al vector cuyas coordenadas se obtienen al dividir cada coordenada de x por su umbral de indiferencia, $x' = (x_1/c_1, x_2/c_2, \dots, x_n/c_n)$. La unidad de medida de la i -ésima coordenada de la alternativa x' es el i -ésimo umbral de indiferencia $[ui_i]$. Estas nuevas unidades son en principio no comparables.

Por ejemplo, supongamos que los criterios son el PIB per cápita, medido en dólares \$, y las emisiones de CO₂ per cápita, medidas en toneladas t . Digamos que $x = (8000 [\text{\$}], 2 [\text{t}])$ y que $c_1 = 1000 [\text{\$}]$, $c_2 = 0,5 [\text{t}]$. Entonces,

$$x' = \left(8000 [\text{\$}] \times \frac{[ui_1]}{1000 [\text{\$}]}, 2 \text{ t} \times \frac{[ui_2]}{0,5 [\text{t}]} \right) = (8 [ui_1], 4 [ui_2]). \quad (4.13)$$

En las nuevas unidades, los umbrales de indiferencia son $c_i = 1$. Por otra parte, para cualquier $\varepsilon > 0$, $(8 + (1 + \varepsilon), 4) \succ (8, 4)$ y $(8, 4 + (1 + \varepsilon)) \succ (8, 4)$ (ver Observación 2).

En el caso general se tiene que $(x'_i + (1 + \varepsilon), x'_{-i}) \succ (x'_i, x'_{-i})$ para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $i \in \Omega$. Los distintos umbrales de indiferencia comparten como característica común que una mejora de $(1 + \varepsilon)$ unidades en cualquier criterio hace que la alternativa mejorada sea preferida a la alternativa inicial. Esto permite eliminar el subíndice de la unidad de medida $[ui_i]$ y expresar las coordenadas de x' en una única unidad $[ui]$. Siendo este el caso, diremos que la alternativa x' está expresada en escalas comparables.

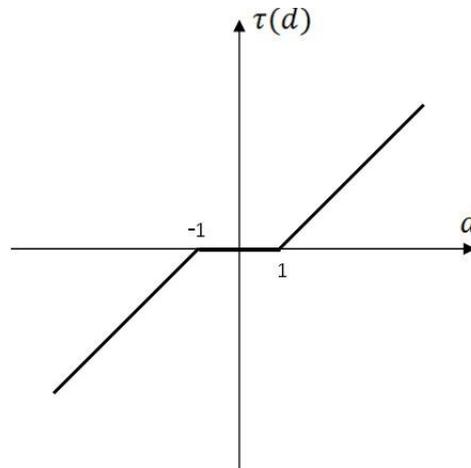
Cuando las alternativas se expresan en escalas comparables, los umbrales de indiferencia

son iguales a 1 y los valores de las coordenadas de x' son invariantes a los cambios en las unidades de medida. Además, la función de credibilidad vectorial h que se aplica a un vector cualquiera es la función de credibilidad estándar.

4.4.1. Transformación semicriterio-criterio

Para definir los modelos en semicriterios, introducimos una función vectorial que permite transformar una EPsCr en una EPCr, es decir, una estructura de preferencia en semicriterios en una estructura de preferencia en criterios.

Figura 15: Transformación semicriterio-criterio



Primero introducimos la función real, denominada función de transformación de semicriterio a criterio, $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d \rightarrow d' = \tau_1(d)$, que se define por (Figura 15):

$$d' = \tau_1(d) = \begin{cases} d - 1 & \text{si } d > 1 \\ 0 & \text{si } |d| \leq 1 \\ d + 1 & \text{si } d < -1 \end{cases} \quad (4.14)$$

La función real se extiende al caso vectorial mediante la función $\tau = (\tau_1, \tau_1, \dots, \tau_1)$, que se define por:

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ d &\mapsto d' = \tau(d) = (\tau_1(d_1), \tau_1(d_2), \dots, \tau_1(d_n)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.4.2. Preferencias cónicas en semicriterios

Las preferencias cónicas en semicriterios se determinan con la ayuda del cono y cuasi cono en semicriterios que son la preimagen por τ^{-1} del cono y cuasi cono en semicriterios respectivo. El cono en semicriterios se define y nota por, ${}_{\tau^{-1}}\mathbb{C}_+^n(\alpha) = \tau^{-1}(\mathbb{C}_+^n(\alpha))$, en tanto que el cuasi cono en semicriterios se define y nota por, ${}_{\tau^{-1}}\mathbb{Q}_+^n(\alpha) = \tau^{-1}(\mathbb{Q}_+^n(\alpha))$.

Figura 16: Preferencia cónica

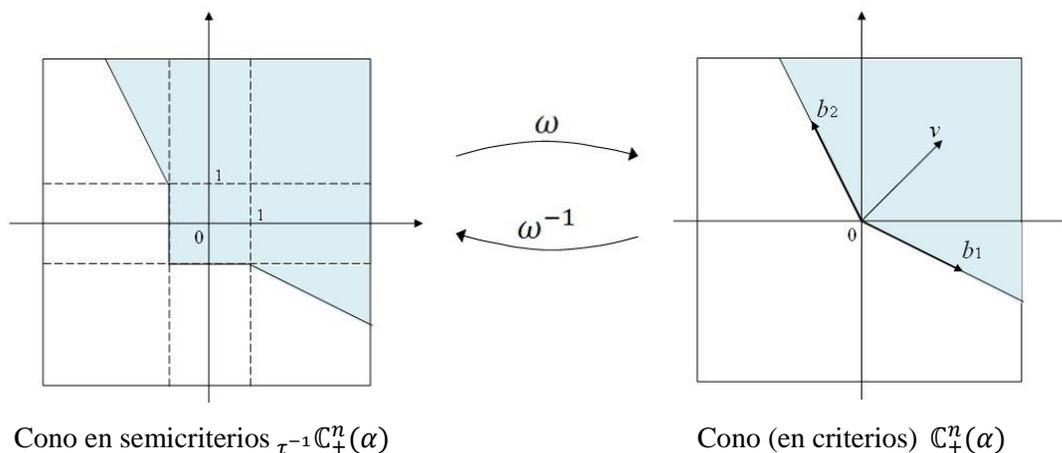
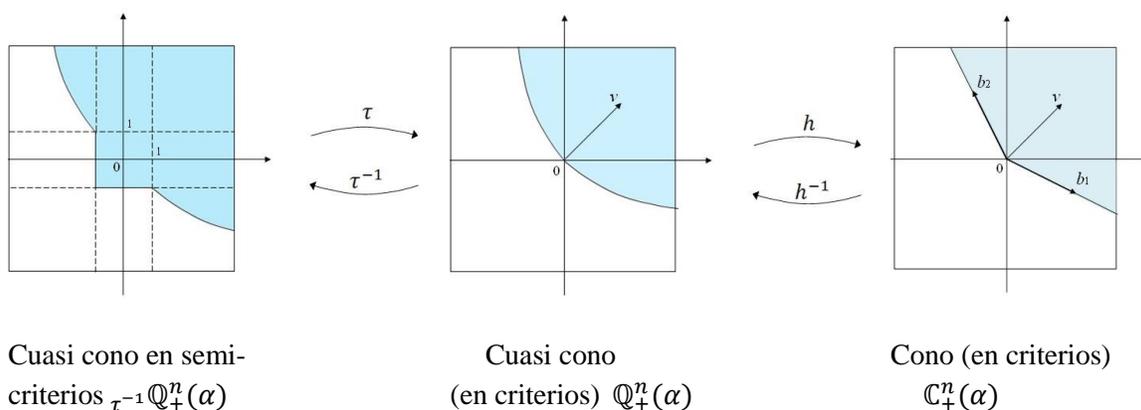


Figura 17: Preferencia cuasi cónica



Definición 29 (Preferencias cónicas en semicriterios). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas en escalas comparables calculadas a partir del vector de umbrales de indiferencia, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, con $c_i > 0$; h , la función de credibilidad vectorial estándar; $d = x - y$ el vector diferencia, τ la transformación semicriterio-criterio, $d' = \tau(d)$ el vector diferencia transformado (a un vector en criterios). La preferencia cónica débil en semicriterios \succcurlyeq se

define por:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow d' = \tau(d) \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \Leftrightarrow d \in {}_{\tau^{-1}}\mathbb{C}_+^n(\alpha). \quad (4.16)$$

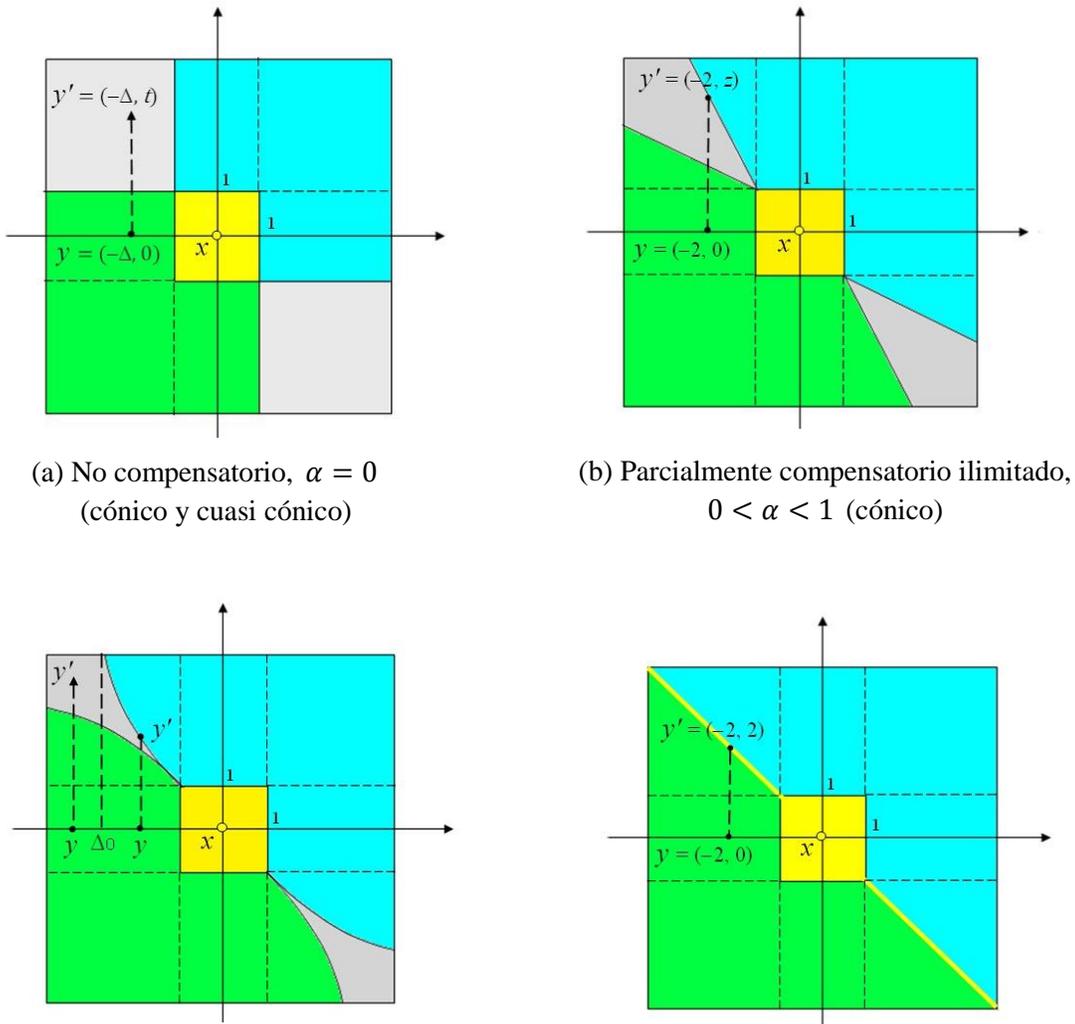
La preferencia cuasi cónica débil en semicriterios \succcurlyeq se define por:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow r = h(d') \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \Leftrightarrow d \in {}_{\tau^{-1}}\mathbb{Q}_+^n(\alpha). \quad (4.17)$$

Las figuras 16 y 17 muestran el cono y cuasi cono en semicriterios.

Los modelos cónicos en semicriterios son las estructuras I - P - J definidas a partir de estructuras de preferencias cónicas en semicriterios $(\mathbb{R}, \succcurlyeq)$. Su representación gráfica es la Figura 18.

Figura 18: Modelos cónicos en semicriterios



- (c) Parcialmente compensatorio limitado, $0 < \alpha < 1$ (cuasi cónico) (d) Compensatorio, $\alpha = 1$ (cónico y cuasi cónico)

Las representaciones gráficas de los modelos en semicriterios de la Figura 18, se obtienen de los gráficos de los modelos cónicos mediante la expansión de los ejes a rectángulos de 2 unidades de ancho; y, la expansión del punto origen al cuadrado unidad.

Si $\alpha = 0$, la estructura cónica en semicriterios (\mathbb{R}^n, \succ) es el orden semiorden mayor o igual (\mathbb{R}^n, \geq^c) de umbrales de indiferencia $c_i = 1$ (modelo no compensatorio T2). La estructura cuasi cónica en semicriterios coincide con la estructura cónica en semicriterios. Ninguna desventaja relevante se puede compensar.

Si $0 < \alpha < 1$. El modelo cónico en semicriterios es parcialmente compensatorio. Cualquier desventaja relevante se puede compensar. Una desventaja de $2 = 1 + 1$ unidades se compensa con una ventaja de $t = (z + n - 2) + 1$ unidades. Para $\alpha = 1$, la desventaja de $2 = 1 + 1$ unidades se compensa con una ventaja de $t = (1 + \varepsilon) + 1$, $\varepsilon > 0$ unidades y se balancea con una ventaja de $t = 1 + 1$ unidades.

En el modelo cuasi cónico en semicriterios, la compensación marginal no cambia. El umbral de compensación Δ_0 es igual a $\Delta_0 = \sqrt{1/(z - 1)} + 1$.

Por otra parte, nótese que los modelos son simétricos entre criterios.

4.5. Ponderación de los criterios

La posibilidad de ponderar los criterios es una característica deseable de los modelos multicriterio porque amplía el espectro de problemas que se pueden resolver.

Para construir estos modelos, partimos de una estructura de preferencia en criterios EPCr.

Supongamos dado el vector de pesos o ponderaciones $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_i > 0$,

$\sum \omega_i = 1$. En este caso se considera la función o transformación ponderación de los criterios ω definida por:

$$\begin{aligned} \omega: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ d \mapsto d' = \omega(d) &= (\omega_1(d_1), \omega_2(d_2), \dots, \omega_n(d_n)) \\ &= (n\omega_1 d_1, n\omega_2 d_2, \dots, n\omega_n d_n). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nótese que ω_i representa tanto a la función $\omega_i(\cdot)$ como al peso ω_i . También hay que destacar que en el modelo equiponderado, es decir, en el modelo con pesos iguales en todos los criterios, $\omega_i = 1/n$, se tiene que $n\omega_i = 1$ y, por tanto, que $d' = d$. Dicho de otro modo el modelo “no ponderado” es en realidad el modelo equiponderado.

Las preferencias cónicas ponderadas se determinan con las preimágenes por ω^{-1} , del cono y cuasi cono ponderado respectivo. Se definen y notan por ${}_{\omega^{-1}}\mathbb{C}_+^n(\alpha) = \omega^{-1}(\mathbb{C}_+^n(\alpha))$ y ${}_{\omega^{-1}}\mathbb{Q}_+^n(\alpha) = \omega^{-1}(\mathbb{Q}_+^n(\alpha))$, al cono y cuasi cono ponderados, respectivamente.

Figura 19: Preferencia cónica

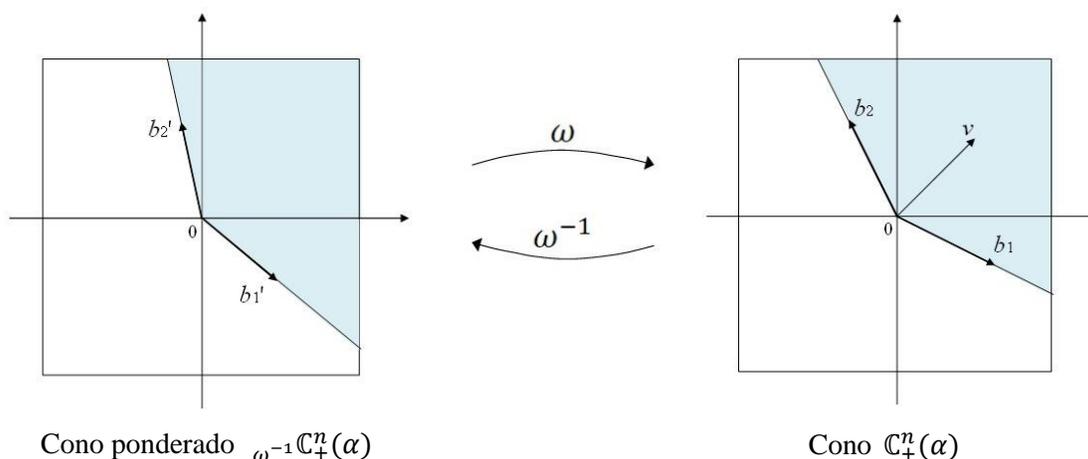
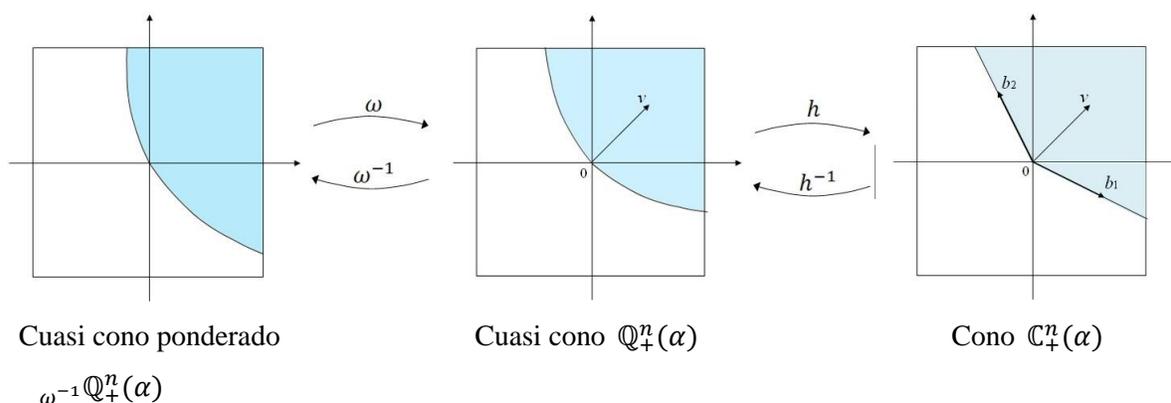


Figura 20: Preferencia cuasi cónica



Definición 30 (Preferencias cónicas ponderadas). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas; $d =$

$x - y$ el vector diferencia; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_i > 0$, $\sum \omega_i = 1$, el vector de pesos o ponderaciones; $d' = \omega(d)$ el vector diferencia ponderado. La preferencia cónica débil ponderada se define por:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow d' = \omega(d) \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \Leftrightarrow d \in_{\omega^{-1}} \mathbb{C}_+^n(\alpha). \quad (4.19)$$

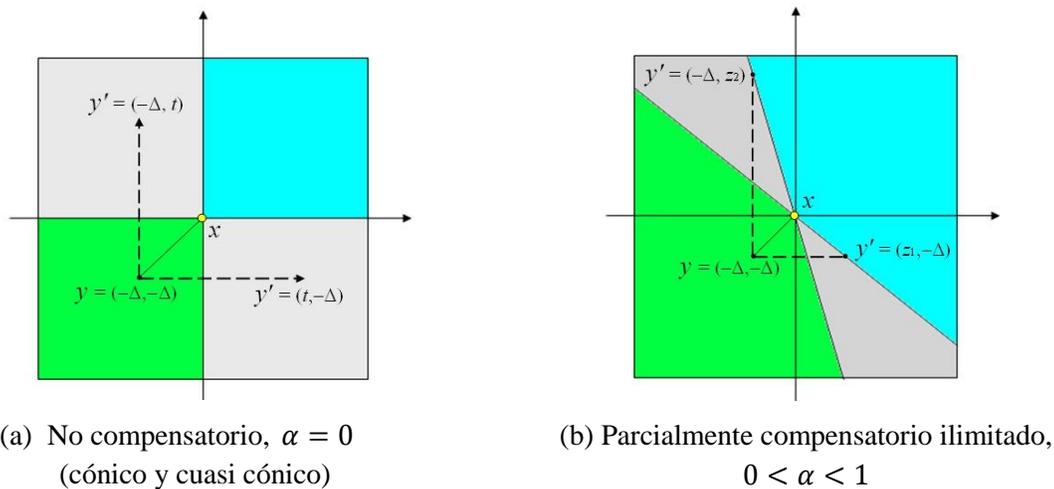
La preferencia cuasi cónica débil ponderada se define por:

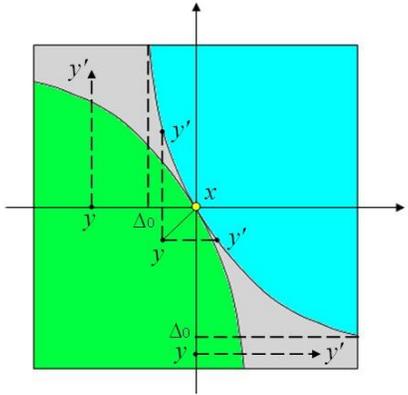
$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow r = h(d') \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \Leftrightarrow d' \in \mathbb{Q}_+^n(\alpha) \Leftrightarrow d \in_{\omega^{-1}} \mathbb{Q}_+^n(\alpha). \quad (4.20)$$

La figura 19 y 20 muestran la representación gráfica del cono y cuasi cono ponderados. Los modelos cónicos ponderados son las estructuras *I-P-J* definidas a partir de las preferencias cónicas ponderadas (Figura 21).

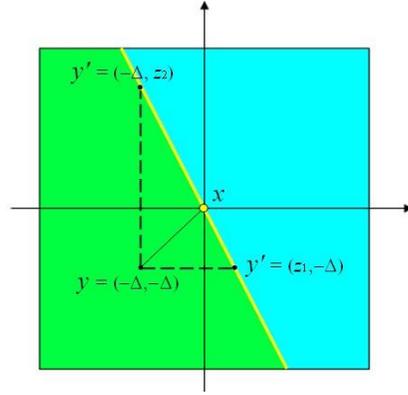
Si $\alpha = 0$, los modelos cónico y cuasi cónico ponderados $(\mathbb{R}^n, \succcurlyeq)$ coinciden con el orden mayor o igual (\mathbb{R}^n, \geq) , que es un modelo no ponderado y no compensatorio T2. Si $0 < \alpha < 1$, el modelo es parcialmente compensatorio (ilimitado y limitado). Y, si $\alpha = 1$, los modelos cónico y cuasi cónico son totalmente compensatorios ilimitado y limitado, respectivamente. Cuando $n = 2$, los modelos coinciden.

Figura 21: Modelos cónicos ponderados





(c) Parcialmente compensatorio limitado,
 $0 < \alpha < 1$



(d) Compensatorio, $\alpha = 1$ (cónico y cuasi cónico)

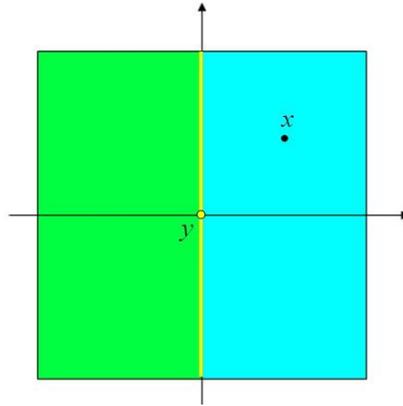
En los modelos ponderados, los pesos de los criterios determinan la magnitud de la compensación y los umbrales de compensación. De manera general, en los modelos parcialmente compensatorios y compensatorios ponderados, a igual desventaja, la compensación y el umbral de compensación es menor para el criterio de mayor ponderación.

Específicamente, para $0 < \alpha < 1$, la desventaja de 1 unidad en el criterio i se compensa con una ventaja de $(\omega_i/\omega_j)(z - n + 2)$ unidades en el criterio j . En el caso compensatorio ($\alpha = 1$), la desventaja de 1 unidad en el criterio i se revierte con una ventaja de $(\omega_i/\omega_j) + \varepsilon$ unidades en el criterio j , $\varepsilon > 0$; y se balancea con una ventaja de (ω_i/ω_j) unidades.

Ejemplo 21. *Considérese el caso de dos criterios (\mathbb{R}^2) con las ponderaciones $\omega = \{2/3, 1/3\}$. Es decir, el primer criterio tiene mayor peso (el doble) que el segundo. Se tiene entonces por ejemplo, que si $\alpha = 0,4$, equivalente a $z = 2,5$, una desventaja de 1 unidad en el primer criterio se compensa con 5 unidades del criterio 2; en tanto que una desventaja de 1 unidad en el segundo criterio se compensa con 1,25 unidades del criterio 1. Si se comparan estos resultados con la compensación de 2,5 unidades del criterio complementario frente a una desventaja de 1 unidad en cualquiera de los dos criterios, en el primer caso se tiene $5 = 2,5 * 2$; y, en el segundo se tiene que $1,25 = 2,5 * (1/2)$. En el caso de $\alpha = 1$, equivalente a $z = 1$, una desventaja de 1 unidad en el primer criterio se compensa con 2 unidades del criterio 2; en tanto que una desventaja de 1 unidad en el segundo criterio se compensa con 0,5 unidades del criterio 1 (ver Figura 21).*

Ponderación límite. Consideremos $n = 2$. Cuando $\omega_1/\omega_2 \rightarrow \infty$ ($\omega_1 \rightarrow 1$, $\omega_2 \rightarrow 0$), el segundo criterio se vuelve irrelevante, en consecuencia, la comparación entre las alternativas sólo depende del primer criterio. El caso límite para $0 < \alpha \leq 1$, y para los modelos compensatorio y parcialmente compensatorio es el único modelo, representado en la Figura 22.

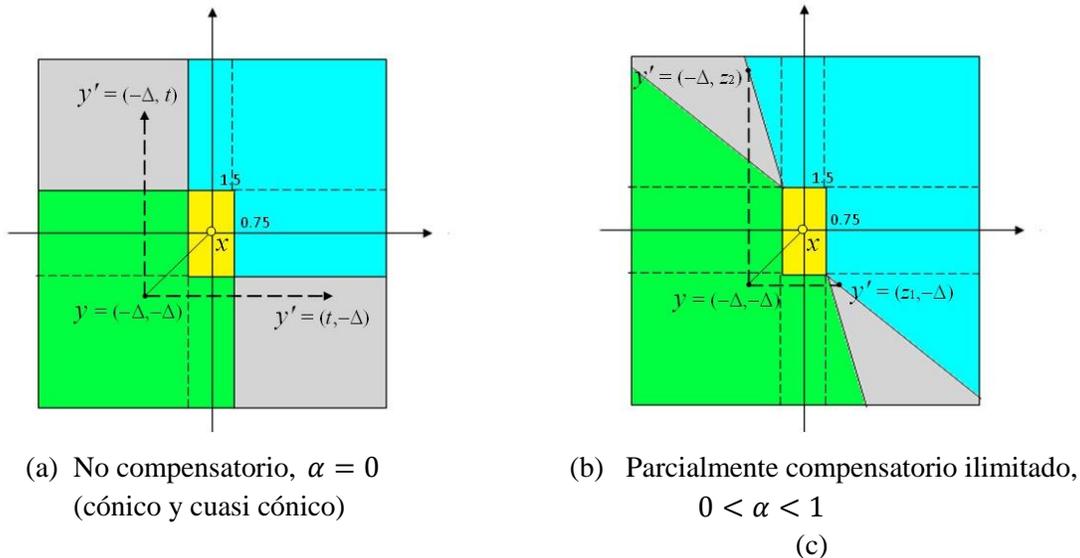
Figura 22: Ponderación límite ($\omega_1 \rightarrow 1$, $\omega_2 \rightarrow 0$), $0 < \alpha \leq 1$

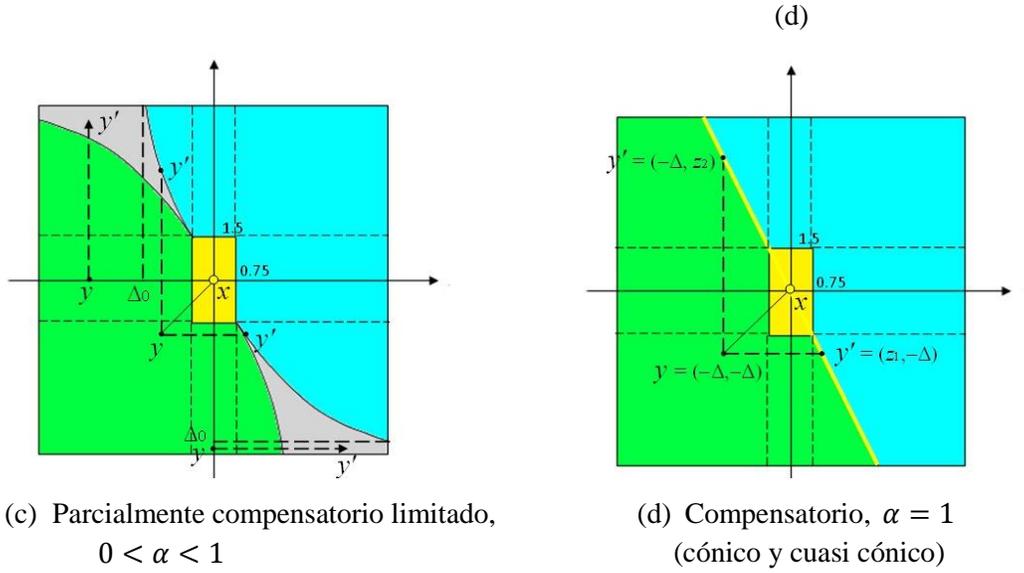


4.6. Ponderaciones y semicriterios

Finalmente, se puede analizar un modelo que considere la ponderación de los criterios en una estructura con umbrales de indiferencia.

Figura 23: Modelos cónicos ponderados en semicriterios





Supongamos dados el vector de pesos o ponderaciones $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, $\omega_i > 0$, $\sum \omega_i = 1$, y el vector de umbrales de indiferencia $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, con $c_i > 0$. Sea d^* , $d \in \mathbb{R}^n$ dos vectores, donde d^* es el vector d expresado en escalas comparables, esto es, $d = (d_1^*/c_1, d_2^*/c_2, \dots, d_n^*/c_n)$. En este caso consideramos la transformación compuesta $\varphi = \tau \circ \omega$ definida por:

$$\begin{aligned}
& \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\
& d \mapsto d'' = \varphi(d) = (\tau \circ \omega)(d) \\
& = (\tau \circ \omega_1(d_1), \tau \circ \omega_2(d_2), \dots, \tau \circ \omega_n(d_n)) \\
& = (\tau(n\omega_1 d_1), \tau(n\omega_2 d_2), \dots, \tau(n\omega_n d_n)).
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Los modelos cónicos ponderados en semicriterios son la preimagen por $\varphi^{-1} = \omega^{-1} \circ \tau^{-1}$ del modelo cónico y cuasi cónico respectivo. El cono y cuasi cono ponderados en semicriterios se definen y notan por, $\omega^{-1} \circ \tau^{-1} \mathbb{C}_+^n(\alpha) = \omega^{-1} \circ \tau^{-1}(\mathbb{C}_+^n(\alpha))$, y $\omega^{-1} \circ \tau^{-1} \mathbb{Q}_+^n(\alpha) = \omega^{-1} \circ \tau^{-1}(\mathbb{Q}_+^n(\alpha))$, respectivamente.

Definición 31 (Preferencias cónicas ponderadas en semicriterios). Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ dos alternativas en escalas comparables calculadas a partir del vector de umbrales de indiferencia, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, con $c_i > 0$; h , la función de credibilidad vectorial estándar; $d = x - y$, el vector diferencia; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, con $\omega_i > 0$ $\sum \omega_i = 1$, el vector de pesos o ponderaciones; $d' = \omega(d)$, el vector diferencia ponderado; $d'' = \varphi(d) = (\tau \circ \omega)(d) = \tau(d')$ el vector diferencia ponderado y transformado (a un vector en

criterios).

La preferencia cónica débil ponderada en semicriterios se define por:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow d'' = \varphi(d) \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \Leftrightarrow d \in_{\omega^{-1} \circ \tau^{-1}} \mathbb{C}_+^n(\alpha). \quad (4.22)$$

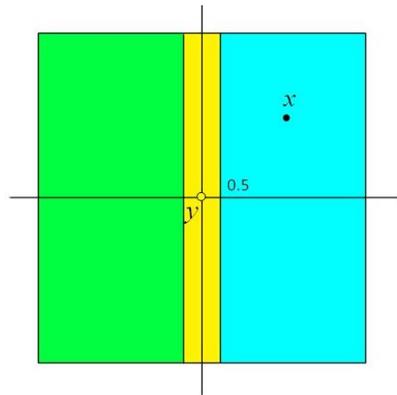
La preferencia cónica débil ponderada en semicriterios se define por:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow r = h(d'') \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \Leftrightarrow d \in_{\omega^{-1} \circ \tau^{-1}} \mathbb{Q}_+^n(\alpha). \quad (4.23)$$

Los modelos cónicos ponderados en semicriterios son las estructuras *I-P-J* definidas a partir de las estructuras de preferencias cónicas ponderadas en semicriterios. Para los pesos, $\omega = (2/3, 1/3)$, la Figura 23 muestra la representación gráfica de estos modelos.

Ponderaciones límites. Al igual que en los modelos cónicos en criterios, al considerar la ponderación límite, $\omega_1 \rightarrow 1$, $\omega_2 \rightarrow 0$, la preferencia sólo depende del primer criterio. La Figura 24 muestra el gráfico para la ponderación límite.

Figura 24: Ponderación límite ($\omega_1 \rightarrow 1$, $\omega_2 \rightarrow 0$), $0 < \alpha \leq 1$



Capítulo 5

Ejemplo de aplicación del modelo cuasi cónico

Como aplicación del modelo parcialmente compensatorio limitado ponderado (cuasi cónico), se realiza el análisis de cinco países latinoamericanos: Ecuador, Colombia, Perú, Costa Rica y República Dominicana, mediante 2 indicadores: el PIB (\$ PPP) y las emisiones de CO₂ per cápita (Kg).

El objetivo de un criterio, de maximización si se prefiere más a menos o de minimización si se prefiere menos a más, se señala en la matriz de datos mediante la variable o_i que toma el valor $o_i = 1$ si objetivo del criterio i es “maximizar”, y $o_i = -1$ si es “minimizar”.

Téngase presente que un objetivo de minimización se cambia a uno de maximización multiplicando por -1 los valores de las alternativas en el respectivo criterio.

5.1. Matriz de datos

La matriz de datos y el gráfico de dispersión de las 5 alternativas son:

Tabla 14: Matriz de Datos

	Criterio	PIB pc	CO ₂ pc
	Unidad	PPP US\$ 2010	Kg
	Objetivo	max	min
	Umbral	686	110
	Peso	0,5	0,5
	Grado de compensación	0,3	
Alternativas	Ecuador	7.830	2.111
	Costa Rica	11.260	1.812
	Perú	8.790	1.646
	Colombia	9.000	1.560
	República Dominicana	8.990	2.076

Fuente: World Development Indicators.

Figura 25: Alternativas

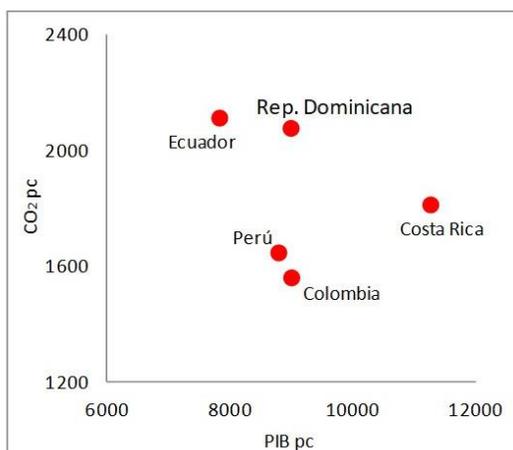


Tabla 15: Alternativas en escalas comparables

	PIB pc	CO ₂ pc
Ecuador	11,41	-19,19
Costa Rica	16,41	-16,47
Perú	12,81	-14,97
Colombia	13,12	-14,18
República Dominicana	13,10	-18,87

5.2. Vectores diferencia y regiones

Las alternativas en escalas comparables y con las coordenadas transformadas a objetivos de maximización (el i -ésimo criterio viene expresado como $o_i x_i / c_i$) se muestra en la Tabla 15. De esta tabla se calculan los vectores diferencia ($d = x - y$) en escalas comparables, y los vectores diferencia transformados $d' = \tau(d)$ y $r = h(d')$ (ver Sección 4.2). Estos vectores se muestran en la Tabla 16:

Tabla 16: Vectores diferencia d , d' , r

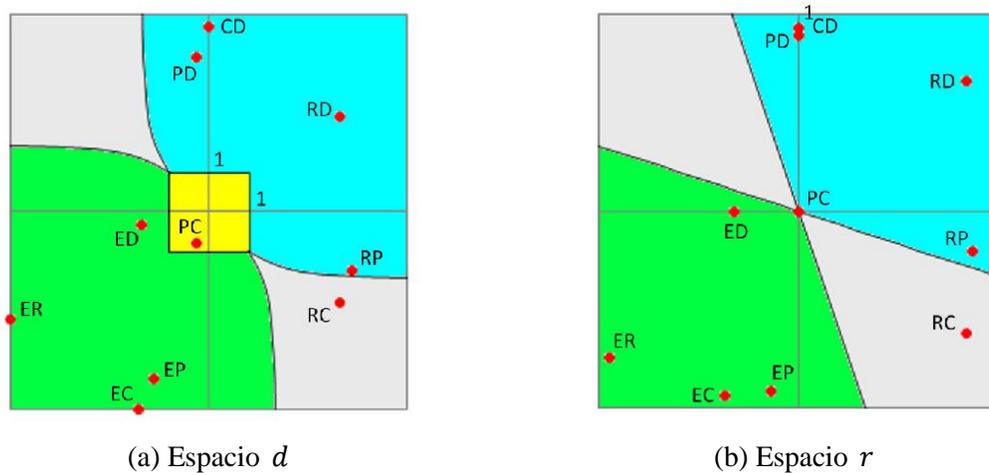
	d		d'		r	
	PIB pc	CO ₂	PIB pc	CO ₂	PIB pc	CO ₂
Ecu – CRic	-5,00	-2,72	-4,00	-1,72	-0,94	-0,75
Ecu – Per	-1,40	-4,23	-0,40	-3,23	-0,14	-0,91
Ecu – Col	-1,76	-5,00	-0,71	-4,01	-0,33	-0,94
Ecu – Dom	-1,69	-0,32	-0,69	0,00	-0,32	0,00
CRic – Per	3,60	-1,51	2,60	-0,51	0,87	-0,21
CRic – Col	3,29	-2,29	2,29	-1,29	0,84	-0,62
CRic – Dom	3,31	2,40	2,31	1,40	0,84	0,66
Per – Col	-0,31	-0,78	0,00	0,00	0,00	0,00
Per – Dom	-0,29	3,91	0,00	2,91	0,00	0,89
Col – Dom	0,01	4,69	0,00	3,69	0,00	0,93

Ecuador (Ecu), Costa Rica (CRic), Perú (Per), Colombia (Col), República Dominicana (Dom)

Por ejemplo, para el punto RD (Costa Rica – República Dominicana), en el espacio d , el vector diferencia de coordenadas $(3,31, 2,40)$, se grafica en el espacio afín $(\mathbb{R}^2; y)$, es decir, en el origen está la República Dominicana. Así también, para el punto EP (Ecuador – Perú), el vector diferencia $(-1,4, 4,23)$ se grafica en el espacio afín $(\mathbb{R}^2; y)$. En este caso, Perú está en el origen.

En la Figura 26 se grafican las regiones $>$, $<$, \sim , ϕ y los vectores diferencia asociados a cada par de países en el espacio d y en el espacio r .

Figura 26: Pares de alternativas



Ecuador (E), Costa Rica (R), Perú (P), Colombia (C) y República Dominicana (D).

5.3. Matriz coloreada

De cualquiera de las figuras 26(a) y 26(b), se determina la relación entre los pares de países. Por ejemplo, puesto que el par RD está en la región celeste, que corresponde a la preferencia estricta, se concluye que Costa Rica $>$ República Dominicana. Para el par RC (Costa Rica–Colombia) que está en la región gris (no comparabilidad), se establece que Costa Rica ϕ Colombia. Los resultados se resumen en la matriz denominada de relaciones o matriz coloreada, en razón de que cada celda se pinta del color que le corresponde a la relación. La matriz coloreada es:

Matriz coloreada

	Ecu	CRic	Per	Col	Dom
Ecu	~	<	<	<	<
CRic		~	>	ϕ	>
Per			~	~	>
Col				~	>
Dom					~

Ecuador (Ecu), Costa Rica (CRic), Perú (Per), Colombia (Col) y República Dominicana (Dom).

Estos resultados se pueden obtener analíticamente considerando la matriz $B(\alpha)$, base del cono $\mathbb{C}_+^2(\alpha)$, con $\alpha = 0,3$, equivalente a $z = 10/3$; y, la matriz de cambio de base, $B(\alpha)^{-1}$:

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & -0,3 \\ -0,3 & 1 \end{bmatrix}, B(\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.099 & 0.330 \\ 0.330 & 1.099 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Con la matriz $B^{-1}(\alpha)$ de cambio de base, se calculan los vectores $r_B = B^{-1}(\alpha)r$, y se aplican las condiciones de la Tabla 12, para obtener en qué relación están el par de alternativas respectivo. Los resultados para los vectores r_B para todos los pares de países se presentan en Tabla 17, y se incluye la columna “Relación”.

Por ejemplo, $r_{RD} = (0,84, 0,86)$, que conduce a $r_{B,RD} = (1,11, 1,01) > 0$, por tanto, se concluye que Costa Rica $>$ República Dominicana. De manera similar, $r_{RC} = (0,84, -0,62)$, que lleva a $r_{B,RC} = (0,72, -0,41)$, donde la primera coordenada es positiva y la segunda es negativa, lo que conduce a la conclusión que Costa Rica ϕ República Dominicana.

Los resultados para los vectores r_B para todos los pares de países se presentan en la Tabla 17, y se incluye la columna “Relación”.

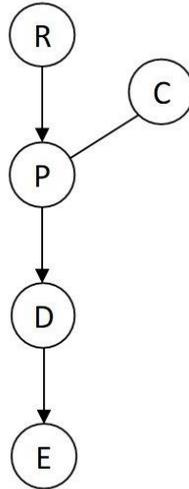
Tabla 17: Vectores r_B y columna Relación

	r_B		Relación
Ecu – CRic	-1,13	-1,28	<
Ecu – Per	-1,05	-0,45	<
Ecu – Col	-1,14	-0,68	<
Ecu – Dom	-0,11	-0,36	<
CRic – Per	0,06	0,89	>
CRic – Col	-0,41	0,72	ϕ
CRic – Dom	1,01	1,14	>
Per – Col	0	0	\sim
Per – Dom	0,98	0,29	>
Col – Dom	1,02	0,31	>

Grafo asociado a la matriz coloreada. La matriz coloreada se puede representar mediante el grafo asociado. Un grafo es una estructura matemática $G(N, R)$ donde N es un conjunto finito no vacío y R es una relación sobre N . Los elementos de N se denominan nodos y se los representa gráficamente mediante pequeños círculos. Los elementos de R se denominan arcos. Sean $a, b \in N$. Si $(a, b) \in R$ y $(b, a) \notin R$, entonces, el arco *orientado* (a, b) se representa mediante un segmento rectilíneo orientado (una flecha) que une el nodo a con el nodo b . Pero si $(a, b), (b, a) \in R$, entonces, el arco *no orientado* (a, b) se representa mediante un segmento rectilíneo no orientado (un segmento sin puntas).

En nuestro caso, el conjunto de nodos N es el conjunto de alternativas A ; el arco orientado (a, b) corresponde a la preferencia estricta; y, el arco no orientado (a, b) corresponde a la indiferencia. La incomparabilidad no está asociada a ningún tipo de arco.

Figura 27: Grafo asociado



Ecuador (E), Costa Rica (R), Perú (P), Colombia (C) y República Dominicana (D)

El grafo asociado a la matriz coloreada (Figura 27) es un grafo transitivo, ($a \succ b \succ c \Rightarrow a \succ c$) y, además cumple que $a \sim b \succ c \Rightarrow a \succ c$. Para simplificar el grafo no se dibujan todos los arcos que se deducen por transitividad.

La matriz coloreada y el grafo determinan el siguiente resultado:

Costa Rica \succ Perú \succ República Dominicana \succ Ecuador;

Colombia \sim Perú;

Colombia \succ República Dominicana \succ Ecuador;

Costa Rica ϕ Colombia.

Por ejemplo, Costa Rica tiene el PIB pc más alto y las emisiones de CO₂ pc más bajas que las de la República Dominicana, por lo que, se puede decir que está mejor¹⁰: Costa Rica, PIB pc = 11260 USD \equiv 16,41[ui]; CO₂ pc = 1812 Kg \equiv 16,47 [ui]; República Dominicana, PIB pc = 8990 USD \equiv 13,10[ui]; CO₂ pc = 2076 Kg \equiv 18,90 [ui]. A pesar de que Colombia esté mejor que Perú en el PIB pc y en las emisiones de CO₂ pc, puesto que las diferencias son “pequeñas” (0,31 [ui] y 0,78 [ui] respectivamente), estos países se evalúan

¹⁰ Para decir si una diferencia es relevante, en la unidad [ui] (umbrales de indiferencia) es suficiente observar si la diferencia es mayor que 1.

como indiferentes. Costa Rica tiene un PIB pc más alto que Colombia (con una diferencia a favor de 3,29 [ui]), y unas emisiones de CO₂ pc también más altas (con una diferencia en contra de 2,29 [ui]); como la información es contradictoria, estos países no se pueden comparar.

En este análisis parcial, con sólo dos indicadores, el mejor país es Costa Rica, el peor país es Ecuador. Más adelante se realizará un análisis con un mayor número de indicadores.

Los modelos presentados hasta esta sección son modelos basados en la teoría clásica de conjuntos. Las preferencias son conjuntos discretos, no difusos. Este tipo de modelos presentan como inconvenientes la discontinuidad de las preferencias. Por ejemplo, en un modelo no compensatorio o parcialmente compensatorio (en criterios), si $n = 2$ y $x = y$, se tiene que $x \sim y$. Ahora, para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene que $x + (\varepsilon, \varepsilon) > y$; $x + (\varepsilon, -\varepsilon) \phi y$. Tal como es conocido, los problemas de discontinuidad de los modelos discretos se resuelven con la aplicación de los conjuntos difusos, que se tratará en los siguientes capítulos.

Los pesos tienen una interpretación mixta. En los modelos no compensatorios son indicadores de la importancia de los criterios, en tanto que en los modelos compensatorios los pesos expresan la tasa de compensación entre criterios. En el caso de que los pesos fuesen 1/3, 2/3 en las variables del ejemplo de aplicación de este capítulo, se estaría asumiendo que las condiciones del medioambiente (emisiones de CO₂ pc) son el doble de importantes que los aspectos económicos (el PIB per cápita). En los modelos compensatorios los pesos expresan la tasa de compensación entre criterios: en el caso totalmente compensatorio ($\alpha = 1$), dos umbrales de indiferencia en el PIB per cápita compensarían exactamente un incremento de un umbral de indiferencia en las emisiones de CO₂ per cápita.

Capítulo 6

Preferencia difusa

En los capítulos anteriores se presentaron diversos modelos multicriterio fundamentados en la lógica y teoría de conjuntos clásica, es decir, en modelos no difusos. En este capítulo se hará una extensión difusa del modelo cuasi cónico. Esta operación implica el cambio en tres de los aspectos de este modelo:

1. La definición de la preferencia cuasi cónica débil \succsim (Definición 28).
2. La definición de la estructura $I-P-J$ a partir de la preferencia débil \succsim (Definición 3).
3. La relación entre α , el grado de compensación, y z , el parámetro de la base $B(z)$; es decir la función $z = \varphi(\alpha)$ (Sección 4.1).

Previo a realizar estos cambios, se hace un repaso ágil de la teoría de conjuntos difusos.

6.1. Conjuntos difusos

En un conjunto “clásico”, no difuso, dado un conjunto A y un elemento x , se tiene que: x pertenece a A o, x no pertenece a A . Por ejemplo si $A = \{x \mid x \text{ es alto}\}$ y $x = \text{Jorge}$, se tiene que Jorge es alto o Jorge no es alto. Si, digamos, Jorge mide 1,90 [m] (y lo consideramos alto), ¿qué se puede decir de Santiago que mide 1,85 [m], y de María que mide 1,60 [m]? Posiblemente la respuesta sea: Santiago es casi alto, María es muy poco alta. Los conjuntos difusos permiten expresar estas ideas.

En los conjuntos clásicos se puede definir una función de pertenencia al conjunto A que toma el valor 1 si $x \in A$ y vale 0 si $x \notin A$ (y solo toma estos valores). En los conjuntos difusos, la función de pertenencia o grado de pertenencia al conjunto difuso A puede ser cualquier valor entre 0 y 1. El grado de pertenencia igual a 0 significa que es absoluta y totalmente certero que $x \notin A$; el grado de pertenencia igual a 1 significa que es absoluta y totalmente certero que $x \in A$. Así, para el conjunto difuso A (el conjunto de los altos), se tendrá que, por ejemplo, $gr(\text{Jorge} \in A) = 0,98$; $gr(\text{Santiago} \in A) = 0,90$; $gr(\text{María} \in A) = 0,30$. Veamos ahora la Definición 32 formal de conjunto difuso.

Definición 32 (Conjunto y relación difusa). Sea X un conjunto cualesquiera que lo

denominaremos universo del discurso.

1. Un conjunto difuso A es una función $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ que a cada elemento de $x \in X$ le asocia el grado de pertenencia, o credibilidad de la pertenencia, de x al conjunto A . Se nota $\mu_A(x) = gr(x \in A)$.
2. Una relación difusa R sobre X es un subconjunto difuso en $X \times X$. El grado de pertenencia del par $(x, y) \in X \times X$ al conjunto R se nota $R(x, y)$. Se dice también que $R(x, y)$ es el grado de credibilidad, o simplemente credibilidad, de la relación $x R y$.

6.1.1. Operaciones entre conjuntos difusos

Las operaciones clásicas entre conjuntos: unión, intersección y complemento se extienden a los conjuntos difusos de la siguiente manera:

Complemento. Un complemento difuso de un conjunto difuso A es una función N que al grado de pertenencia de x al conjunto difuso A le asocia el grado de pertenencia de x al conjunto difuso complemento A^c :

$$\begin{aligned} N: [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ \mu_A(x) &\rightarrow N(\mu_A(x)) = \mu_{A^c}(x), \end{aligned} \quad (6.1)$$

que cumple las condiciones siguientes:

1. $N(0) = 1$, $N(1) = 0$, condiciones de borde,
2. $a < b \Rightarrow N(a) \geq N(b)$, monotonía no creciente.

Adicionalmente se puede exigir el cumplimiento de las condiciones siguientes:

3. N es una función continua,
4. N es estrictamente decreciente, en tal caso se denomina negación estricta,
5. $N(N(a)) = a$, involución. De ser este el caso se denomina negación fuerte.

Ejemplo 22. La negación usual es la función $N(a) = 1 - a$.

Intersección. La intersección difusa de dos conjuntos difusos A y B es una función T , denominada norma triangular o t-norma, que al par de grados de pertenencia del elemento x a los conjuntos A y B , le asocia el grado de pertenencia de x al conjunto difuso

intersección $A \cap_T B$:

$$\begin{aligned} T: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ (\mu_A(x), \mu_B(x)) &\rightarrow T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A \cap B}(x), \end{aligned} \quad (6.2)$$

que cumple las condiciones:

1. $T(1, a) = a$, condiciones de borde,
2. $T(a, b) = T(b, a)$, conmutatividad,
3. $a \leq a' \wedge b \leq b' \Rightarrow T(a, b) \leq T(a', b')$, monotonía no decreciente,
4. $T(T(a, b), c) = T(a, T(b, c))$, asociatividad.

Adicionalmente se puede exigir el cumplimiento de la condición que T sea una función continua.

Unión. La unión difusa de dos conjuntos difusos A y B es una función S , denominada conorma triangular o t-conorma o s-norma, que al par de grados de pertenencia de x a los conjuntos A y B , le asocia el grado de pertenencia de x al conjunto difuso unión $A \cup_S B$:

$$\begin{aligned} S: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ (\mu_A(x), \mu_B(x)) &\rightarrow S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A \cup B}(x), \end{aligned} \quad (6.3)$$

que cumple las condiciones:

1. $S(0, a) = a$, condiciones de borde,
2. $S(a, b) = S(b, a)$, conmutatividad,
3. $a \leq a' \wedge b \leq b' \Rightarrow S(a, b) \leq S(a', b')$, monotonía no decreciente,
4. $S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c))$, asociatividad.

Adicionalmente, se puede exigir el cumplimiento de la condición que S sea una función continua.

Ejemplo 23. Veamos los siguientes ejemplos:

1. La t-norma y la t-conorma de Frank de parámetro $s \in (0, \infty)$, son:

$$T^s(a, b) = \log_s \left(1 + \frac{(s^a - 1)(s^b - 1)}{s - 1} \right), \quad (6.4)$$

$$S^s(a, b) = 1 - \log_s \left(1 + \frac{(s^{1-a} - 1)(s^{1-b} - 1)}{s - 1} \right). \quad (6.5)$$

2. La t-norma y la t-conorma de Lukasiewics son:

$$T(a, b) = \max(a + b - 1, 0), \quad S(a, b) = \min(a + b, 1). \quad (6.6)$$

Observación 8. La negación usual, la t-norma y la t-conorma de Frank de parámetro s ; la negación usual, la t-norma y la t-conorma de Lukasiewicz son tripletas de De Morgan; es decir, satisfacen las leyes de De Morgan:

$$\begin{aligned} (A \cup_S B)^c &= A^c \cap_T B^c, \\ (A \cap_T B)^c &= A^c \cup_S B^c. \end{aligned} \quad (6.7)$$

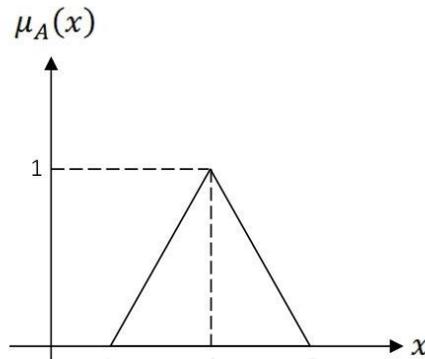
La t-norma y la t-conorma de Frank de parámetro s , satisfacen que:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} T^s(a, b) &= T^1(a, b) = ab, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} S^s(a, b) &= S^\infty(a, b) = \min(a + b, 1). \end{aligned} \quad (6.8)$$

6.2. Extensión difusa de un subconjunto de \mathbb{R}^n

Un número difuso real es un conjunto difuso en \mathbb{R} con ciertas características particulares [Reina(2008)]. Entre los números difusos más utilizados están los números difusos triangulares que cuya función de pertenencia se grafica en la Figura 28 para el número triangular difuso $A = (1, 3, 5) = (3 - c, 3, 3 + c)$. Este es el número difuso triangular 3 con una amplitud de incertidumbre de $c = 2$.

Figura 28: Número difuso triangular



La función de pertenencia se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 1 - \min(1, 0,5|3 - x|) \\ &= 1 - \min(1, kd(x, 3)), \end{aligned} \quad (6.9)$$

donde $k = 0,5$; d es la distancia (euclideana) de x al punto 3.

Como sabemos, la distancia de Minkowski de parámetro $p > 0$, entre los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ es igual a $d(x, y) = \|x - y\|_p = [\sum |x_i - y_i|^p]^{1/p}$; y la distancia del vector o punto $r \in \mathbb{R}^n$ al conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, es igual a $d(r, A) = \inf_{v \in A} d(r, v)$. Si $p = 2$, la distancia de Minkowski es la distancia euclidiana.

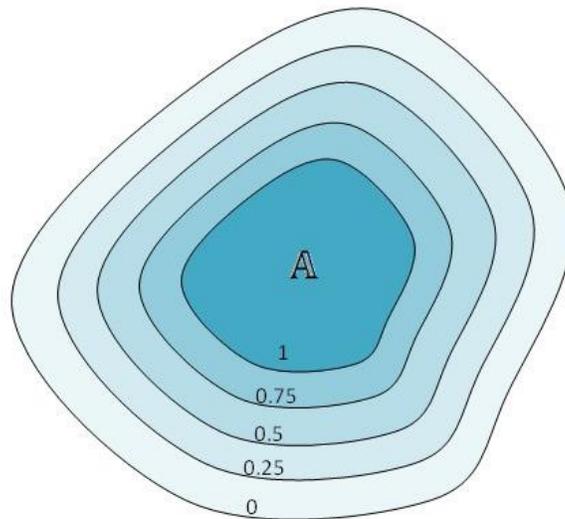
Una vez definida la distancia entre un punto y un subconjunto de \mathbb{R}^n , para extender el conjunto no difuso $A \subset \mathbb{R}^n$ a un conjunto difuso aplicamos una función de pertenencia similar a la de un número triangular difuso.

Definición 33 (Conjunto difuso de \mathbb{R}^n). Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no difuso, $k > 0$ una constante, d la distancia de Minkowski de parámetro p . El grado de pertenencia de $r \in \mathbb{R}^n$ al conjunto difuso A se define por:

$$\mu_A(r) = gr(r \in A) = 1 - \min(1, kd(r, A)). \quad (6.10)$$

La Figura 29 muestra las curvas de nivel de la función $\mu_A(r)$ para $A \subset \mathbb{R}^2$.

Figura 29: Conjunto difuso $A \subset \mathbb{R}^2$. Curvas de nivel de $\mu_A(r) = gr(r \in A)$



Se cumple que el grado de pertenencia del punto r al conjunto A se incrementa cuando la distancia de r a A disminuye. El parámetro k determina las dimensiones globales de las curvas de nivel.

6.3. Preferencia débil difusa R

Para definir la preferencia débil difusa modificamos la Definición 28 mediante dos cambios:

1. La condición “el vector r pertenece al cono $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$, $r \in \mathbb{C}_+^n(\alpha)$ ”, se cambia a “el grado de pertenencia del vector r al cono difuso $\mathbb{C}_+^n(z)$, $gr(r \in \mathbb{C}_+^n(z))$ ”. (Una vez que se establezca la relación entre α y z , se notará el cono como es usual, como $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$),
2. Las alternativas $x, y \in \mathbb{R}^n$ para las cuales se define la preferencia estarán expresadas en escalas comparables.

Para la determinación de la constante, consideremos lo siguiente. Si $n = 2$, se toma la constante $k = 1$ y se tiene que el valor máximo de la distancia de r al cono $\mathbb{C}_+^2(z)$ es $d(r, \mathbb{C}_+^2(z)) = 2^{1/p}$, que se obtiene cuando $r = (-1, -1)$. Para $n > 2$ se elige k de tal manera que $kd(r, \mathbb{C}_+^n(z))$ sea justamente igual a $2^{1/p}$ y, así, mantener homogeneidad entre los espacios vectoriales de diferente dimensión. Puesto que el máximo de $d(r, \mathbb{C}_+^n(z))$ es igual $n^{1/p}$, ocurre que cuando $r = (-1, -1, \dots, -1)$, se tiene que la distancia máxima es $n^{1/p}$, de donde se concluye que $k = (2/n)^{1/p}$.

Por otra parte, la ecuación (4.10) del modelo no difuso, $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow r = h(d) \in \mathbb{C}_+^n(\alpha) \Leftrightarrow d \in \mathbb{Q}_+^n(\alpha)$, se extiende para el caso difuso de la siguiente manera:

$$R(x, y) = gr(r \in \mathbb{C}_+^n(\alpha)) = gr(d \in \mathbb{Q}_+^n(\alpha)). \quad (6.11)$$

Esta expresión permite definir la preferencia débil difusa de la manera siguiente.

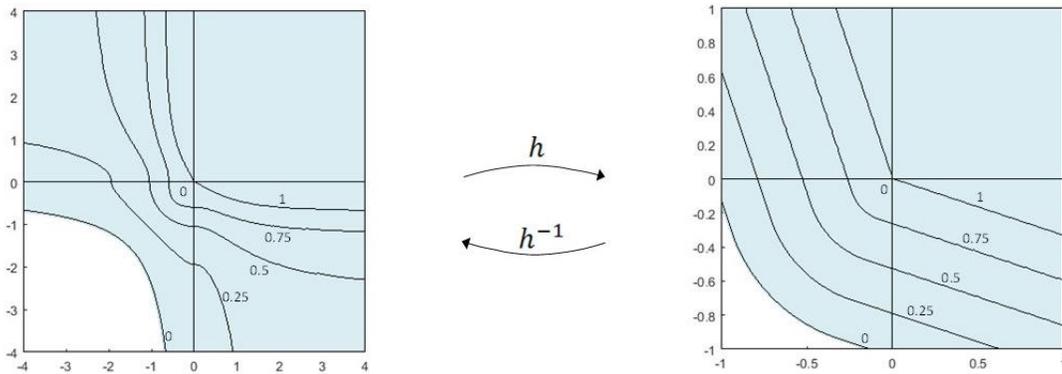
Definición 34 (Preferencia cuasi cónica débil difusa R). *Dada la distancia de Minkowsky de parámetro p ; sean $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, dos alternativas en escalas comparables calculadas a partir del vector de umbrales de indiferencia $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, con $c_i > 0$; $\mathbb{C}_+^n(z)$, el cono de base $B(z)$ de parámetro $z \in [n - 1, \infty]$; h , la función de credibilidad vectorial estándar; $d = x - y$, el vector diferencia; $r = h(d) = h(x - y)$, el vector transformado. La preferencia cuasi cónica débil difusa $R(x, y)$ se define por:*

$$\begin{aligned} R(x, y) &= gr(r \in \mathbb{C}_+^n(z)) = gr(d \in \mathbb{Q}_+^n(z)) \\ &= 1 - \min(1, kd(r, \mathbb{C}_+^n(z))), \end{aligned} \quad (6.12)$$

donde $k = (2/n)^{1/p}$.

Al igual que con las preferencias no difusas, para $n = 2$, la preferencia difusa R se la puede graficar en el espacio afín (\mathbb{R}^2, y) . Al ser la preferencia difusa un campo escalar $R: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, los gráficos incluyen las curvas de nivel de altura ℓ , con $\ell \in [0, 1]$: $\{x \in \mathbb{R}^n | R(x, y) = \ell\}$. La Figura 30 muestra el gráfico de la preferencia débil $R(x, y)$ para $z = 3$, $p = 2$.

Figura 30: Cono y cuasi cono difusos



Cuasi cono difuso $\mathbb{Q}_+^n(z) = h^{-1}(\mathbb{C}_+^n(z))$

Cono difuso $\mathbb{C}_+^n(z)$

Puesto que para cualquier permutación $\sigma \in \Gamma(\Omega)$, se cumple que $d(r, \mathbb{C}_+^n(z)) = \inf_{v \in \mathbb{C}_+^n(z)} d(r, v) = \inf_{v \in \mathbb{C}_+^n(z)} d(\sigma(r), v)$, se tiene que $R(x, y)$ es simétrica en criterios, esto es, $R(x, y) = R(\sigma(x), \sigma(y))$. En el gráfico precedente, la simetría se expresa en el hecho que las curvas de nivel son simétricas respecto a la diagonal de pendiente positiva.

6.4. Estructura I-P-J difusa

En el caso no difuso, los modelos multicriterios $(X, \succsim, \sim, \succ, \phi)$, se determinan mediante las estructuras I-P-J de las estructuras de preferencia, (X, \succsim) . Ahora corresponde a una estructura I-P-J difusa: (X, R, I, P, J) , determinada a partir de la estructura de preferencia débil difusa (X, R) . Para ello, en el marco conceptual definido por (Fodor y Roubens 1994), se aplica una versión simplificada del Teorema de (Alsina 1985).

Teorema 5. Sean (X, R) una estructura de preferencia difusa donde R es una preferencia

débil difusa definida sobre X , N un complemento difuso, T una t -norma, S una t -conorma. La estructura de preferencia difusa I - P - J definida por:

$$I = R \cap_T R^{-1}, P = R \cap_T R^{-1c}, J = R^c \cap_T R^{-1c}, \quad (6.13)$$

satisface las condiciones:

$$R = I \cup_S P, R^{-1c} = P \cup_S J, X \times X = I \cup P \cup P^{-1} \cup J, \quad (6.14)$$

si y sólo si:

N es la negación usual, $N(a) = 1 - a$,

T es la t -norma de Frank de parámetro $s = 1$, $T^1(a, b) = ab$,

S es la t -conorma de Frank de parámetro $s = \infty$, $S^\infty(a, b) = \min(a + b, 1)$.

Dado que la preferencia inversa $R^{-1}(x, y)$ es $R(y, x)$, la aplicación directa del Teorema 5 de Alsina lleva a las fórmulas para las relaciones difusas I , P y J . Si bien es cierto que en una estructura I - P - J se definen tres relaciones (I, P, J) , para un par de alternativas específicas $x, y \in \mathbb{R}^n$, se trabaja con la cuarteta de valores: $I(x, y)$, $P(x, y)$, $P^{-1}(x, y)$ y $J(x, y)$.

Definición 35 (Relaciones difusas I , P y J). Sean (X, R) una estructura de preferencia débil difusa, $x, y \in X$ dos alternativas en escalas comparables. La credibilidad de las relaciones difusas I , P y J se calcula por:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= R(x, y)R(y, x), \\ P(x, y) &= R(x, y)[1 - R(y, x)], \\ P^{-1}(x, y) &= P(y, x) = R(y, x)[1 - R(x, y)], \\ J(x, y) &= [1 - R(x, y)][1 - R(y, x)]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Además se cumple que $I(x, y) + P(x, y) + P^{-1}(x, y) + J(x, y) = 1$.

Nótese que cuando $R(x, y) = R(y, x)$ se tiene que $I(x, y) = R(x, y)^2$, y que $J(x, y) = [1 - \sqrt{I(x, y)}]^2$.

Expresemos la cuarteta de valores para $X = \mathbb{R}^n$ y $R(x, y)$ la preferencia cuasi cónica débil difusa en \mathbb{R}^n de la Definición 34. Tened presente que los valores de, digamos, $I(x, y)$ depende tanto de x e y cómo del valor de z . Para especificar este parámetro, se escribe $I_z(x, y)$. Por otra parte, puesto que $I_z(x, y)$ se evalúa a partir del vector d , o del vector r ,

$I_z(x, y)$ también se puede escribir como $I_z(r)$ o como $I_z(d)$.

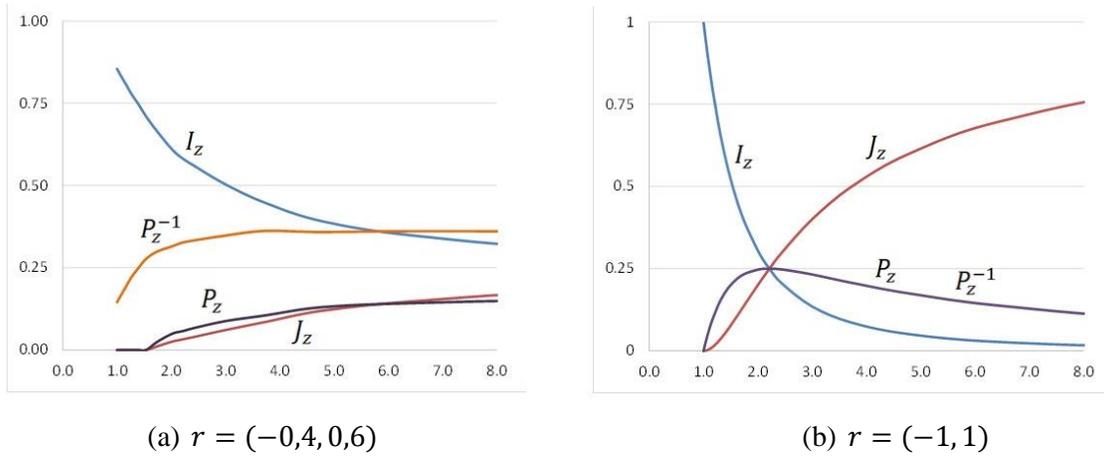
$$I_z(x, y) = I_z(r) = gr(r \in \mathbb{C}_+^n(z))gr(-r \in \mathbb{C}_+^n(z)) \quad (6.16)$$

Reemplazando $gr(r \in \mathbb{C}_+^n(z))$ (ver Definición 34), donde, para simplificar las expresiones notamos $d'(r, \mathbb{C}_+^n(z)) = \min(1, kd(r, \mathbb{C}_+^n(z)))$ y, procediendo de igual manera con los otros términos de la cuarteta, queda entonces:

$$\begin{aligned} I(x, y) &= [1 - d'(r, \mathbb{C}_+^n(z))][1 - d'(-r, \mathbb{C}_+^n(z))], \\ P(x, y) &= [1 - d'(r, \mathbb{C}_+^n(z))]d'(-r, \mathbb{C}_+^n(z)), \\ P^{-1}(x, y) &= d'(r, \mathbb{C}_+^n(z))[1 - d'(-r, \mathbb{C}_+^n(z))], \\ J(x, y) &= d'(r, \mathbb{C}_+^n(z))d'(-r, \mathbb{C}_+^n(z)). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ejemplo 24. La Figura 31 representa los valores de la cuarteta $I_z(r)$, $P_z(r)$, $P_z^{-1}(r)$ y $J_z(r)$ como funciones de z para valores fijos de r .

Figura 31: Cuarteta de funciones $I_z(r)$, $P_z(r)$, $P_z^{-1}(r)$ y $J_z(r)$



Nótese que $P_z(-1, 1) = P_z^{-1}(-1, 1)$. Por otra parte, para $z = 2,2153$ se cumple que $P_z(-1, 1) = P_z^{-1}(-1, 1) = I_z(-1, 1) = J_z(-1, 1) = 0,25$.

6.5. Relación entre α y z

En la preferencia no difusa, la relación entre α , el parámetro de compensación, y z , el parámetro de la base $B(z)$ está dada por $\alpha = z/(n - 1)$ (Sección 4.1). Notamos $\alpha' = \psi'(z)$. En la preferencia difusa se va definir $\alpha = \psi(z)$.

Sea $n = 2$, y partamos de dos alternativas $x, y \in \mathbb{R}^2$ iguales, $x = y$. Esto implica que $d = 0$, $r = 0$, y que, para todo $z \in [1, \infty]$ se cumple que $I_z(0) = 1$, $J_z(0) = 0$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $x = y = (0, 0)$. Supongamos que al primer criterio de la alternativa x se le disminuye la cantidad M y, en compensación, se incrementa en el segundo criterio en M , $x = (-M, M)$. Tenemos que $d = (-M, M)$, $r = h(r) = (-r_M, r_M)$. Consideremos el límite cuando M tiende a infinito, $M \rightarrow \infty$. Queda, por lo tanto, $r = (-1, 1)$. Se dice que r es un punto de información totalmente contradictorio (ITC). La pregunta es ¿qué ocurre con el valor $I_z(-1, 1)$?

1. Si $I_z(-1,1) = 1$, que ocurre cuando $z = 1$, en tanto $x \sim y$ con credibilidad 1, se dirá que la compensación es total. En consecuencia, $\alpha = \psi(1) = 1$.
2. Si $I_z(-1,1) = 0$, condición que se cumple cuando $z \rightarrow \infty$, no hay el mínimo efecto compensatorio ($x \sim y$, es absolutamente no creíble) y se tendrá que $\alpha = \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = 0$.
3. Si $0 < I_z(-1,1) < 1$ estamos en una situación intermedia, la compensación ha sido parcial, lo que corresponde a la condición $0 < \alpha < 1$. El caso importante de esta situación intermedia es cuando $I_z(-1,1) = J_z(-1,1)$, que ocurre cuando $z = 2,2153$, y que se toma como el nivel medio de compensación $\alpha = \psi(2,2153) = 0,5$.

Como R_z es simétrica en criterios se tiene que $R_z(-1,1) = R_z(1, -1)$, de donde se tiene que $J_z(-1,1) = [1 - \sqrt{I(-1, 1)}]^2$. Las condiciones anteriores pueden expresarse también en términos de $J_z(-1,1)$. En resumen queda:

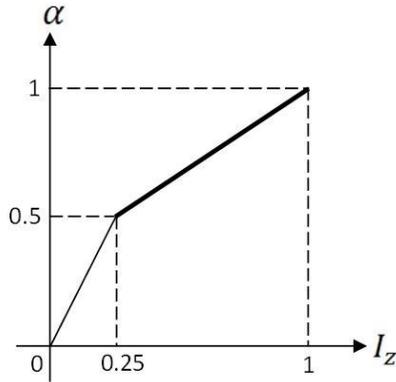
$$\begin{aligned}
 I_z(-1,1) = 1 &\Leftrightarrow J_z(-1,1) = 0 \Rightarrow z = 1, \alpha = \psi(1) = 1 \\
 I_z(-1,1) = 0 &\Leftrightarrow J_z(-1,1) = 1 \Rightarrow z \rightarrow \infty, \alpha = \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = 0 \\
 I_z(-1,1) = J_z(-1,1) &= 0,25 \Rightarrow z = 2,2153, \alpha = \psi(2,2153) = 0,5.
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

El modo más simple para definir la relación entre $\alpha \notin \{0, 0,5, 1\}$ e $I_z(-1, 1)$ y $J_z(-1, 1)$ es mediante interpolación lineal. Si $\alpha > 0,5$ (que ocurre cuando $I_z > J_z$), puesto que estamos en la situación compensatoria, interpolamos I_z ; si $\alpha < 0,5$ (que ocurre cuando $J_z > I_z$), estamos en una situación no compensatoria e interpolamos J_z .

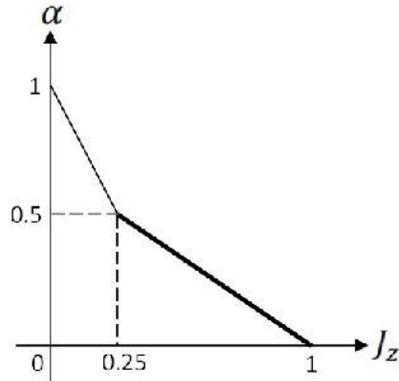
La Figura 32 muestra la interpolación lineal. Una vez obtenidas las ecuaciones de las rectas,

se determina la relación entre α y z .

Figura 32: Interpolación lineal



(a) $\alpha = f(I_z)$



(b) $\alpha = f(J_z)$

Definición 36 (Función grado de compensación). Consideremos el espacio \mathbb{R}^2 . Sean $I_z = I_z(-1, 1)$, $J_z = J_z(-1, 1)$ las funciones de credibilidad de la indiferencia e incomparabilidad difusas. La función $\alpha = \psi(z)$ que determina la compensación o grado de compensación α en función del z , el parámetro de la base $B(z)$ del cono $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$ es igual a:

$$\alpha = \psi(z) = \begin{cases} f(I_z) = 0,5 + \frac{I_z(-1,1) - 0,25}{1,5} & \text{si } I_z(-1, 1) \geq J_z(-1, 1) \\ f(J_z) = \frac{1 - J_z(-1,1)}{1,5} & \text{si } J_z(-1, 1) \geq I_z(-1, 1) \end{cases} \quad (6.19)$$

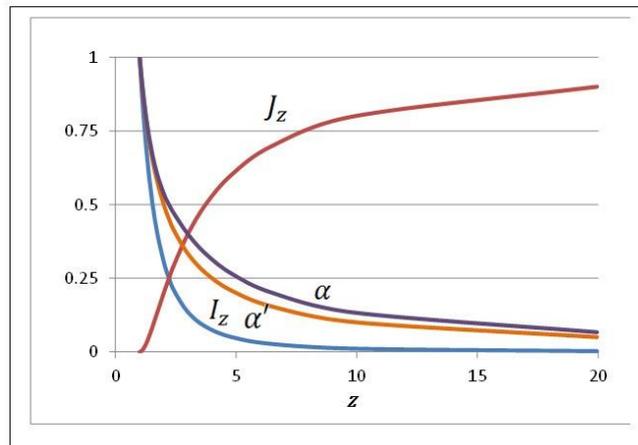
En la Tabla 18 y Figura 33 se presentan la función $\alpha = \psi(z)$ y, con finalidad comparativa, la función $\alpha' = 1/z$. Se grafican además $I_z = I_z(-1, 1)$, $J_z = J_z(-1, 1)$.

Tabla 18: Funciones $\alpha = \psi(z)$, $\alpha' = 1/z$

z	$\alpha = \psi(z)$	$\alpha' = 1/z$
0	1,00	1,00
0,16	0,87	0,86
0,39	0,73	0,72
0,54	0,67	0,65
0,74	0,60	0,58

0,22	0,50	0,45
0,45	0,47	0,41
0,00	0,40	0,33
0,73	0,33	0,27
0,51	0,20	0,15
0,90	0,13	0,10
0,95	0,07	0,05

Figura 33: Funciones $\alpha = \psi(z)$, $\alpha' = 1/z$



La función inversa $z = \varphi(\alpha)$ determina el valor de z para una compensación α dada. Esta función se calcula numéricamente¹¹.

Para definir la relación entre α y z para $n > 2$, n par, aplicamos el mismo procedimiento para $r = (-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ (igual número de positivos y negativos) y obtenemos $z = \varphi_n(\alpha)$. Al realizar una regresión de los valores de $\varphi_n(\alpha)$ para $\varphi(\alpha)$ se obtiene la siguiente relación econométrica:

$$\varphi_n(\alpha) = \frac{n}{2}[\varphi(\alpha) + 1] - 1 + \varepsilon_\alpha \quad (6.20)$$

que se utiliza para definir $\varphi_n(\alpha)$ para cualquier valor de n .

6.6. Representación gráfica del modelo difuso

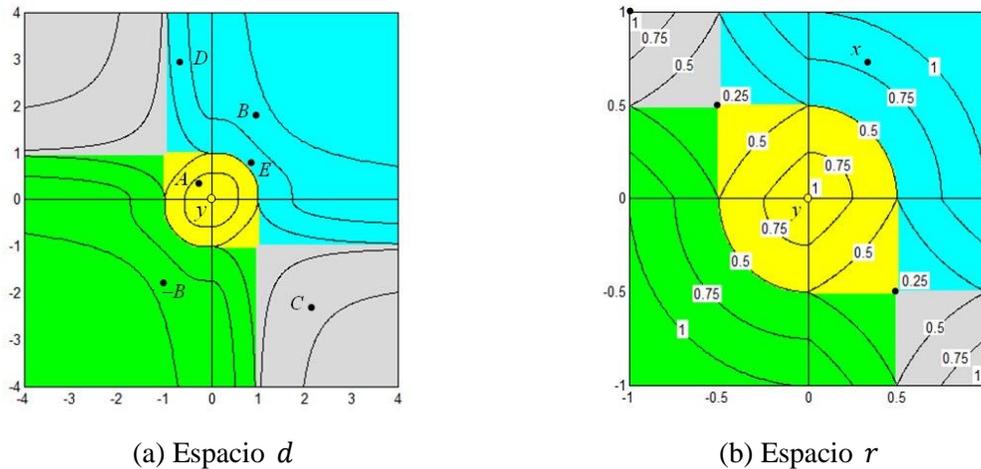
De manera similar al caso no difuso, el modelo difuso que corresponde a la estructura

¹¹ Dado que $\alpha = \psi(z)$ es monótona decreciente, se aplica el método de la bisección

(\mathbb{R}^2, I, P, J) se pueda representar gráficamente en el espacio afín $(\mathbb{R}^2; y)$. Puesto que las relaciones son difusas, en el gráfico se incluyen las curvas de nivel de I, P, P^{-1}, J . Los modelos se pueden representar gráficamente en los espacios r y d . La compensación se establece según el valor del parámetro α . La denominación del modelo se copia del modelo no difuso del cual proviene: no compensatorio cuando $\alpha = 0$, parcialmente compensatorio¹² si $0 < \alpha < 1$, y (totalmente) compensatorio cuando $\alpha = 1$.

$\alpha = 0$. Modelo no compensatorio. En el modelo no compensatorio, en el espacio r , se indica la altura de las curvas de nivel, de altura 1, 0,75 y 0,5 para las relaciones difusas I, P, P^{-1} y J (Figura 34). Esta indicación se omite en los otros gráficos. De manera general, se observa que la región de indiferencia, que en el caso no difuso constaba únicamente del punto origen, se ha extendido a una región circular achatada centrada en el origen. Las regiones de preferencia y preferencia inversa se han extendido desde los ejes hacia los cuadrantes 2 y 4, lo que reduce la región de no comparabilidad.

Figura 34: Modelo difuso no compensatorio, $\alpha = 0$



En los puntos $A, B, -B, C$ y D de la Figura 34 se tiene que:

1. Si x está cerca de y , entonces x está alrededor del origen. La relación de mayor

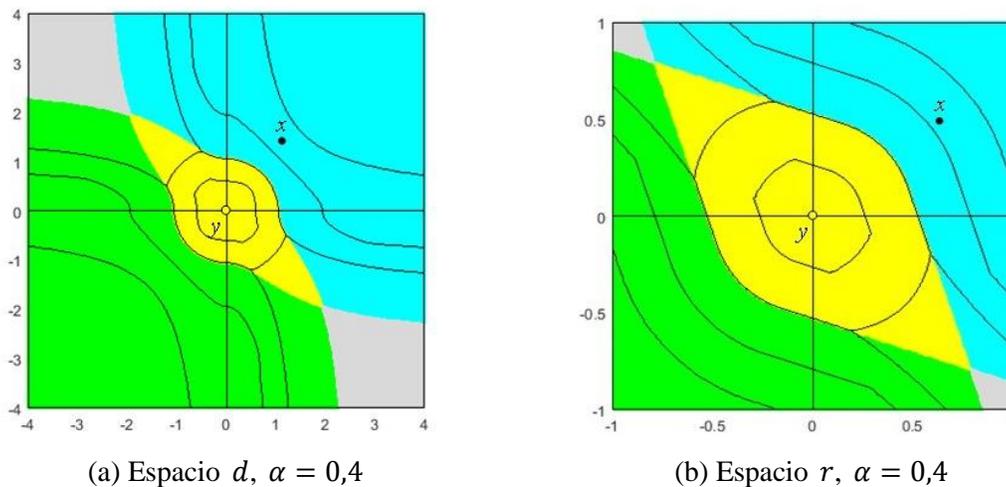
¹² En el caso no difuso, el modelo compensatorio es un caso especial del modelo parcialmente compensatorio. En el caso difuso, se cumple que el modelo compensatorio es el límite del modelo parcialmente compensatorio cuando $\alpha \rightarrow 1$, por esta razón, a diferencia del caso difuso, se excluye del modelo parcialmente compensatorio el caso $\alpha = 1$.

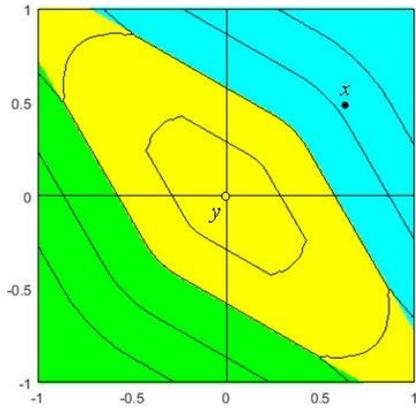
credibilidad es la indiferencia $x \sim y$; y, cuanto más cercanas están las alternativas, mayor es la credibilidad. Cuando $x = y$, la credibilidad de la indiferencia es 1.

2. Si x está mejor que y en ambos criterios, entonces x está en el cuadrante positivo. cuanto más grandes son las diferencias, mayor es la credibilidad de la preferencia estricta $x \succ y$. Cuando las diferencias son en contra (punto $-B$), se tiene el caso simétrico, pero con la preferencia estricta inversa \prec .
3. Si x está mejor en un criterio y peor en otro respecto a y , entonces la información es contradictoria. Cuando las diferencias son grandes y nos acercamos a un punto de *ITC*, se incrementa la credibilidad de la incomparabilidad. La incomparabilidad es el resultado de la información contradictoria.
4. Cuando la ventaja a favor de x es relativamente grande y la desventaja en contra de x es relativamente pequeña, la ventaja compensa a la desventaja con creces y la relación de mayor credibilidad es la preferencia estricta $x \succ y$.
5. El punto E se analizará en la Sección 6.8.

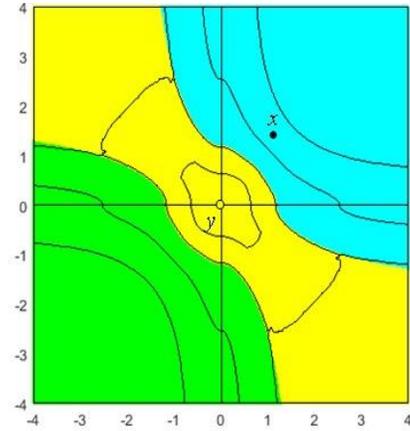
$0 < \alpha < 1$. Modelo parcialmente compensatorio. En el modelo parcialmente compensatorio, la información contradictoria simétrica se va valorando progresivamente como indiferencia: las desventajas pequeñas se equilibran con ventajas de similar magnitud.

Figura 35: Modelo parcialmente compensatorio, $0 < \alpha < 1$ con $\alpha=0,4$ y $\alpha=0,6$





(c) Espacio d , $\alpha = 0,6$

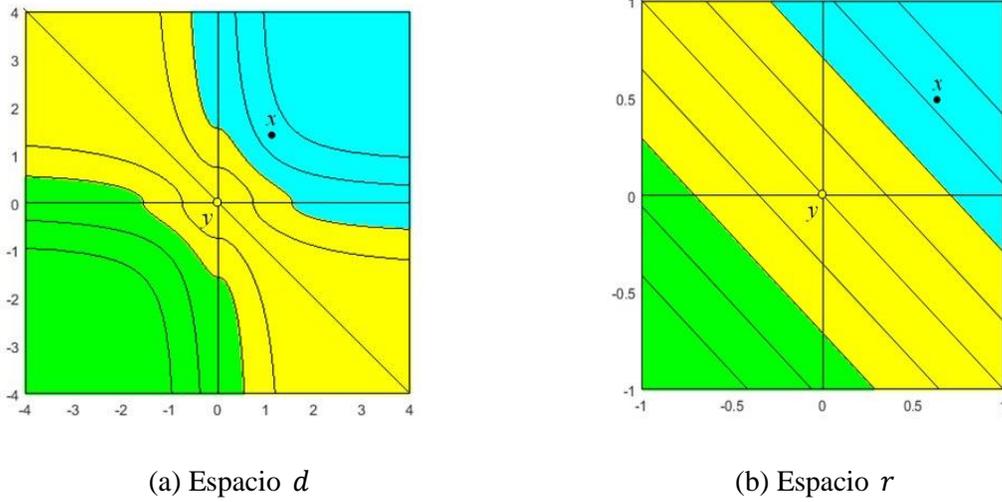


(d) Espacio r , $\alpha = 0,6$

En la Figura 35 se observa que conforme aumenta la compensación, las regiones de preferencia y preferencia inversa se extienden aún más, desde los ejes, hacia los cuadrantes 2 y 4, en tanto que la región de indiferencia se incrementa, se alarga sobre la diagonal de pendiente negativa, en consecuencia, la región de no comparabilidad se reduce más todavía. Cuando $\alpha < 0,5$, la región de no comparabilidad es no vacía, $J(y) \neq \emptyset$, pero cuando $\alpha \geq 0,5$, la región de no comparabilidad es vacía, $J(y) = \emptyset$.

$\alpha = 1$. Modelo compensatorio. El modelo (totalmente) compensatorio es el caso límite del modelo parcialmente compensatorio. Puesto que hay compensación total, cuando la información contradictoria es simétrica, la credibilidad de la indiferencia es igual a 1. El modelo es lineal en el espacio r , pero es no lineal en el espacio d (Figura 36).

Figura 36: Modelo compensatorio, $\alpha = 1$



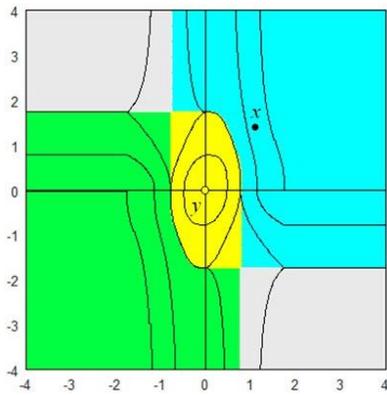
6.7. Ponderación de los criterios.

En los modelos anteriores no hay ponderación en los criterios; o, dicho de mejor manera, todos los criterios tienen igual peso o ponderación: $\omega_i = 1/n$ (de allí su simetría). Para definir un modelo con diferentes pesos o ponderaciones para los criterios, en la definición de la preferencia débil se utiliza la transformación ponderación de los criterios ω definida en el modelo no difuso (ver sección 4.5); pero, en este caso, aplicada al vector $r = h(d)$.

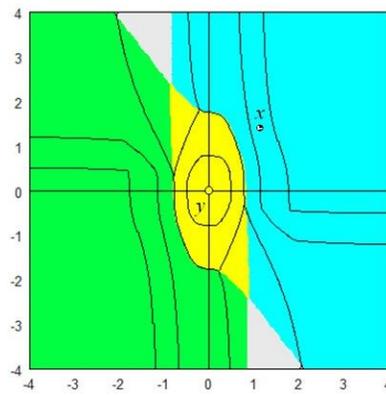
Definición 37 (Preferencia débil difusa ponderada) Sean $x, y \in R^n$, dos alternativas en escalas comparables calculadas a partir del vector de umbrales de indiferencia $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, con $c_i > 0$; $\alpha \in [0,1]$, el grado de compensación; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, el vector de ponderaciones de ponderaciones tal que $\omega_i > 0$ y $\sum \omega_i = 1$; $d = x - y$, el vector diferencia; y , $r = h(d)$, el vector transformado, donde h es la función de credibilidad vectorial estándar. La preferencia cuasi cónica débil difusa ponderada $R(x, y)$ se define por la pertenencia del vector $r' = \omega(r) = (n\omega_1 r_1, \dots, n\omega_n r_n)$ al cono $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$:

$$R(x, y) = gr(\omega(r) \in \mathbb{C}_+^n(\alpha)). \quad (6.21)$$

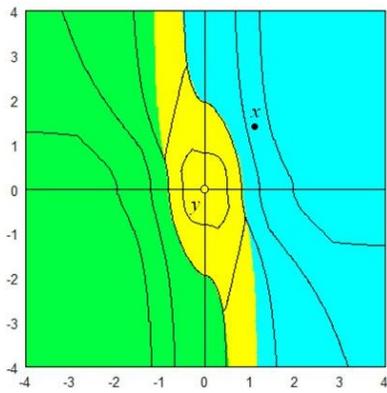
Figura 37: Modelo difuso ponderado en criterios



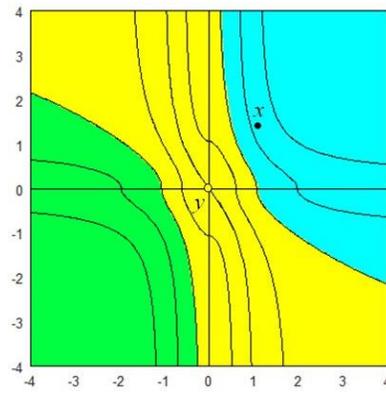
(a) No compensatorio, $\alpha = 0$



(b) Parcialmente compensatorio, $0 < \alpha < 1$ on $\alpha = 0,15$



(c) Parcialmente compensatorio, $0 < \alpha < 1$ con $\alpha = 0,4$



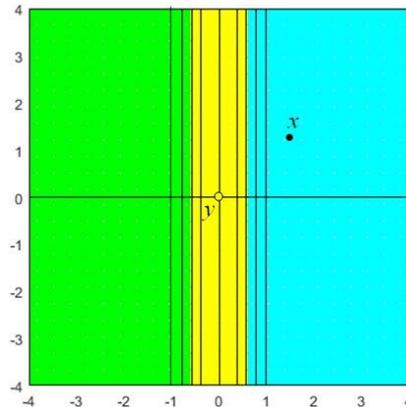
(d) Compensatorio, $\alpha = 1$

La Figura 37 presenta el modelo difuso para diferentes valores del parámetro de compensación α . Al igual que en el modelo no difuso y, tal como se muestran en la Figura 37, como efecto de una mayor ponderación del criterio 1 con respecto al criterio 2, el espacio d no sólo rota en dirección a las manecillas del reloj, sino que además se curva o retuerce en la dirección indicada. El diámetro el círculo unidad se acorta en el criterio más importante y se alarga en el criterio menos importante; y, las curvas de nivel se comprimen y estiran respectivamente.

Ponderaciones límite. Consideremos $n = 2$. Cuando $\omega_1/\omega_2 \rightarrow \infty$ ($\omega_1 \rightarrow 1$, $\omega_2 \rightarrow 0$), el segundo criterio se vuelve irrelevante; en consecuencia, la comparación entre las alternativas

sólo depende del primer criterio. Hay un único modelo con ponderación límite para $0 \leq \alpha \leq 1$ (Figura 38).

Figura 38: Ponderación límite, $\omega_1 \rightarrow 1, \omega_2 \rightarrow 0$



6.8. Sinergia

Al comparar la Figura 34(a), que corresponde al modelo no compensatorio en el espacio d , con la Figura 7(a) correspondiente a la preferencia sinérgica no difusa, a simple vista se observa que las regiones de ambos gráficos son iguales. Los dos modelos tienen iguales parámetros $\alpha = 0$ y $p = 2$. De esta manera, se justifica denominar al modelo no compensatorio de parámetro $p = 2$ como un modelo de sinergia positiva.

En el punto E (ver Figura 34(a)), la sinergia causa que la combinación de ventajas irrelevantes $(x_i \sim y_i)$ genera un efecto relevante: $x \succ y$. En consecuencia, se tiene que existe un par de alternativas $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Omega_l(x, y) = \Omega$, y $x \succ y$, esto es, se satisface la Definición 15 de sinergia.

En contraposición a lo anterior, la Figura 39 muestra la representación gráfica del modelo de parámetros $\alpha = 0$ y $p = \infty$.

Capítulo 7

Agrupación de criterios

Cuando se realiza un análisis multicriterio es común agrupar los criterios en dimensiones¹³: económica, social, ambiental, etc. Es razonable suponer que la compensación entre criterios de una misma dimensión (digamos un económico con otro económico), es diferente a la compensación entre criterios de distinta dimensión (digamos un económico con un ambiental). Para definir grados de compensación diferenciada se debe permitir aperturas diferentes entre los vectores de la base del cono $\mathbb{C}_+^n(\alpha)$. Veamos cómo hacerlo.

7.1. Partición de Ω y conos

La agrupación de los criterios en dimensiones es simplemente una partición del conjunto de índices Ω . Una partición de Ω es una familia de subconjuntos de Ω , disjuntos entre sí, no vacíos y tales que su unión es igual a Ω . Si $\Omega_{\mathcal{D}} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k\}$, es la partición, ocurre que $\Omega_j \subseteq \Omega$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y que $\cup \Omega_j = \Omega$. Si la j -ésima componente de la partición es, digamos, igual a $\Omega_j = \{i_1, i_2, \dots, i_{s_j}\}$, se tiene que s_j es la cardinalidad de Ω_j (el número de elementos). La dimensión j es simplemente la componente Ω_j . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que los índices de Ω_j son consecutivos.

Por ejemplo, supongamos que en total hay tres criterios agrupados en dos dimensiones: económica (2 criterios) y ambiental (1 criterio). Entonces, $\Omega = \{1,2,3\}$, y la partición es: $\Omega_{\mathcal{D}} = \{\Omega_1, \Omega_2\}$, $\Omega_1 = \{1, 2\}$ y $\Omega_2 = \{3\}$. En esta Sección se continuará con este ejemplo, que se denominará ejemplo*.

Si los criterios están agrupados en dimensiones, los parámetros de la compensación son: α_0 , la compensación global o entre dimensiones; y, $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ con $\alpha_j \geq \alpha_0$, las compensaciones intradimensionales o locales entre criterios de cada dimensión j , o componente Ω_j . Al conjunto de todos los criterios, Ω , se asocia el cono $\mathbb{C}_+^n(\alpha_0) \subset \mathbb{R}^n$ de base $B(z_0) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ con $z_0 = \varphi_n(\alpha_0)$; en tanto que a la dimensión j , es decir a Ω_j , se asocia el cono local $\mathbb{C}_+^{s_j}(\alpha_j) \subset \mathbb{R}^{s_j}$ de base $B(z_j) = \{g_1, g_2, \dots, g_{s_j}\} \subset \mathbb{R}^{s_j}$

¹³ Los sinónimos para el término “dimensiones” son: ejes, aspectos, temas, temáticas, aristas y otros.

con $z_j = \varphi_{s_j}(\alpha_j)$. Por otra parte, la agrupación de los criterios, es decir la partición $\Omega_{\mathcal{D}}$, induce una partición análoga en la base $B(z_0)$ o en cualquier otra base de \mathbb{R}^n . La partición en $B(z_0)$ es $B_{\mathcal{D}} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ con $B_j = \{b_i \in B(z_0) \mid i \in \Omega_j\}$. El cono $\mathbb{C}_+^{s_j}(B_j) \subset \mathbb{R}^n$ se denomina cono global asociado a la dimensión j .

Para el ejemplo*, asumamos que no hay compensación entre la dimensión económica y la dimensión ambiental, esto es, $\alpha_0 = 0$; y, que los criterios económicos tienen un grado de compensación media, digamos $\alpha_1 = 0,5$. Se tiene que $z_0 = \varphi_3(\alpha_0) = \infty$, y, en consecuencia $B(z_0) = \{b_1, b_2, b_3\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica. Para los criterios económicos, el parámetro toma el valor $z_1 = \varphi_2(\alpha_1) = 2,215$. La partición $B_{\mathcal{D}}$ es $B_{\mathcal{D}} = \{B_1, B_2\}$, $B_1 = \{b_1, b_2\} = \{e_1, e_2\}$, $B_2 = \{b_3\} = \{e_3\}$. Las bases de los conos $\mathbb{C}_+^3(\alpha_0)$, $\mathbb{C}_+^2(\alpha_1)$ y $\mathbb{C}_+^2(B_1)$ son:

$$B(z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(z_1) = \begin{bmatrix} 1 & -0,451 \\ -0,451 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Las Figura 40 y Figura 41 muestran las representaciones gráficas del cono base, $\mathbb{C}_+^3(\alpha_0)$ (un sólido en \mathbb{R}^3); del cono global asociado a la dimensión económica, $\mathbb{C}_+^2(\alpha_1)$ (un plano en \mathbb{R}^3); y, del cono local, $\mathbb{C}_+^2(B_1)$ (un cono en \mathbb{R}^2).

Figura 40: $\mathbb{C}_+^3(\alpha_0), \mathbb{C}_+^2(B_1) \subset \mathbb{R}^3$

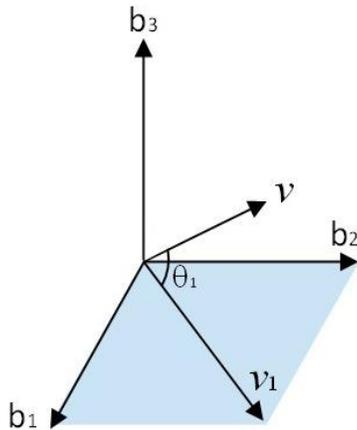
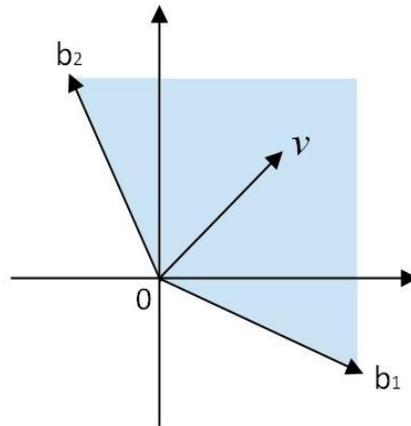


Figura 41: Cono local $\mathbb{C}_+^2(\alpha_1) \subset \mathbb{R}^2$



En la Sección 4.1 se indica que la compensación α_0 se asocia con la apertura de los

vectores de la base $B(z) \subset \mathbb{R}^n$, que se mide por el ángulo entre el vector $b_i \in B(z)$ y el vector bisectriz de \mathbb{R}_+^n , $v = (1, 1, \dots, 1)$. La compensación global ahora se nota α_0 , y la base correspondiente es $B(z_0)$. Para el caso de criterios agrupados en dimensiones, la compensación entre dimensiones α_0 se asocia con la apertura de los conos globales asociados a las dimensiones con respecto al vector v . La apertura entre el cono $\mathbb{C}_+^{S_j}(B_j)$ y el vector bisectriz v , se define como la apertura entre el vector bisectriz v_j del cono $\mathbb{C}_+^{S_j}(B_j)$ y el vector v . El vector bisectriz de un cono cualesquiera de base $B = \{b_1, \dots, b_s\}$, de vectores de igual norma, es el vector $v_j = v_j(B) = \sum_{i=1}^s b_i$.

En la Figura 40, la apertura de la dimensión económica con respecto a la bisectriz v es $\theta_1 = 35,26^\circ$.

Nótese que si $|B_j| = 1$, es decir si $B_j = \{b_i\}$, el cono $\mathbb{C}_+^1(B_j)$ es $\{\lambda b_i, \lambda \geq 0\}$, esto es, el semi rayo en la dirección b_i . En este caso, la apertura entre cono $\mathbb{C}_+^1(\{b_i\})$ y el vector bisectriz v es igual a la apertura entre el vector b_i y el vector bisectriz v .

7.2. Conos mixtos

Un cono mixto es un cono cuyos parámetros combinan la compensación global α_0 y las compensaciones locales $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ con $\alpha_j \geq \alpha_0$. Es decir, combina la apertura entre las dimensiones y las aperturas entre los vectores de los conos locales.

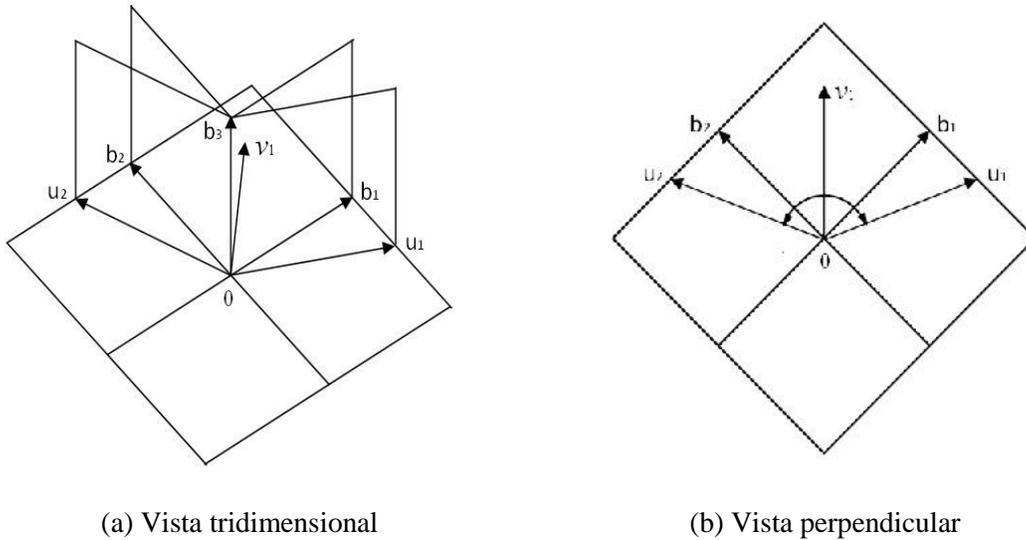
En el ejemplo*, para tener un cono con compensación global α_0 y compensación local α_1 , una posibilidad es simplemente remplazar en las celdas de la matriz $B(z_0)$, en el bloque correspondiente a B_1 , los valores de la matriz $B(z_1)$. Llamemos a esta matriz $E(z_0, z_1) = \{u_1, u_2, u_3\} = \{u_1, u_2, b_3\}$.

$$E(z_0, z_1) = \begin{bmatrix} 1 & -0,451 & 0 \\ -0,451 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

La Figura 42(a) muestra los vectores de las bases $B(z_0)$ y $E(z_0, z_1)$ en el espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , y los conos generados por estas bases; específicamente los tres planos que limitan a los conos. Por ejemplo, la frontera del cono de base $E(z_0, z_1)$ son los tres conos generados por: $\{u_1, u_2\}$, $\{u_1, b_3\}$ y $\{u_2, b_3\}$. La Figura 42(b), en el plano \mathbb{R}^2 ,

muestra la vista perpendicular al plano horizontal.

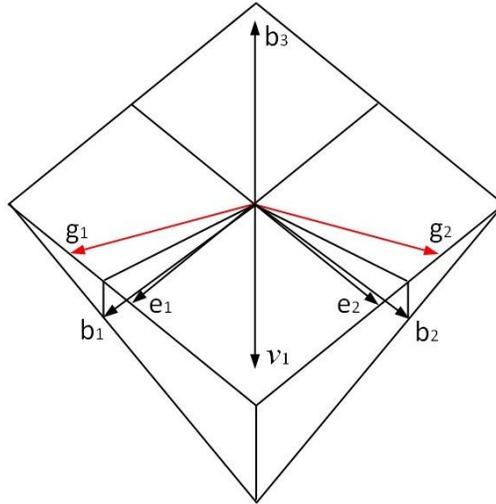
Figura 42: Conos de bases $B(z_0)$ y $E(z_0, z_1)$



Estos gráficos muestran que la apertura entre los vectores $\{u_1, u_2\}$ es exactamente igual a la apertura entre los vectores en el cono local $\mathbb{C}_+^2(\alpha_1)$. Gráficamente, los vectores g_1 y g_2 coincide con los vectores u_1 y u_2 , respectivamente.

La solución anterior presenta problemas cuando $\alpha_0 \neq 0$, es decir cuando hay algún grado de compensación entre las dimensiones. Si en el ejemplo* se toma $\alpha_0 = 0,33$, se tiene $z_0 = 3,732$; $1/z_0 = 0,268$; y, el plano generado por $\{b_1, b_2\}$ está inclinado con respecto al plano horizontal (ver Figura 43).

Figura 43: Base $B(z_0)$ y bloques I_1 y G_1



Ahora se trabajará con las matrices $B(z_0)$ y $B(z_1)$, y la matriz $G(z_1) = \{g_1, g_2, e_3\}$ se obtiene de reemplazar en la matriz identidad los valores de la matriz $B(z_1)$ en el bloque correspondiente a I_1 :

$$B(z_0) = \begin{bmatrix} 1 & -0,268 & -0,268 \\ -0,268 & 1 & -0,268 \\ -0,268 & -0,268 & 1 \end{bmatrix}, \quad B(z_1) = \begin{bmatrix} 1 & -0,451 \\ -0,451 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.3)$$

$$G(z_1) = \begin{bmatrix} 1 & -0,451 & 0 \\ -0,451 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La Figura 43 muestra la base $B(z_0)$ y los bloques $I_1 = \{e_1, e_2\}$ y $G_1 = \{g_1, g_2\}$.

Si notamos $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ la proyección canónica definida por $p(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_s)$, se cumple que $p(G_1) = B(z_1)$.

Para encontrar la base mixta se incrementa la apertura de los vectores $\{b_1, b_2\}$, rotándolos sobre el plano generado por estos vectores, simétricamente con respecto a la bisectriz v_1 ; pero, en dirección opuesta a este vector, y hasta que los vectores rotados (notados como $\{u_1, u_2\}$), pertenezcan a los planos generados por $\{g_1, b_3\}$ y $\{g_2, b_3\}$, respectivamente. En el caso general ($n > 3$), el vector b_3 se reemplaza por v_{-j} , la bisectriz de $B_{-j} = B \setminus B_j$ (el

complemento de la dimensión j).

Al rotar los vectores simétricamente con respecto a la bisectriz v_1 , ésta no cambia, por tanto, se mantiene la compensación global. Por otra parte, la apertura de los vectores $\{g_1, g_2\}$ está determinada por la compensación local α_1 . De esta manera, el cono de base $\{u_1, u_2, b_3\}$ combina la compensación global y la compensación local.

La condición que u_i rota sobre el plano generado por $\{b_1, b_2\}$, en dirección opuesta a la bisectriz, v_1 , se escribe en el caso general:

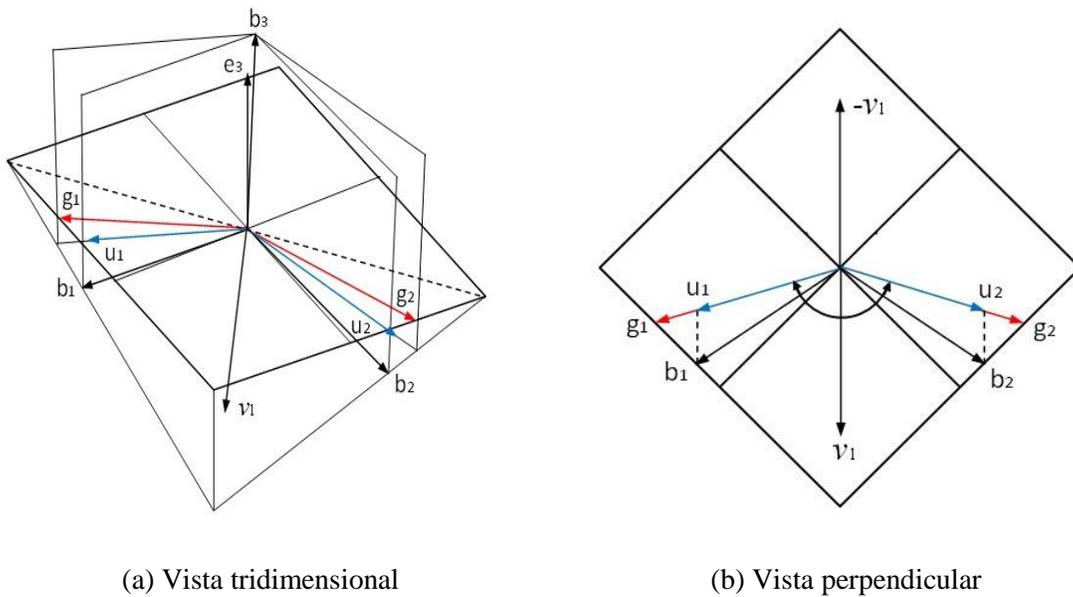
$$u_i = \begin{cases} b_i & \text{si } s_j = 1, \\ b_i - \beta v_j & \text{si } s_j > 0 \end{cases} \text{ para } i \in \Omega_j \text{ con } \beta > 0. \quad (7.4)$$

La condición que u_i pertenece al plano generado por $\{g_i, v_{-j}\}$ se escribe

$$u_i = \gamma g_i - \delta v_{-j}, \text{ con } \gamma, \delta > 0 \text{ e } i \in \Omega_j. \quad (7.5)$$

A la base conformada por los vectores u_i la notamos $E(z_0, z_1, \dots, z_k)$. La preferencia cónica determinada por esta base tiene compensación global α_0 y compensaciones locales $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$.

Figura 44: Conos de base $B(z_0)$ y de base $E(z_0, z_1) = \{u_1, u_2, b_3\}$



La Figura 44(a) muestra la construcción de la base $E(z_0, z_1)$ para el ejemplo*. La Figura 44(b) muestra el detalle del incremento de la apertura entre los vectores $\{b_1, b_2\}$ en la vista paralela al vector b_3 .

Siguiendo con el ejemplo*, los vectores bisectriz de $B_1 = \{b_1, b_2\}$ y $B_{-1} = B \setminus B_1$ son:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0,732 \\ 0,732 \\ -0,536 \end{bmatrix}, \quad v_{-1} = b_3 = \begin{bmatrix} -0,268 \\ -0,268 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

La combinación de las condiciones descritas en las ecuaciones (7.4) y (7.5) es $u_i = b_i - \beta v_j = \gamma g_i - \delta v_{-j}$, equivalente a $\beta v_j + \gamma g_i - \delta v_{-j} = b_i$, que en forma matricial es:

$$[v_j \ g_i \ -v_{-j}] [\beta \ \gamma \ \delta]' = [b_i]. \quad (7.7)$$

Para el ejemplo*, el sistema de ecuaciones (7.7) queda:

$$\begin{array}{cccc} v_1 & g_1 & -v_{-1} & b_1 \\ \begin{bmatrix} 0,732 & 1 & -0,268 \\ -0,732 & -0,451 & -0,268 \\ -0,536 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & & \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,268 \\ -0,268 \end{bmatrix} \end{array} \quad (7.8)$$

La solución es: $\beta = 0,093$; $\gamma = 0,847$; $\delta = 0,218$; de donde se obtiene que la base $E(z_0, z_1) = \{u_1, u_2, b_3\}$ es igual a:

$$E(z_0, z_1) = \begin{bmatrix} 0,932 & -0,336 & -0,268 \\ -0,336 & 0,932 & -0,268 \\ -0,218 & -0,218 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Para la base $E(z_0, z_1)$ es vector bisectriz es:

$$v'_1 = \begin{bmatrix} 0,596 \\ 0,596 \\ -0,436 \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

que es colineal con el vector bisectriz v_1 ($v'_1 = 0,814v_1$). Adicionalmente, el ángulo entre b_i y v_1 ; y entre u_i y v_1 son $56,97^\circ$ y $62,10^\circ$ respectivamente (ver Figura 44).

Si notamos $\mathbb{V}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, nótese que se cumple que $\mathbb{C}_+^3(\{u_1, u_2, b_3\}) \cap \mathbb{V}^2 = \mathbb{C}_+^3(G_1)$.

7.3. Preferencia débil difusa R con criterios agrupados en dimensiones

Previo a la definición formal de cono mixto, se introduce la siguiente notación: \mathbb{V}^s es el

subespacio vectorial de \mathbb{R}^n definido por $\mathbb{V}^s = \mathbb{R}^s \times \{(0, \dots, 0)\}$ ($n - s$ ceros), con $s < n$.

Definición 38 (Cono mixto). Sean \mathbb{R}^n , el espacio vectorial con $n \geq 3$; la agrupación de los criterios en k dimensiones, $\Omega_{\mathcal{D}} = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k\}$, con $s_j = |\Omega_j|$ la cardinalidad de Ω_j ; el grado de compensación global o entre dimensiones, α_0 ; los grados de compensación local $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ con $\alpha_j \geq \alpha_0$; los parámetros de las bases cónicas $B(z_0) \subset \mathbb{R}^n$ y $B(z_j) \subset \mathbb{R}^{s_j}$, $z_0 = \varphi_n(\alpha_0)$, $z_j = \varphi_{s_j}(\alpha_j)$, respectivamente; el cono de base $B(z_0)$, $\mathbb{C}_+^n(\alpha_0) \subset \mathbb{R}^n$; la partición de $B(z_0)$ asociada a $\Omega_{\mathcal{D}}$, $B_{\mathcal{D}}$; los vectores bisectriz, $v_j = v(B_j)$ y $v_{-j} = v(B(z_0) \setminus B_j)$; y, la proyección canónica, $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$ con $2 \leq s < n$. Además, sean $E = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset \mathbb{R}^n$, $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset \mathbb{R}^n$ dos bases de \mathbb{R}^n . $E_{\mathcal{D}}$ y $G_{\mathcal{D}}$ las particiones de E y G asociadas a $\Omega_{\mathcal{D}}$, respectivamente.

Se dice que el cono $\mathbb{C}_+^n(E)$ tiene compensación global, α_0 , y compensación local, $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, si:

1. $\mathbb{C}_+^n(E_j \cup \{v_{-j}\}) \cap \mathbb{V}^{s_j} = \mathbb{C}_+^n(G_j)$
2. $p(G_j) = B(z_j)$.

Definición 39 (Preferencia cuasi cónica débil difusa con criterios agrupados en dimensiones). Con las condiciones de la Definición 38, para $x, y \in \mathbb{R}^n$, la preferencia débil difusa con los criterios agrupados en dimensiones se define por:

$$R(x, y) = gr(r \in \mathbb{C}_+^n(E)). \quad (7.11)$$

7.4. Simetría en criterios intragrupo

El concepto de simetría en criterios, “los criterios reciben igual tratamiento”, debe acomodarse cuando se agrupan los criterios en las dimensiones. El concepto se modifica a: “los criterios de una misma dimensión reciben igual tratamiento”. En este caso, permutar los criterios de una misma dimensión no cambiará la preferencia entre alternativas. Para que ocurra esto, la permutación solo puede reordenar los índices dentro de cada dimensión. Por ejemplo, para $\Omega_{\mathcal{D}} = \{\Omega_1, \Omega_2\}$, $\Omega_1 = \{1, 2\}$, $\Omega_2 = \{3, 4\}$, las cuatro permutaciones permitidas son: (1, 2, 3, 4), (2, 1, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (2, 1, 4, 3). La permutación (1, 3, 2, 4) no es permitida pues intercambia criterios entre dos dimensiones distintas.

Definición 40 (Simetría en criterios intragrupo). Sean (X, \succ) estructura de preferencia, $\Omega_D = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_k\}$ la agrupación de criterios en dimensiones, $\sigma \in \Gamma(\Omega)$ una permutación de los elementos de Ω .

1. La permutación σ es una permutación particionada asociada a la partición Ω_D si $\sigma(\Omega_j) = \Omega_j$, para $1 \leq j \leq k$. Al conjunto de estas permutaciones lo notamos $\Gamma(\Omega_D)$.
2. La estructura de preferencia (X, \succ) es simétrica en criterios intragrupo (EP SC IG) si para dos alternativas cualesquier $x, y \in X$ y para cualquier permutación particionada $\sigma \in \Gamma(\Omega_D)$ se tiene que:

$$x \succ y \Leftrightarrow \sigma(x) \succ \sigma(y). \quad (7.12)$$

Por construcción de la base mixta E , el cono $\mathbb{C}_+^n(E)$ determina una preferencia simétrica en criterios intragrupo.

Ejemplo 25. Para la base mixta del ejemplo*, la matriz de cambio de bases es:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 0,932 & -0,336 & -0,268 \\ -0,336 & 0,932 & -0,268 \\ -0,218 & -0,218 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

Puesto que $\Gamma(\Omega_D) = \{(1\ 2\ 3), (2\ 1\ 3)\}$; y, dado que $E^{-1}[a\ b\ c]' = E^{-1}[b\ a\ c]'$, se concluye que $E^{-1}d = E^{-1}\sigma(d)$ para cualquier $\sigma \in \Gamma(\Omega_D)$, lo que prueba la simetría.

Capítulo 8

Criterios difusos, estocásticos y categóricos

La preferencia débil difusa R y las relaciones difusas derivadas, I , P , J , están definidas sobre el espacio vectorial \mathbb{R}^n , es decir, las alternativas son vectores $x \in \mathbb{R}^n$. En aplicaciones del análisis multicriterio, es común trabajar con criterios que son variables difusas, estocásticas y categóricas. Esto es, las alternativas son vectores x cuyas coordenadas son números difusos, o variables aleatorias, o categorías ordenadas. En este caso, se tiene que $X = \prod \mathbb{X}_i$, donde $\mathbb{X}_i = \mathbb{R}$; o, $\mathbb{X}_i = \mathcal{D}$, con \mathcal{D} el conjunto de números difusos reales; o, $\mathbb{X}_i = \mathcal{S}$, donde \mathcal{S} es el conjunto de variables aleatorias reales; o, $\mathbb{X}_i = \mathcal{C}$, con \mathcal{C} un conjunto de categorías ordenadas.

Estas variables pueden ser transformadas a números reales, tal como se explica a continuación.

8.1. Números difusos reales y variables estocásticas

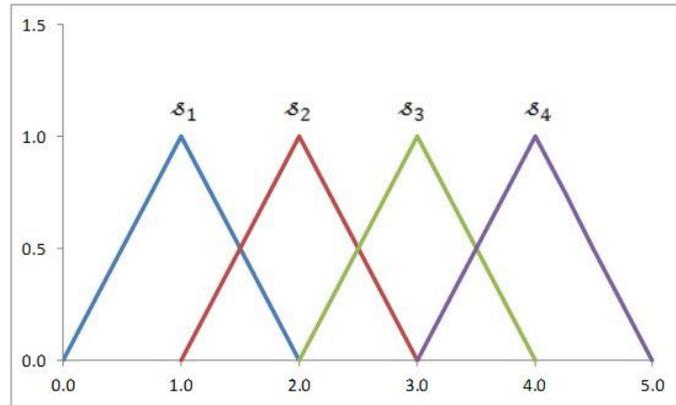
El número difuso real w se define por la función de pertenencia $\mu(x)$ definida en $[a, b]$. Con la constante de normalización $k_1 \in \mathbb{R}$, $\int_a^b k_1 \mu(x) dx = 1$, el número difuso puede considerarse una variable aleatoria.

Cuando x_i , la i -ésima coordenada de la alternativa x , es una variable aleatoria real, se puede aplicar simulación Montecarlo. Esto hace que, en cada simulación el valor de x_i sea un número real. Al final de las simulaciones, se calculan los valores promedios y las distribuciones empíricas de los resultados obtenidos.

8.2. Variables cualitativas ordinales

Cuando la alternativa x tiene por i -ésima coordenada una categoría $s_j \in \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ es un conjunto finito de categorías ordenadas $s_1 < s_2 < \dots < s_k$, asociamos la categoría s_j a una variable lingüística difusa; específicamente al número triangular difuso $(j - 1, j, j + 1)$, y procedemos como se indica en la Sección 8.1.

Figura 45: Variables lingüísticas difusas



8.3. Simulación de Montecarlo (Análisis de sensibilidad)

En procesos de evaluación multicriterio una recomendación común es realizar un análisis de sensibilidad, es decir, analizar el cambio en los resultados frente a (pequeñas) variaciones en los datos y parámetros.

El análisis de sensibilidad se realiza mediante simulación de Montecarlo. Para ello, todos los datos (no difusos) y parámetros reales, con la excepción de los umbrales de credibilidad¹⁴, se definen como variables difusas (intervalos o triángulos difusos), tal como se muestra en la Tabla 19.

Tabla 19: Datos y parámetros como variables difusas

Dato o parámetro		Variable difusa	Valor por defecto
Dato x_{ij}	difuso	x_{ij}	
	no difuso	$[x_{ij} - kc_i, x_{ij} + kc_i]$	$k = 1$
Grado de compensación α		$[\alpha - l_1, \alpha + l_1]$	$l_1 = 0,05$
Parámetro p		$[p - l_2, p + l_2]$	$l_2 = 0,5$
Pesos de los criterios ω_i		$[\omega_i - l_3\omega_i, \omega_i + l_3\omega_i]$	$l_3 = 0,10$

¹⁴ Los umbrales de credibilidad se utilizan para definir las variables difusas, por esta razón no se los modifica.

Capítulo 9

Agregación global de las preferencias

En un análisis específico para el cual se han fijado los parámetros (ver capítulos 6 a 8), las alternativas se ordenan en cada uno de los i criterios de acuerdo al semiorden, R_i , determinado por (\mathbb{R}, \succsim_i) . En general, los ordenamientos R_i son diferentes entre sí. El análisis multicriterio busca determinar un ordenamiento global \mathcal{R} que sintetice o recoja de mejor manera estos ordenamientos parciales.

En la introducción se indica que, de acuerdo a [Munda(2004)], en los modelos o métodos multicriterio que se fundamentan en la comparación por pares de alternativas, el proceso de agregación se descompone en dos partes diferenciadas. En la primera parte, se determina la o las matrices de comparación por pares; y, en la segunda, se establece la comparación global de las alternativas. En esta tesis, las matrices de comparación por pares corresponden a la preferencia débil difusa R y las relaciones derivadas de ésta: Indiferencia, I ; Preferencia, P ; e, incompatibilidad, J . Para la comparación global de las alternativas se definen dos opciones: un modelo descriptivo que detalla la relación estructural entre las alternativas; y un modelo de decisión que genera un ranking global en el conjunto de alternativas. Esquemáticamente:

M1. Modelo descriptivo: $\mathcal{H} = \mathcal{G}_1 \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{F} & & \mathcal{C} & & \mathcal{G}_1 \\
 \mathcal{H}: \mathfrak{R}^n & & \rightarrow \mathfrak{M} & \rightarrow & \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_3 & \rightarrow & \mathfrak{C} \\
 (R_1, R_2, \dots, R_n) & \mapsto & R & \mapsto & (I, P, J) & \mapsto & R^*
 \end{array} \quad (9.1)$$

M2. Modelo de decisión: $\mathcal{H} = \mathcal{G}_2 \circ \mathcal{C} \circ \mathcal{F}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{F} & & \mathcal{C} & & \mathcal{G}_2 \\
 \mathcal{H}: \mathfrak{R}^n & & \rightarrow \mathfrak{M} & \rightarrow & \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \times \mathfrak{M}_3 & \rightarrow & \mathfrak{B} \\
 (R_1, R_2, \dots, R_n) & \mapsto & R & \mapsto & (I, P, J) & \mapsto & \mathcal{R}
 \end{array} \quad (9.2)$$

El operador \mathcal{F} corresponde a la determinación de la preferencia débil difusa R ; en tanto que el operador \mathcal{C} corresponde a la construcción de las relaciones I, P, J . Los operadores \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 se definirán en lo que resta de este capítulo.

9.1. Modelo descriptivo. Operador \mathcal{G}_1

El modelo descriptivo se define mediante la generalización de la “regla de la mayoría” (May 1952, Dasgupta y Maskin 2003): para cada par de alternativas, se selecciona la relación con el mayor grado de credibilidad. La relación de mayor credibilidad es, en un sentido intuitivo, la relación “verdadera”. Este proceso lleva a una preferencia agregada que muestra la relación estructural entre las alternativas, presenta el mundo tal como es, complejo y, en ocasiones, incluso contradictorio. La preferencia agregada puede o no puede satisfacer algunas de las propiedades de las relaciones como transitividad, antisimetría, ausencia de ciclos, etc. Si el conjunto de alternativas es A , \mathfrak{C} es el conjunto:

$$\mathfrak{C} = \{R | R \text{ es una relación coloreada sobre } A\}.$$

La matriz o relación coloreada para el caso no difuso se define la Sección 5.3. Veamos ahora cómo se procede en el caso difuso.

Definición 41 (Relación coloreada difusa) Sean (X, \succ) una estructura de preferencia; $x, y \in X$ dos alternativas; $I(x, y)$, $P(x, y)$, $P^{-1}(x, y)$, $J(x, y)$, la credibilidad de las relaciones de indiferencia, preferencia estricta, preferencia inversa e incomparabilidad. El mayor grado de credibilidad de estas relaciones es:

$$gr = \max\{I(x, y), P(x, y), P^{-1}(x, y), J(x, y)\}. \quad (9.3)$$

La relación (el símbolo de la relación) de mayor credibilidad es:

$$T = \operatorname{argmax}\{I(x, y), P(x, y), P^{-1}(x, y), J(x, y)\}. \quad (9.4)$$

La preferencia agregada, R^* , denominada relación coloreada difusa, se define por:

$$R^*(x, y) = (T, gr). \quad (9.5)$$

De la Definición 41 se desprende que la matriz coloreada difusa es la matriz asociada a la relación coloreada difusa, cuyo fondo de la celda de (x, y) se pinta con el color de $T(x, y)$, y tiene por valor $gr(x, y)$. Nótese que en un modelo no difuso, una de las relaciones $I(x, y)$, $P(x, y)$, $P^{-1}(x, y)$, $J(x, y)$, tiene credibilidad 1; y, las tres restantes tienen credibilidad 0. En el caso difuso, estas relaciones tienen por credibilidad cualquier valor entre en el intervalo $[0,1]$. En ambos casos, la suma de los cuatro valores es igual a 1.

Tabla 20: Vectores diferencia d y r

	d		r	
	$PIB\ pc$	$CO_2\ pc$	$PIB\ pc$	$CO_2\ pc$
Ecu – CRic	-5	-2,72	-0,96	-0,88
Ecu – Per	-1,4	-4,23	-0,66	-0,95
Ecu – Col	-1,76	-5	-0,76	-0,96
Ecu – Dom	-1,69	-0,32	-0,74	-0,09
CRic – Per	3,6	-1,51	0,93	-0,69
CRic – Col	3,29	-2,29	0,92	-0,84
CRic – Dom	3,31	2,4	0,92	0,85
Per – Col	-0,31	-0,78	-0,09	-0,38
Per – Dom	-0,29	3,91	-0,08	0,94
Col – Dom	0,01	4,69	0	0,96

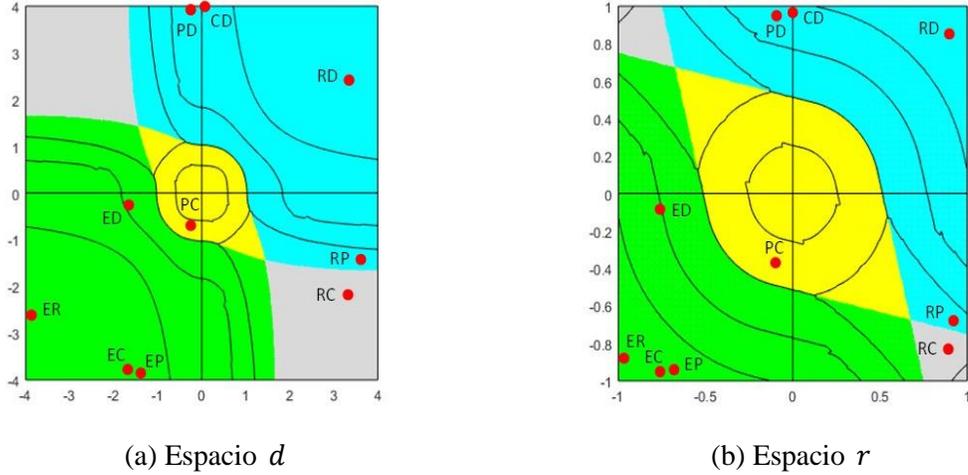
Ecuador (Ecu), Costa Rica (CRic), Perú (Per), Colombia (Col) y República Dominicana (Dom)

Ejemplo 26. Consideremos el ejemplo del Capítulo 5. Las alternativas en escalas comparables están representadas en la Tabla 15; y, los vectores diferencia, $d = x - y$, en la Tabla 16. El proceso continúa con el cálculo de los vectores transformados, $r = h(d)$, cuyos resultados se presentan en la Tabla 20. Adicionalmente, a modo de guía, esta tabla muestra los vectores d .

Regiones en el plano.

Sobre el gráfico de la regiones I, P, P^{-1}, J se grafican los vectores $d_{xy} = (x - y)$ y $r_{xy} = h(d_{xy})$ en los espacios d y r respectivamente (Figura 46).

Figura 46: Regiones y pares de alternativas



Los gráficos de la Figura 46 permiten extraer algunas conclusiones. Por ejemplo, dado que el punto RD está más a la derecha y arriba que la curva de nivel 1 (región celeste o $>$), se concluye que Costa Rica está mejor que República Dominicana en un grado igual a 1. Puesto que el punto ED está muy pegado a la curva de nivel 0,75 (región verde o $<$), se tiene que Ecuador está peor que la República Dominicana en un grado aproximadamente igual a 0,74. De igual manera, se puede analizar el resto de pares de alternativas.

Nótese las similitudes y diferencias entre la Figura 46 del modelo difuso, y la Figura 26(a) del modelo no difuso. La principal diferencia está en la forma de la región de indiferencia. En el caso no difuso, la región de indiferencia es un cuadrado de lado de longitud 2; y, en el caso difuso, esta región es un círculo de radio 1, unido a unas regiones similares a triángulos en la dirección de la diagonal de pendiente negativa que pasa por el origen.

Tabla 21: Distancias $d(r, \mathbb{C}_+^n)$ y $d(-r, \mathbb{C}_+^n)$; relaciones, $I(x, y)$, $P(x, y)$, $P^{-1}(x, y)$ y $J(x, y)$; y, función T

	$d(r, \mathbb{C}_+^n)$	$d(-r, \mathbb{C}_+^n)$	I	P	P^{-1}	J	T
Ecu – CRic	1	0	0	0	1	0	P-1
Ecu – Per	1	0	0	0	1	0	P-1
Ecu – Col	1	0	0	0	1	0	P-1
Ecu – Dom	0,74	0	0,26	0	0,74	0	P-1
CRic – Per	0,46	0,74	0,14	0,40	0,12	0,34	P

CRic – Col	0,6	0,7	0,12	0,28	0,18	0,42	<i>J</i>
CRic – Dom	0	1	0	1	0	0	<i>P</i>
Per – Col	0,39	0	0,61	0	0,39	0	<i>I</i>
Per – Dom	0	0,89	0,11	0,89	0	0	<i>P</i>
Col – Dom	0	0,93	0,07	0,93	0	0	<i>P</i>

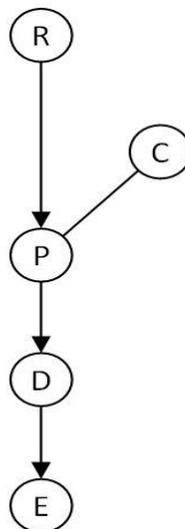
Ecuador (Ecu), Costa Rica (CRic), Perú (Per), Colombia (Col) y República Dominicana (Dom)

La Tabla 21 muestra los valores de las distancias $d(r, \mathbb{C}_+^n(\alpha))$ y $d(-r, \mathbb{C}_+^n(\alpha))$, con $\alpha = 0,3$; la cuarteta de valores, $\{I(x, y), P(x, y), P^{-1}(x, y), J(x, y)\}$; y, la función, $T(x, y)$. Se destaca en negrita el mayor valor en cada cuarteta. De la Tabla 21 se obtiene que la matriz coloreada es:

Matriz coloreada

	Ecu	CRic	Per	Col	Dom
Ecu	1	1	1	1	0,74
CRic		1	0,40	0,42	1
Per			1	0,61	0,89
Col				1	0,93
Dom					1

Figura 47: Grafo asociado



La relación coloreada, R^* , determina un orden parcial. Los mejores países son Costa Rica y Colombia, que no son comparables entre sí. El país con la menor evaluación es Ecuador. Nótese que el grafo asociado a la matriz coloreada coincide exactamente con el grafo de la Figura 27.

9.2. Modelo de decisión. Operador G_2

Si el interés es que el método multicriterio genere un ordenamiento lineal de las alternativas, es decir un ranking global entre las alternativas, se aplica una variante del método de Condorcet [Monjardet(1990), Cioni(2010)]. Se busca el semiorden difuso \mathcal{R} tal que maximice la suma:

$$\sum_{a_i \mathcal{R} a_j} P(a_i, a_j) + \sum_{a_i \mathcal{R} a_j, j > i} I(a_i, a_j). \quad (9.6)$$

Una vez determinado el semiorden difuso \mathcal{R} , se calcula el rango de las alternativas, lo que permite definir una puntuación para cada una de las alternativas.

El flujo de salida o rango positivo $Rang^+$; el flujo de entrada o rango negativo $Rang^-$; y, el flujo o rango neto $Rang$ de la alternativa a se define por:

$$\begin{aligned} Rang^+(a) &= \sum_{b \neq a} P(a, b) & Rang^-(a) &= \sum_{b \neq a} P(b, a) \\ Rang(a) &= \frac{1}{2} \sum_{b \neq a} [P(a, b) - P(b, a) + m - 1]. \end{aligned} \quad (9.7)$$

El método del flujo neto es una generalización del método de Borda¹⁵ (Bouyssou 1992, Cioni 2010). Al igual que en este método, el rango de una alternativa es un número en el intervalo $[0, m - 1]$. El método del flujo neto se aplica, por ejemplo, en el método PROMETHEE de (Brans y Mareschal 2005).

El flujo de salida es una medida de la fortaleza de la alternativa a y mide la magnitud en la que a es mejor que las otras $m - 1$ alternativas; el flujo de entrada es una medida de la debilidad de la alternativa a y mide la magnitud en la que las otras $m - 1$ alternativas son

¹⁵ Jean Charles, chevalier de Borda (1733-1799), y Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marqués de Condorcet (1743-1794), son considerados los primeros en aplicar los métodos matemáticos a las ciencias sociales, en particular, a los problemas de la construcción de una preferencia agregada (un problema multicriterio).

mejores que a ; el flujo neto es el balance entre el flujos positivo (de salida) y negativo (de entrada).

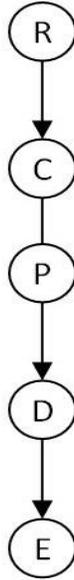
El procedimiento para determinar el preorden es ordenar, de mayor a menor, los “arcos” I y P según su valor (peso), e ir construyendo la relación el semiorden mediante la agregación de los arcos. Cuando se superpone un arco o se genera un ciclo, se salta dicho arco y se continúa con el arco siguiente.

Ejemplo 27. Los arcos I y P ordenados por su peso se listan en la Tabla 22. La aplicación del algoritmo genera un preorden cuyo grafo se presenta a continuación. En la aplicación del algoritmo, sólo el arco $P^{-1}(P, C)$ se descarta pues previamente se añade el arco $P(P, C)$.

Tabla 22: Nodos y pesos

Nodo	Peso
$P^{-1}(E, R)$	1
$P^{-1}(E, P)$	1
$P^{-1}(E, C)$	1
$P(R, D)$	1
$P(C, D)$	0,93
$P(P, D)$	0,89
$P^{-1}(E, D)$	0,74
$I(P, C)$	0,61
$P(R, P)$	0,40
$P^{-1}(P, C)$	0,39
$P(R, C)$	0,28

Figura 48: Grafo asociado



En este caso, el semiorden resulta ser un preorden:

$$\text{CostaRica} > \text{Colombia} \sim \text{Perú} > \text{República Dominicana} > \text{Ecuador}.$$

Al comparar este resultado con el resultado de la Sección 9.1, se observa que la incomparabilidad entre Costa Rica y Colombia de grado 0,42 se ha reemplazado por la preferencia de Costa Rica sobre Colombia con un grado de credibilidad de 0,28.

Capítulo 10

Modelo paramétrico compensatorio no-compensatorio

En las aplicaciones prácticas, los datos para la realización de un análisis multicriterio son: el conjunto de m alternativas, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq \mathcal{A}$, donde \mathcal{A} es el espacio de alternativas; el conjunto de n criterios de evaluación, $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$; la agrupación de los criterios en las dimensiones de análisis, Ω_D ; el grado de compensación global, $\alpha \in [0, 1]$; y, los grados de compensación local $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, con $\alpha_j \geq \alpha_0$. Para los n criterios están definidos los conjuntos de objetivos, $O = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$; de pesos o ponderaciones, $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, con $\omega_i > 0$ y $\sum \omega_i = 1$; y, de umbrales de indiferencia $c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, con $c_i > 0$ para las variables cuantitativas, y c_i no definidos para variables cualitativas.

Cada criterio f_i ($i = 1, \dots, n$), es una función $f_i: \mathcal{A} \rightarrow (\mathbb{X}, \succ_i)$, donde: $\mathbb{X} \in \{\mathbb{R}, \mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{C}\}$. La evaluación de la alternativa $a \in A$, en los n criterios es el vector $x = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_n(a)) \in \mathbb{X}^n$. Asociamos cada alternativa con su imagen y decimos que el espacio de alternativas es $\Pi \mathbb{X}_i$. La matriz de impacto es la matriz $M = (f_i(a_j))$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$), por lo que se dice que la matriz de impacto puede contener información tanto cualitativa como cuantitativa, cierta como difusa o estocástica.

En las secciones previas, el criterio i correspondía a la estructura (\mathbb{X}, \succ_i) . Es esta sección, el criterio i es una función $f_i: A \rightarrow (\mathbb{X}, \succ_i)$; es decir, no sólo describe al codominio de la función, (\mathbb{X}, \succ_i) , sino que además, especifica cómo se evalúa la i -ésima coordenada de cada una de las alternativas.

Si el objetivo del criterio i es de maximización se pone $o_i = 1$ (en este caso se prefiere más a menos o se sigue el orden en las variables categóricas); si el objetivo del criterio i es de minimización se pone $o_i = -1$ (se prefiere menos a más o se sigue el orden opuesto en las variables categóricas). Por ejemplo, si $\mathcal{C} = \{\text{bajo, medio, alto}\}$, entonces, en el criterio “Satisfacción con la vida” el objetivo será maximizar, y para el criterio “Contaminación” el objetivo será minimizar.

Tal como se explica en el Capítulo 8, con el tratamiento adecuado, puede considerarse que

$\Pi X_i = \mathbb{R}^n$. Adicionalmente, puesto que las variables categóricas se transforman en números difusos, internamente se establece un umbral igual a $0,7071 = \sqrt{2}/2$. Con este umbral, la credibilidad de que una categoría s_{k+1} sea mejor que su inmediata predecesora, s_k , es $2/3$.

10.1. Ejemplo de aplicación

Asumamos que estamos interesados en analizar el nivel de desarrollo de un grupo de países. En este problema multicriterio, el espacio de alternativas \mathcal{A} es el conjunto de países latinoamericanos. El conjunto de 5 alternativas es $A = \{\text{Ecuador, Colombia, Peru', CostaRica y Repu'blica Dominicana}\}$. Los 11 criterios se agrupan en cuatro dimensiones: económica (4 criterios), ambiental (3 criterios), social (3 criterios), y tecnológica (1 criterio). Los criterios son: PIB per cápita, tasa de inflación anual, porcentaje del valor agregado industrial respecto al PIB; porcentaje del área forestal respecto del territorio nacional, consumo de energía, emisiones de CO2 per cápita; tasa de desempleo, tasa de pobreza, concentración del ingreso, mortalidad infantil; y, porcentaje de las exportaciones de alta tecnología respecto del total de exportaciones manufactureras.

La información sobre los parámetros y la matriz de impacto de este análisis se presenta en la Tabla 23. Para el análisis de sensibilidad se simulan 1.000 casos.

Tabla 23: Matriz de datos

Dimensión	Económica			Ambiental		
Criterio	PIB pc*	Inflación	VAB Ind	Bosques	Energía*	CO ₂ pc*
Unidad	\$PPP	%	%	%	kEP	Kg
Objetivo	max	min	max	max	min	min
Umbral	20%	0,774	2,37	2,96	20%	20%
Peso	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083	0,083
Compensación local	0,30			0,25		
Compensación global	0,20					
Ecuador	7.830	3,56	38,12	39,72	836,3	2.111
Colombia	9.000	2,28	35,02	54,53	696,3	1.560
Perú	8.790	1,53	35,94	53,12	667,1	1.646
Costa Rica	11.260	5,66	26,25	51,02	997,8	1.812
República Dominicana	8.990	6,33	32,04	40,81	840	2.076

Dimensión	Social				Tecnológica
Criterio	Desempleo	Pobreza	Ingr 10%	Mortalidad	ExpTec
Unidad	%	%	%	casos/1000	%
Objetivo	min	min	min	min	max
Umbral	1,48	1,02	1,64	3,12	0,54
Peso	0,063	0,063	0,063	0,063	0,25
Compensación local	0,25				-
Compensación global	0,20				
Ecuador	5,00	5,48	38,28	23,60	4,0
Colombia	11,6	9,64	44,98	18,30	5,2
Perú	7,90	5,00	36,78	19,40	3,5
Costa Rica	7,30	2,30	39,50	10,10	44,2
República Dominicana	12,4	3,07	38,68	25,70	2,5

Para el cálculo, a las variables señaladas con * se les aplica la transformación logarítmica. Para estas variables, el umbral de indiferencia es $c_i = \ln(1 + 0,20)$; para los otros indicadores los umbrales de indiferencia son iguales al 20% del mínimo entre el promedio y

la longitud de los datos¹⁶.

Se toma como parámetro de la distancia de Minkowski $p = 2$.

10.2. Resultados

Con las simulaciones de Montecarlo y, a partir de la metodología propuesta en esta tesis, para las matrices de comparación por pares, se obtienen los siguientes resultados (valores promedio):

Tabla 24: Preferencia débil difusa R (valores promedios)

R	Ecu	Col	Per	CRic	Dom
Ecu	1,00	0,06	0,42	0,00	0,84
Col	0,65	1,00	0,57	0,00	0,78
Per	0,46	0,06	1,00	0,01	0,95
CRic	0,65	0,53	0,49	1,00	0,81
Dom	0,01	0,00	0,03	0,00	1,00

Tabla 25: Matriz de comparación por pares $I(x, y)$ (valores promedios)

R	Ecu	Col	Per	CRic	Dom
Ecu	1,00	0,04	0,19	0,00	0,01
Col	0,04	1,00	0,03	0,00	0,00
Per	0,19	0,03	1,00	0,01	0,03
CRic	0,00	0,00	0,01	1,00	0,00
Dom	0,01	0,00	0,03	0,00	1,00

¹⁶ Las exportaciones tecnológicas de Costa Rica un caso atípico y para calcular el umbral se excluye este dato.

Tabla 26: Matriz de comparación por pares $P(x, y)$ (valores promedios)

R	Ecu	Col	Per	CRic	Dom
Ecu	0.00	0.02	0.24	0.00	0.82
Col	0.62	0.00	0.54	0.00	0.78
Per	0.28	0.03	0.00	0.01	0.93
CRic	0.64	0.53	0.49	0.00	0.81
Dom	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabla 27: Matriz de comparación por pares $J(x, y)$ (valores promedios)

R	Ecu	Col	Per	CRic	Dom
Ecu	0.00	0.33	0.30	0.35	0.16
Col	0.33	0.00	0.41	0.47	0.22
Per	0.30	0.41	0.00	0.50	0.04
CRic	0.35	0.47	0.50	0.00	0.19
Dom	0.16	0.22	0.04	0.19	0.00

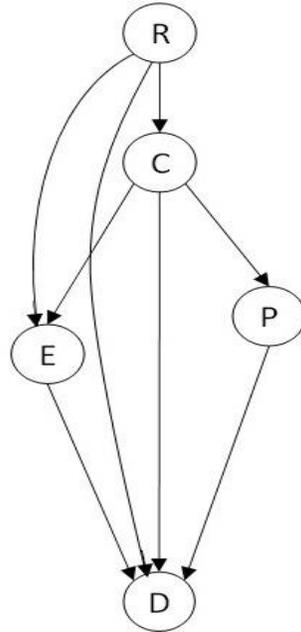
10.2.1. Matriz coloreada

De las matrices de comparación por pares se concluye que la matriz coloreada es la presentada a continuación (ver valores en negrilla de las matrices anteriores). Se presenta también el grafo asociado:

Matriz coloreada (valores promedios)

	Ecu	Col	Per	CRic	Dom
Ecu	1	0,62	0,30	0,64	0,82
Col		1	0,54	0,53	0,78
Per			1	0,50	0,93
CRic				1	0,81
Dom					1

Figura 49: Grafo asociado



El resultado es un orden parcial no transitivo: Costa Rica $>$ Colombia $>$ Perú, pero Costa Rica $\not\phi$ Perú. Costa Rica es la única alternativa no dominada (ningún país es mejor que Costa Rica); sin embargo, Costa Rica no se compara con Perú. El país con menor grado de desarrollo relativo es República Dominicana.

10.2.2 Rangos de las alternativas

Los rangos de Condorcet ordenan las alternativas de forma descendente tal como se muestra en la Tabla 28:

Tabla 28: Rangos de las alternativas (valores promedios)

	<i>Rango</i> ⁺	<i>Rango</i> ⁻	<i>Rango</i>
Costa Rica	2,47	0,00	3,23
Colombia	1,93	0,53	2,70
Perú	1,15	1,20	1,98
Ecuador	1,01	1,49	1,76
República Dominicana	0,00	3,33	0,33

De esta matriz se concluye que, al considerar en conjunto de 11 criterios, el orden de jerarquía de los países según su grado de desarrollo es:

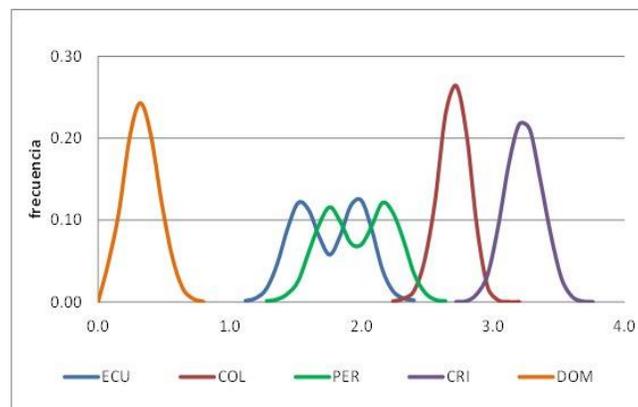
Costa Rica \succ Colombia \succ Perú \succ Ecuador \succ República Dominicana.

El rango de Condorcet fuerza a las relaciones Costa Rica \succ Perú, y Perú \succ Ecuador, que en la matriz coloreada (Sección 10.2.1), se determinaban como no comparables.

10.2.3. Análisis de sensibilidad

La Figura 50 muestra el gráfico de frecuencias de la distribución de probabilidad empírica de las simulaciones de Montecarlo de los rangos de las alternativas:

Figura 50: Frecuencias relativas de los rangos

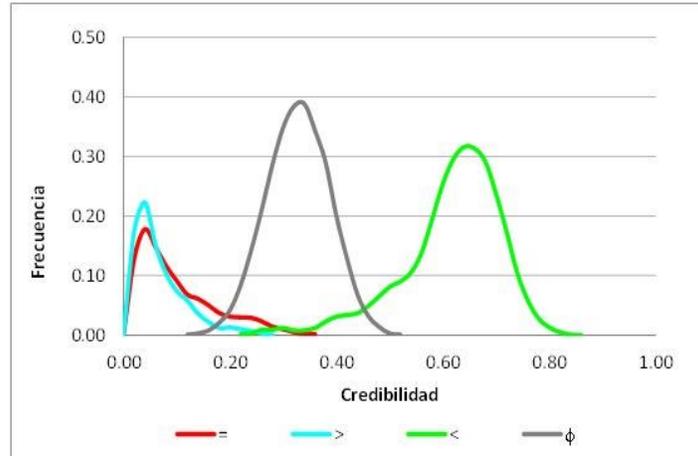


La Figura 50 confirma los resultados obtenidos con el rango de las alternativas (ver Sección 10.2.2). Se muestra, adicionalmente, la importante intersección entre Perú y Ecuador, la cual indica que estos países son similares. La valoración de República Dominicana se aleja de todo el grupo.

10.2.4. Comparación por pares

El análisis de sensibilidad también se aplica a la comparación por pares. Se expone únicamente un ejemplo de la distribución de las frecuencias relativas de las relaciones $I(x, y)$, $P(x, y)$, $P^{-1}(x, y)$, $J(x, y)$, con $x = \text{Ecuador}$ y $y = \text{Colombia}$.

Figura 51: Comparación por pares: Ecuador - Colombia



La relación de mayor credibilidad es la incomparabilidad $P^{-1}(<)$. Se concluye que Colombia está mejor que Ecuador.

Capítulo 11

Evaluación multicriterio de los proyectos multipropósito

11.1. Introducción

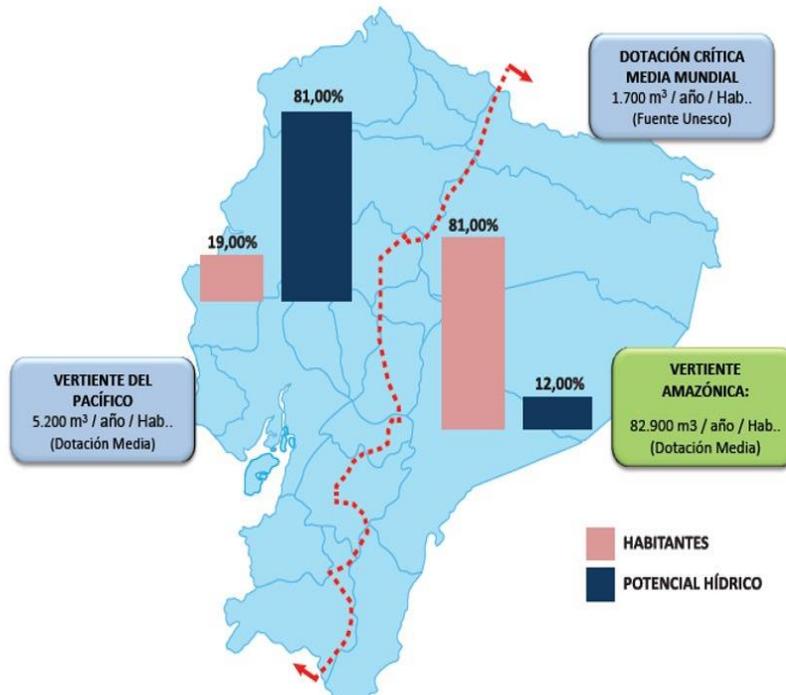
Los proyectos multipropósito son aquellas obras hidráulicas de gran envergadura que buscan gestionar los diferentes usos de los recursos hídricos (consumo humano, riego, control de inundaciones y generación de energía), en diferentes zonas del Ecuador. Dichos proyectos son impulsados por la Secretaría Nacional del Agua (SENAGUA), la institución encargada de dirigir la gestión integral y eficiente del uso y aprovechamiento de los recursos hídricos en país, a través de políticas, normas, control y gestión desconcentrada del agua. La SENAGUA promueve actualmente la ejecución de 17 proyectos multipropósito, de los cuales, seis se encuentran en construcción y otros 11 en estudios. Para cumplir con este objetivo, el Estado ha realizado una inversión que suma más de USD 1.000 millones¹⁷. Entre los mayores beneficios de los proyectos multipropósito se encuentran el potenciar el área con riego público en aproximadamente 600.000 hectáreas y proteger mediante el control directo de inundaciones a 200.000 hectáreas susceptibles a anegamiento (SENAGUA, 2013).

Ahora bien, el gobierno central no dispone de los recursos económicos necesarios para la construcción de todos los proyectos multipropósito, por tanto, se vuelve necesario jerarquizar los proyectos para identificar los “mejores” de tal manera que se los vaya ejecutando de acuerdo a la disponibilidad de recursos.

Los proyectos multipropósito se pueden evaluar de acuerdo a diferentes características, por ejemplo, el costo de inversión, el número de beneficiarios con agua potable, las hectáreas regadas, las hectáreas protegidas de inundaciones, etc. Una evaluación multicriterio permite integrar las variables o criterios de las distintas dimensiones (económica, social, ambiental, servicios y política), en un único marco de análisis lo que permite jerarquizar los proyectos con un enfoque integral, holístico y sistémico de la problemática.

¹⁷ Los Mega Proyectos de Senagua permiten el desarrollo del Ecuador. Disponible en: <http://www.presidencia.gob.ec/16-mega-proyectos-de-senagua-permiten-el-desarrollo-del-ecuador/>.

Figura 53: Disponibilidad de Recursos Hídricos. SENAGUA. 2014.



De estos sistemas hidrográficos, el 27% de agua disponible corresponde a la vertiente del Pacífico y 73% a la Amazónica. No obstante, la disponibilidad general para el Ecuador es de solamente del 34% del total, lo cual se traduce a 147.000 hectómetros cúbicos (MAGAP-PNRD 2013). La característica distintiva de estos dos sistemas es que la demanda del recurso hídrico está en contraposición a su disponibilidad natural, causando abundancia en algunas zonas y escasez en otras. La vertiente del Pacífico satisface una alta demanda para consumo humano, riego, industria, minería y otros; mientras que para la vertiente del Atlántico, la demanda es bastante menor y está concentrada en actividades hidrocarburíferas, mineras y recreativas (MAGAP-PNRD 2013).

Se puede ejemplificar este fenómeno, como un déficit hídrico en la Costa - Guayas, Manabí, Santa Elena y El Oro -, y la Sierra - Loja - (Galárraga 2005). El problema de desabastecimiento del agua por la mala distribución se acelera por la disminución de las precipitaciones y decrecimiento de las aguas subterráneas.

11.2.1. Riego

En la actualidad, el uso del agua para riego es aprovechado por sistemas públicos,

comunitarios-asociativos, y privados-particulares. Estos últimos, históricamente han acaparado el recurso hídrico, perjudicando a los sistemas comunitarios e individuales. Según la SENAGUA, en Ecuador 420.000 ha se riegan con sistemas privados, 266.000 ha con sistemas de riego públicos, y 466.000 ha con sistemas comunitarios y asociativos.

No obstante, el problema del riego en Ecuador se agudiza, dado que los sistemas actuales no tienen la capacidad de abastecer la totalidad de la demanda. En el 2006 la superficie de riego ascendió a 1.500.000 ha según la SENAGUA. De este total, el 18% se riega mediante infraestructura construida por el Estado, el 31% corresponde a sistemas comunitarios y asociativos, el 28% a sistemas privados particulares y un 23% a uso del agua sin concesión. Sin embargo, de la superficie total solo 942.100 ha, el 62,8%, estarían efectivamente regadas (MAGAP-PNRD, 2013).

El MAGAP, a través del Plan Nacional de Riego y Drenaje 2013, en las cuatro regiones del país, caracterizó las dificultades relacionadas con el riego, que se sintetizan en: i. el mal estado del sistema de riego, problema que afecta directamente a la productividad agrícola; ii. en la Costa se estima que existe un deficiente funcionamiento de los sistemas de riego por falta de organización, falta de mantenimiento de la infraestructura de canales y bombas, y proyectos en zonas con poco potencial productivo; iii. las dificultades de la Sierra están en la falta de mantenimiento de las acequias, explotación de las fuentes de agua, caudales bajos, limitaciones en el uso del agua y fragilidad en la sostenibilidad de los sistemas de riego; iv. en la Amazonía no existe infraestructura de riego y drenaje y no hay un sistema de almacenamiento que permita captar el agua de lluvias; v. en la Región Insular hay una notoria falta de infraestructura de riego y drenaje.

Por otro lado, hay que tomar en consideración que las precipitaciones han disminuido, así como la disponibilidad del agua, lo que ha provocado una reducción del agua para riego, afectando directamente a la productividad agrícola. Se evidencia que las bajas precipitaciones han afectado a las provincias que se abastecen de la Cuenca del Pacífico como Santa Elena, Manabí, Bolívar y Loja, llegando incluso a declararse en estado de emergencia. La disponibilidad del agua también se ve afectada por otros factores como el aumento de la demanda, la expansión de la frontera agrícola hacia ecosistemas claves para el almacenamiento y regulación de los ciclos del agua, y el aumento de la frecuencia de los

fenómenos climáticos extremos (MAGAP-PNRD 2013).

Finalmente, es importante mencionar la problemática social que históricamente se ha generado alrededor de la distribución, uso y manejo de los sistemas de riego. Estos problemas se los puede resumir en los siguientes: concentración en la tenencia del agua y la tierra; falta de información y conocimiento para la implementación de infraestructura de riego; y, el mal manejo y gestión de los sistemas de riego existentes.

11.2.2. Agua potable y saneamiento

Según el Plan Nacional del Buen Vivir 20013-2017 (SENPLADES, 2013), Ecuador tiene una alta disponibilidad hídrica que bordea los 20.700 m³/hab./año que supera en mucho a la media mundial, que se estima en alrededor de 1.700 m³/hab./año.

Los datos del Censo de Población y Vivienda realizado en el 2001 mostró que el 68% de las viviendas ecuatorianas tenían acceso a agua por red pública, mientras que el 48% tenían conexión a red pública de alcantarillado. Es importante señalar que la prestación de dichos servicios (agua potable y saneamiento) en el Ecuador son competencia de los Gobiernos Autónomos Descentralizados (GAD) Cantonales o Municipios, teniendo por obligatoriedad la captación, manejo, distribución, tratamiento y mantenimiento del agua para consumo y la disposición sanitaria.

En el año 2005, se realizó el Informe de la Organización de los Estados Americanos (OEA) sobre las Metas del Milenio Ecuador en Agua Potable y Saneamiento, en el cual se determinó que la mitad de los centros urbanos en el país presentaban un servicio intermitente, siendo la razón de este fenómeno, que la presión de agua se encontraba muy por debajo de la norma establecida, especialmente en barrios marginales. Además, se evidenció que en el 30% de los centros urbanos, el tratamiento para la potabilización del agua no era adecuado, y que el 92% de las aguas servidas se descargaban sin ningún tratamiento.

Finalmente, en cuanto al estado de los sistemas de agua potable y saneamiento en zonas rurales, se obtuvo el siguiente diagnóstico: 38% de los sistemas han colapsados y el 20% tienen un deterioro grave; el 29% tienen un deterioro leve; y solamente el 13% pueden

considerarse sostenibles. Por otro lado, el Banco del Estado de Ecuador, en el año 2009, realizó una evaluación a los municipios donde, del total de 217 municipios existente a la fecha, 31 municipios consumían agua sin ningún tipo de purificación, mientras otros 30 realizaban una desinfección semanal en los tanques de almacenamiento de agua (SENPALDES 2013, 13).

La cobertura de agua potable y saneamiento en el Ecuador ha mejorado en los últimos años, lo cual indica una mejora de la situación anteriormente señalada, según los datos del último Censo de Población y Vivienda 2010 indican que el 72% de las viviendas en el Ecuador tiene acceso a agua por red pública, no obstante, sólo el 54% se encuentran conectados a una red pública de alcantarillado.

En general, la mayor desproporción en la cobertura se observa entre las áreas urbanas y rurales, siendo especialmente críticas las carencias en las áreas rurales de la región Oriental y de las provincias de Cotopaxi, Tungurahua, Imbabura y Esmeraldas. Este problema viene acompañado de otros factores como la concentración en la distribución de la tierra y el agua, y se ha agudizado en los últimos años. En lo que a cobertura urbana se refiere, las carencias mayores se encuentran en las provincias de Napo, Guayas y Esmeraldas, con coberturas menores al 50%. Por otro lado, es importante mencionar que la única ciudad que cuenta con un sistema de tratamiento completo de sus aguas servidas es Cuenca. De los 214 cantones del país (en el momento de la redacción de este documento), apenas 19 tienen algún tipo de tratamiento, mayoritariamente lagunas de oxidación (Galárraga 2005).

En resumen, todavía persisten problemas que no permiten garantizar el derecho universal al agua limpia, segura y permanente para el consumo humano y adecuados sistemas de saneamiento, lo que al mismo tiempo genera una alta contaminación ambiental.

11.2.3. Eventos adversos

Tal como indica el Plan Nacional para el Buen Vivir 2013-2017 en Gestión de Riesgos, durante los últimos 25 años, grandes desastres afectaron los países de la región andina. Según la CEPAL (2003), aproximadamente el 33% de las pérdidas directas e indirectas (vidas humanas, infraestructura social y productiva) registradas en la región fue causado por eventos naturales. En nuestro país, el fenómeno de El Niño, durante uno de los episodios

más severos (1997-1998), causó pérdidas estimadas por USD 2.882 millones (CAF 2000).

Según la Secretaría de Gestión de Riesgos, la vulnerabilidad ha aumentado en muchos países y Ecuador no es la excepción, una de sus causas es el incremento de los riesgos urbanos debido a los elevados índices de urbanización, incluyendo asentamientos no planificados e inseguros en áreas inundables, costeras y montañosas (SENPLADES 2013).

Durante 1990 y 2009 se registraron 65 desastres de gran magnitud, el 60%, provocado por fenómenos hidrometeorológicos (sequías, inundaciones, deslizamientos húmedos). En 2012, la estación invernal afectó principalmente a las provincias de Azuay, El Oro, Esmeraldas, Guayas, Loja, Los Ríos y Manabí, que fueron declaradas en estado de excepción. En el año 2012, las precipitaciones fueron las mayores de los últimos 10 años y se vieron afectadas alrededor de 195.147 hectáreas, lo cual generó costos de al menos USD 237,9 millones (SENPLADES 2013).

Es importante recalcar que según la Segunda Comunicación Nacional sobre Cambio Climático Ecuador, entre los impactos con mayor probabilidad de afectar a nuestro país son: la intensificación de eventos climáticos extremos (fenómeno de El Niño), el incremento del nivel del mar; el retroceso de los glaciares y la disminución de la escorrentía anual (MAE 2011).

En definitiva, la vulnerabilidad climática en el Ecuador, a más de los impactos directos señalados anteriormente, genera consecuencias a la disponibilidad del recurso hídrico, tanto en cantidad como en calidad, afectando de manera sistémica a todos los usos, consuntivos y no consuntivos, del agua.

11.2.4. Hidroelectricidad

Actualmente se ha aprovechado un 15% del gran potencial hidroeléctrico que hay en Ecuador. Con los ocho proyectos que el Estado ecuatoriano se encuentra construyendo se llegará a un aprovechamiento de alrededor del 30% del potencial hidroeléctrico. Continuar aprovechando el potencial hidroeléctrico, dependerá de la planificación del crecimiento de la demanda. Según el Censo de Población y Vivienda 2010, el 93,2% de la viviendas ecuatorianas cuentan con servicio eléctrico público.

11.2.5. Recursos hídricos y proyectos multipropósito

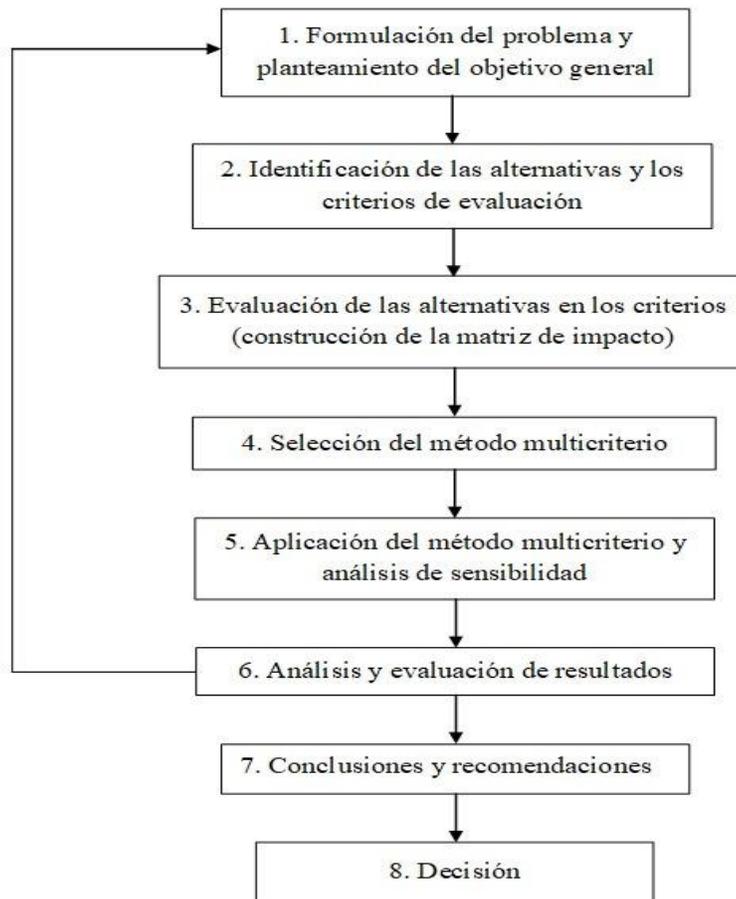
Debido a la alta dependencia económica, productiva y ambiental, además de la vulnerabilidad que presenta nuestro país hacia los recursos hídrico, la construcción de los proyectos multipropósito supone un adecuado uso y aprovechamiento del agua. De esta manera se podrá potenciar la producción agrícola a través del riego tecnificado y evitar su acaparamiento; facilitar la captación de agua cruda para la mejora de gestión en los sistemas municipales de agua potable y saneamiento; y, controlar las inundaciones para garantizar la seguridad y resiliencia de la población.

11.3. Metodología

El problema de los recursos hídricos en el Ecuador, se caracteriza por la presencia de múltiples criterios de evaluación, de distinta naturaleza (económica, social, ambiental, y política), y niveles de certidumbre (variables cualitativas, cuantitativas, difusas, aleatorias). Por ello, la herramienta adecuada para su tratamiento es el análisis multicriterio.

El Diagrama de la Figura 54 expone las distintas fases de un análisis multicriterio (Burbano 2016). El lazo de realimentación del diagrama expresa que, previo a la generación de conclusiones y recomendaciones, es posible regresar a cualquiera de las fases anteriores en un proceso cíclico y continuo de evaluación y mejora. Hay que indicar, además, que en las distintas fases se debe enfatizar la participación de los actores sociales involucrados en los problemas en consideración, como lo resalta la Evaluación Social Multicriterio (Munda 2004).

Figura 54: Diagrama de fases del análisis multicriterio



En lo que sigue de este capítulo se seguirán los pasos señalados.

11.3.1. Formulación del problema y planteamiento del objetivo general

El problema que se está analizando ha sido descrito en la introducción de este capítulo. Específicamente, se evaluará el aporte de los proyectos multipropósito al abastecimiento de agua para riego, consumo humano y generación de energía eléctrica en el Ecuador, y la protección frente a desastres por el aumento del caudal de los ríos. El objetivo general es jerarquizar los proyectos multipropósito en función de un conjunto de criterios sociales, económicos, ambientales, de servicios y políticos.

El estudio fue realizado con el apoyo de un grupo de trabajo interdisciplinario de funcionarios públicos de la Secretaría Nacional del Agua (SENAGUA), el Instituto Nacional de Preinversión (INP) y la Secretaría Nacional de Planificación y Desarrollo

(SENPLADES)¹⁸.

11.3.2 Identificación de las alternativas y los criterios de evaluación

Alternativas en análisis

Las alternativas que se consideran en este estudio son los 8 proyectos multipropósito que cuentan con los estudios de pre factibilidad o factibilidad. En los proyectos que aún no cuentan con estos estudios no es posible contar con los datos necesarios para el análisis.

Los 8 proyectos son:

El proyecto **Tahuín** consiste en diseñar la red terciaria, a nivel de factibilidad y los diseños definitivos para la modernización y consolidación global de toda la zona regable, así como del sistema de captación y posterior conducción de los caudales correspondientes al abastecimiento. Su zona de influencia afecta a los cantones de Arenillas, Huaquillas, Las Lajas, Machala, Marcabelí y Santa Rosa.

El **Tumbabiro** busca dotar a los habitantes de Tumbabiro, Urcuquí, San Blas e Imantang de agua cruda para su potabilización y la construcción de la infraestructura básica para riego primario y secundario para dotar de agua a las áreas de influencia del proyecto.

El proyecto **Pampas de Salasaca** es un proyecto de riego y de dotación de agua para consumo humano cuya zona de influencia afecta a los cantones de Mocha, Tisaleo y Cevallos.

El **Chalupas** consiste en la construcción de la infraestructura para el trasvase y conducción de agua para consumo humano y actividades agrícolas. Se ubica en los cantones de Latacunga, Pujilí, Salcedo y Saquisilí.

El proyecto **Puma** es un proyecto de riego orientado a mejorar la calidad de vida de la población mediante el suministro de agua potable y riego para la mejora de la producción agropecuaria en los cantones de Paute y Azogues.

¹⁸ Mención especial merecen Ana Lucía Murillo y Cristian Yupa, funcionarios de SENPLADES, coautores de la versión preliminar del artículo presentado en el III Congreso Internacional de Economía, realizado en la Escuela Politécnica Nacional, en Julio de 2015.

El **Plan hidráulico Acueducto Santa Elena** es un proyecto de ampliación de la infraestructura existente con el fin de dotar de agua para consumo de la población. Su zona de influencia afecta a los cantones de Santa Elena, La libertad, Salinas, Playas y Guayaquil.

El proyecto de riego **Yasipán** busca incrementar la productividad agropecuaria de las zonas de Cebadas, Licto, Flores y Punín pertenecientes al sistema de riego Yasipán.

El proyecto de riego **Ozogoche** consiste en implementar un sistema de riego tecnificado para 29 comunidades del Cantón Guamote, para la incorporación de las zonas beneficiadas a la producción agrícola.

Criterios de evaluación

El análisis y consolidación de la información disponible lleva a concluir que se debe trabajar con 20 criterios de evaluación agrupados en 5 dimensiones: social, económica, ambiental, de servicios y política.

A continuación se presenta una breve descripción de los criterios. Se indica, además, el tipo de variable: cuantitativa (K) o cualitativa (C). Las variables cualitativas son aquellas en las que, por representar conceptos complejos o abstractos, es más adecuado evaluarlas mediante un valor verbal antes que por un valor numérico. Los valores verbales para las variables cualitativas son: extremadamente alto, muy alto, alto, moderadamente alto, más o menos, moderadamente bajo, bajo, muy bajo, extremadamente bajo.

Dimensión económica

Costos de Inversión (K). Son los costos de construcción y fiscalización de las obras civiles, se incluye además los costos de los estudios de pre factibilidad y factibilidad.

Tasa interna de retorno TIR (K). Es la tasa de descuento que iguala el valor presente del flujo de ingreso y gastos a cero, es la rentabilidad del proyecto.

Valor Actual Neto VAN (K). Es el valor actualizado del flujo de ingresos y gastos de los proyectos.

Costos de operación (K). Son los costos del personal y de los bienes y servicios necesarios para la operación normal de los proyectos.

Costos Evitados (C). Se refiere a los costos que son evitados o al ahorro originado por la

prevención de los potenciales daños causados por los desastres.

Dimensión ambiental

Emisiones evitadas de CO2 (K). Es la reducción de las emisiones de CO2 en el ambiente por la sustitución de energía termoeléctrica por energía hidroeléctrica.

Servicios ambientales (C). Se refiere a la capacidad de los proyectos de brindar algún tipo de servicio ambiental como por ejemplo purificación de agua, aire o suelo.

Impacto de áreas (C). Son los impactos desfavorables en la zona del embalse y construcción del proyecto.

Efectos irreversibles (C). Son los componentes ambientales que luego del impacto negativo no recuperan su condición inicial (no son reversibles en el tiempo).

Sensibilidad ecosistémica (C). Es la sensibilidad que tiene el ecosistema frente a alteraciones, modificaciones o cambios derivados por acciones, obras o proyectos.

Dimensión Social

Número de beneficiados (K). Número de personas que a través del proyecto, reciben agua para riego o para consumo, o protección frente eventos hídricos negativos.

Empleo directo en la construcción (K). Número de personas que son contratadas directamente por la empresa, en la fase de construcción del proyecto.

Empleo directo en la ejecución (K). Número de personas que son contratadas directamente por la empresa, en la etapa de ejecución del proyecto.

Dimensión de servicios

Hectáreas regadas (K). Número de hectáreas beneficiadas con riego.

Provisión de agua a la población (K). Número de personas beneficiadas con el potencial acceso a agua potable por red pública (los proyectos proveen agua cruda).

Generación de electricidad (K). Es la generación de energía eléctrica en un año.

Generación de potencia (K). Es la potencia máxima que se puede obtener de la unidad generadora bajo condiciones normales de operación.

Dimensión política

Tiempo de construcción (C). Es el tiempo de construcción del proyecto.

Conflictos socio ambientales (K). Son aquellas situaciones donde confrontan intereses,

derechos, perspectivas, racionalidades y lógicas con relación al manejo de la naturaleza y de los recursos que en ella existen.

Apoyo político (K). Evalúa el apoyo de las autoridades locales al proyecto.

Definición de los pesos de los criterios

Luego de analizar las diferentes dimensiones y los distintos criterios, los pesos de las dimensiones fueron establecidos como lo indica la Tabla 29:

Tabla 29: Pesos de las dimensiones

Dimensión	Peso
Económica	1/4
Ambiental	1/6
Social	1/6
Servicios	1/4
Política	1/6

Posteriormente, al interior de cada dimensión se estableció el peso de cada criterio, con la restricción de que la suma de los pesos locales es igual a 1. El peso final es igual a:

$$\text{Peso final} = \text{Peso de la dimensión} \times \text{Peso del criterio} \quad (11.1)$$

En la matriz de impacto se detallan los pesos asignados.

11.3.3 Evaluación de las alternativas en los criterios

Para la construcción de la matriz de impacto M , cada uno de los proyectos se evalúa en cada uno de los criterios. Los datos para las variables cuantitativas se tomó de la información disponible en los estudios de pre factibilidad y factibilidad; en tanto que las valoraciones de las variables cualitativas fueron realizadas con el apoyo del grupo de trabajo. La matriz de impacto se presenta en el Anexo 2.

11.3.4 Selección del método multicriterio

El método aplicado es el modelo multicriterio paramétrico compensatorio no-compensatorio Quipu.

Definición de los umbrales de indiferencia

Los umbrales de indiferencia fueron establecidos por el equipo de trabajo y se determinaron bajo los siguientes principios: en las variables cualitativas, el valor del umbral es $c_i = \sqrt{2}/2$ (ver Capítulo 10). En la variable *TIR* se definió un umbral igual 20% del promedio de los datos; en el resto de variables cuantitativas se aplicó la transformación logarítmica y se definió un umbral porcentual del 30%, esto es, $c_i = \ln(1 + 0,3)$.

11.3.5 Aplicación del método multicriterio y análisis de sensibilidad

Para el análisis de sensibilidad los datos y parámetros se redefinen como números difusos y se aplica simulación Montecarlo (ver Sección 8.3).

11.3.6 Análisis y evaluación de los resultados

Notemos por Tah, T al Tahuin; Tum, U al Tumbabiro; Sal, S al Pampas de Salasaca, Cha, C al Chalupas; Pum, P al Puma; SE1, E al Santa Elena; Yas, Y al Yasipán; Ozo, O al Ozogoché.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes.

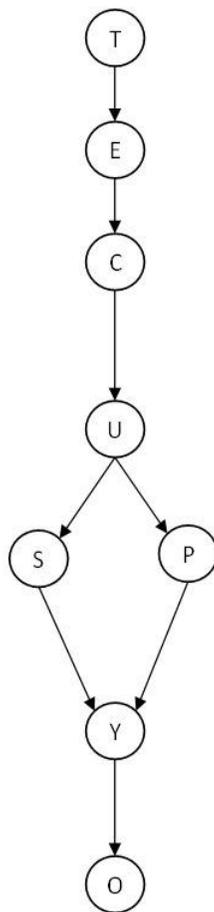
Matriz coloreada

El resultado de la matriz coloreada es el siguiente:

Matriz coloreada

	Tah	Tum	Sal	Cha	Pum	SE1	Yas	Ozo
Tah	1	0,45	0,65	0,27	0,58	0,28	0,75	0,85
Tum		1	0,34	0,41	0,36	0,43	0,43	0,66
Sal			1	0,48	0,32	0,49	0,48	0,66
Cha				1	0,36	0,34	0,68	0,87
Pum					1	0,38	0,34	0,52
SE1						1	0,65	0,79
Yas							1	0,36
Ozo								1

Figura 55: Grafo orden parcial entre las alternativas



La relación determinada por la matriz coloreada es un orden parcial. La preferencia estricta es transitiva sin embargo hay alternativas no comparables entre sí. En este caso los proyectos Pampas de Salasaca y Puma no son comparables. El grafo (Grafo 1) correspondiente a la matriz coloreada explica de mejor manera estos resultados. Para mayor claridad, en el grafo se omiten los arcos que se pueden obtener por aplicación de la transitividad.

El orden parcial describe las siguientes relaciones:

Tahuin > Santa Elena > Chalupas > Tumbabiro;

Tumbabiro > Pampas de Salasaca > Yasipán;

Tumbabiro \succ Puma \succ Yasipán;

Yasipán \succ Ozogoche;

Pampas de Salasaca ϕ Puma.

El mejor proyecto es Tahuín seguido de Santa Elena y Chalupas; en un lugar medio están Tumbabiro, Pampas de Salasaca y Puma (estos dos últimos no son comparables entre sí); los proyectos de menor valoración relativa son Yasipán y Ozogoche.

Rango de Condorcet

Los resultados para el rango de Condorcet y el ordenamiento de las alternativas es:

Tabla 30: Rangos de las alternativas

Proyecto	<i>Rango</i> ⁺	<i>Rango</i> ⁻	<i>Rango</i>
Tahuín	3,75	0,18	5,29
Santa Elena	3,17	0,28	4,95
Chalupas	2,93	0,62	4,66
Tumbabiro	1,81	1,36	3,72
Puma	1,12	1,77	3,17
Pampas de Salasaca	1,26	2,15	3,05
Yasipán	0,36	3,39	1,98
Ozogoche	0,06	4,7	1,18

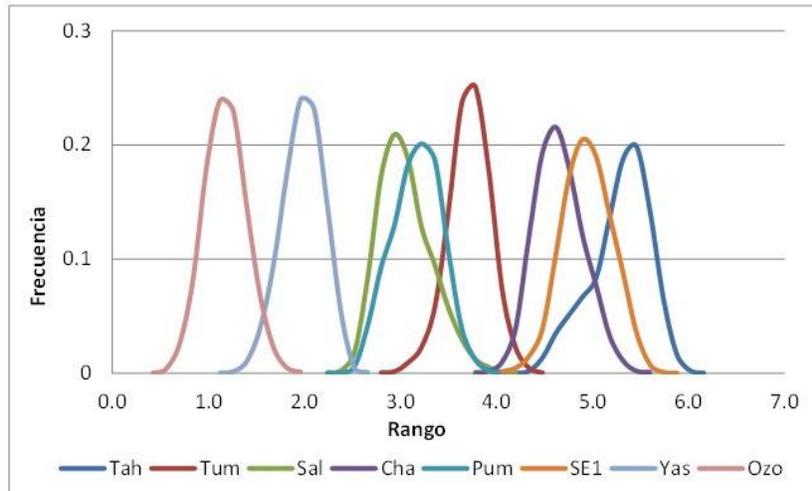
El orden de los proyectos multipropósito determinado por el rango de Condorcet es:

Tahuín \succ Santa Elena \succ Chalupas \succ Tumbabiro \succ Puma \succ Pampas de Salasaca
 \succ Yasipán \succ Ozogoche.

El resultado es: el proyecto con mejor evaluación es Tahuín con una calificación de 5,29; en tanto que el proyecto de riego Ozogoche es el peor evaluado con una calificación de 1,18.

El análisis de simulación para el rango de Condorcet se presenta en la Figura 56:

Figura 56: Rangos de Condorcet - Frecuencia relativa

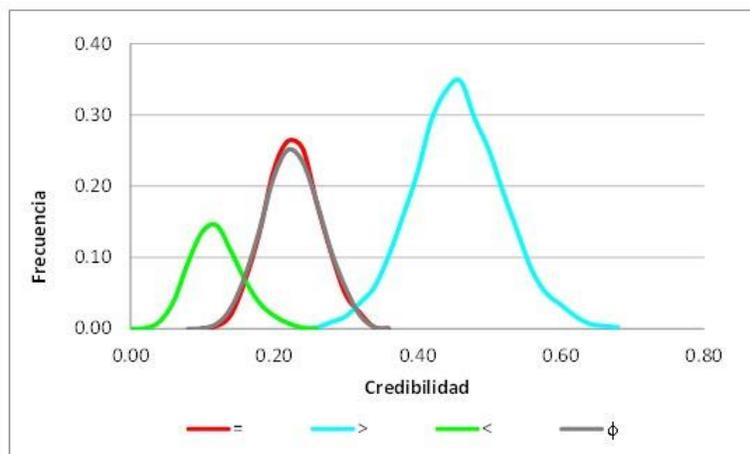


La Figura 56 confirma los resultados. Nótese que el gráfico muestra una ligera superioridad del proyecto Puma por sobre el proyecto Pampas de Salasaca.

Comparación por pares

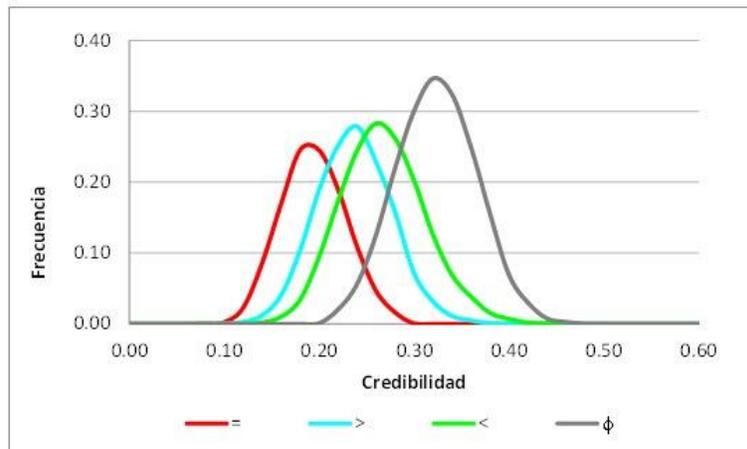
El análisis de sensibilidad también se aplica a la comparación por pares. Se expone únicamente dos ejemplos de la distribución de las frecuencias relativas de las relaciones $I(x, y)$, $P(x, y)$, $P^{-1}(x, y)$ y $J(x, y)$ entre los proyectos Tahuín y Tumbambiro, y entre Pampas de Salasaca y Puma.

Figura 57: Comparación por pares: Tahuín – Tumbambiro



Al comparar los proyectos Tahuín y Tumbambiro (ver Figura 57), se observa que la relación de mayor credibilidad es la preferencia estricta $P(>)$, de donde se concluye que el proyectos Tahuín es mejor que el Tumbambiro.

Figura 58: Comparación por pares: Pampas de Salasaca - Puma



En el caso de los proyectos Pampas de Salasaca y Puma (ver Figura 55), el gráfico muestra que estos proyectos no son comparables. Si ignoramos la incomparabilidad, la segunda relación de mayor credibilidad es la preferencia estricta inversa, $P^{-1}(<)$. A partir de ello, se concluye que el proyecto Pampas de Salasaca es peor que el Puma o, lo que es lo mismo, el proyecto Puma es mejor que el Pampas de Salasaca. Este resultado es consistente con el obtenido en los rangos de las alternativas.

Análisis por dimensión

En la Tabla 31, se presentan los rangos netos de los proyectos en cada una de las cinco dimensiones de análisis. De acuerdo a estos resultados, Tahuín es el mejor proyecto en las dimensiones ambiental y política, aunque es bajo en la dimensión social, también tiene un buen ranking en las dimensiones de servicios y económica. El proyecto Ozogoché tiene la peor calificación en las dimensiones ambiental y política, y es el segundo peor evaluado en servicios. En la dimensión económica y social, este proyecto alcanza una calificación media baja. De igual manera puede continuarse con el análisis para el resto de proyectos.

Tabla 31: Rangos netos por dimensión

Proyecto	Económica	Ambiental	Social	Servicios	Política
Tahuín	4,49	6,01	2,78	4,28	6,64
Santa Elena	1,44	4,40	3,15	5,65	3,36
Chalupas	4,66	2,04	4,52	1,58	5,12
Tumbabiro	2,08	4,46	5,39	6,25	3,03
Puma	1,92	5,92	1,58	3,90	2,44
Pampas de Salasaca	4,22	2,52	6,66	4,39	5,49
Yasipán	6,20	1,98	1,36	0,55	0,96
Ozogoche	2,98	0,66	2,56	1,41	0,96

11.3.7. Conclusiones y recomendaciones para los proyectos multipropósito

El análisis multicriterio aplicado demostró su aplicabilidad al análisis de los proyectos multipropósito. Los resultados estuvieron a satisfacción de los especialistas que conocen a profundidad los proyectos y que de una manera intuitiva habían considerado ciertas jerarquías parciales entre estos. El análisis realizado brindó un sustento técnico riguroso al ordenamiento relativo de los proyectos del mejor al peor.

Se recomienda aplicar la metodología multicriterio para el análisis de prioridad en los proyectos de inversión pública, pues éstos demandan ingentes recursos económicos y tienen fuertes impactos en el desarrollo social de las comunidades del país, al igual que afectaciones sociales y ambientales.

11.3.8 Decisión

La decisión de las autoridades debe ser ejecutar los proyectos, de acuerdo a la disponibilidad de los recursos económicos, según el orden de prioridad establecido en la evaluación multicriterio: Tahuín, Santa Elena, Chalupas, Tumbabiro, Pampas de Salasaca, Puma, Yasipán y Ozogoche.

Capítulo 12

Conclusiones y recomendaciones

El desarrollo de esta tesis ha permitido llegar a las siguientes conclusiones: La definición de Fishburn (1976), conjuntamente con las definiciones de no compensación T2, T2b y T3, permiten complementar el marco de las definiciones formales alrededor de la noción intuitiva de no compensación.

Con la condición fuerte de Pareto, que es un supuesto que normalmente se acepta, las definiciones de no compensación T2 y no compensación T2b resultan ser equivalentes. Por otra parte, con los ejemplos presentados en las secciones respectivas se muestra que la no compensación Fishburn, la no compensación T2, y la no compensación T3 son independientes entre sí, es decir, ninguna es consecuencia lógica de la otra.

Con pequeñas modificaciones a la negación lógica de las proposiciones que definen la no compensación T2b y no compensación T3, se define la compensación parcial y compensación (total) T2 y T3.

Bajo ciertas condiciones específicas, la no compensación de Fishburn implica la no compensación T2 y viceversa. Concretamente, asumiendo que las preferencias son fuertemente paretianas, se cumple que:

La EPNC Fishburn más restrictiva es una EPNC T2.

Una EPNC Fishburn P-Continua y no sinérgica es una EPNC T2.

Una EPNC Fishburn P-Continua en criterios es una EPNC T2.

Una EPNC T2 no sinérgica es una EPNC Fishburn.

Una EPNC T2 en criterios es una EPNC Fishburn.

La no compensación Fishburn y la no compensación T2 se asocian con la independencia a la intensidad de las preferencias. En consecuencia, la compensación parcial y total T2 se relacionan con la dependencia a la intensidad de las preferencias. La compensación y la no compensación T2 se relacionan con la inversión y no inversión de la preferencia, respectivamente. Para preferencias simétricas en criterios, la compensación y la no compensación T3 se asocian con la igualdad o balance de las ventajas y desventajas, y con la

indiferencia (comparabilidad) e incomparabilidad de las alternativas, respectivamente. La definición de estructuras de preferencia paramétrica no compensatoria compensatoria construida a partir de la compensación y la no compensación T2, permite dar una interpretación precisa al parámetro de compensación $\alpha \in [0,1]$. En el caso no compensatorio, $\alpha = 0$; si es caso (totalmente) compensatorio, $\alpha = 1$; y, cuando la compensación es parcial, $0 < \alpha < 1$.

Las estructuras de preferencias cónicas y cuasi cónicas son el modelo paradigmático de las estructuras de preferencia paramétrica. Estos modelos están contruidos a partir de la lógica clásica o convencional, es decir, son estructuras o modelos no difusos.

El modelo difuso es la extensión natural del modelo no difuso cuasi cónico y permite evitar algunos problemas de los modelo no difusos, entre estos, los saltos por discontinuidad.

El modelo “Quipu” demuestra su aplicabilidad, como en el caso del análisis de la problemática de los recursos hídricos en Ecuador, en relación a los proyectos multipropósito, proyectos de infraestructura de agua para consumo humano, riego, protección frente a desastres naturales y generación de electricidad. El análisis realizado brinda un sustento técnico riguroso a la jerarquización de los 8 proyectos principales de inversión pública del Gobierno de Ecuador del período 2013-2017, y en esta área.

Esta tesis ha permitido el avance en algunos aspectos del campo del análisis multicriterio relacionado con la compensación entre criterios, aunque quedan abiertos algunas cuestiones merecedoras desarrollos futuros. Entre estos temas están:

- El análisis de la sinergia entre criterios y su relación con el parámetro p de la distancia de Minkowski. Como se indicó en la sección respectiva, en esta tesis sólo se presentan las definiciones de sinergia y no sinergia, y se las visualiza con ejemplos.
- El trabajo básicamente se lo desarrolla en el espacio vectorial real. El espacio de alternativas es $X = \mathbb{R}^n$. Las estructuras de preferencia compensatoria no-compensatoria pueden ser desarrolladas en contextos más amplios; específicamente se puede trabajar con preferencias ordinales, es decir, el espacio de alternativas podría ser $X = \mathcal{C}^n$, donde \mathcal{C} es un conjunto de categorías ordinales.
- El punto anterior abre la posibilidad de estudiar el grado de compensación en algunos

de los métodos multicriterio para los cuales no se define explícitamente un grado de compensación; por ejemplo, las distintas versiones del método ELECTRE.

- Un último punto de estudio y desarrollo futuro es el análisis de los pesos de los criterios como “pesos importancia” y/o “pesos compensación”.

Anexo 1

Relaciones sobre un conjunto

En este anexo se presentan algunos de los conceptos matemáticos sobre las relaciones definidas sobre un conjunto.

Relación sobre un conjunto X . Sea X un conjunto no vacío. Una relación R sobre X es un subconjunto del producto cartesiano $X \times X = X^2$. Si el par $(x, y) \in R$, se nota $x R y$ y o también $R(x, y)$. Cuando $(x, y) \notin R$, se nota $\neg(x R y)$ o $\neg R(x, y)$, respectivamente. El símbolo \neg es la negación lógica y se lee “es falso”. De aquí en adelante se asumirá que el conjunto X es un conjunto no vacío. Las alternativas son los elementos de X .

Representación de una relación. Si X es finito, digamos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, la relación R sobre X se puede representar por una matriz booleana¹⁹ cuadrada $R = (r_{ij})$ de dimensión n , donde $r_{ij} = 1$, si $x_i R x_j$, y $r_{ij} = 0$ en el caso contrario. La relación R también se puede representar con el grafo (X, R) en el cual las alternativas $x \in X$ corresponden a los nodos, y las parejas $(x, y) \in R$ a los arcos del grafo.

Ejemplo 1. Sea $X = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, R la relación definida por:

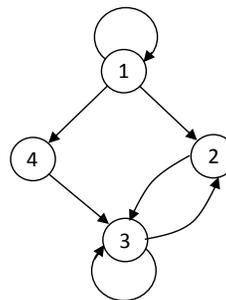
$$R = \{(A_1, A_1), (A_1, A_2), (A_1, A_4), (A_2, A_3), (A_3, A_2), (A_3, A_3), (A_4, A_3)\} \quad (1.2)$$

La matriz R y el grafo son:

Matriz R

R	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	1	0	1
A_2	0	0	1	0
A_3	0	1	1	0
A_4	0	0	1	0

Grafo R



El nodo A_i se etiqueta únicamente i

¹⁹ Una matriz booleana es una matriz de ceros y unos.

Relaciones derivadas. Sea R una relación sobre el conjunto X , la relación inversa R^{-1} , el complemento R^c de la relación R se definen por:

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \{(x, y) \in X \mid (y, x) \in R\}, \\ R^c &= \{(x, y) \in X \mid (x, y) \notin R\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Relación identidad. La relación identidad es:

$$Id = \{(x, x) \mid x \in X\}. \quad (1.4)$$

Composición de relaciones. Si R y T son dos relaciones sobre X , la relación compuesta RT se define por: $x RT y$ si para algún $z \in X$, $x R z \wedge z T y$.

Ejemplo 2. Sean R y T las relaciones definidas por las matrices:

R	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	1	0	1	1
A_2	0	1	1	0	1
A_3	0	1	0	1	0
A_4	1	0	1	0	1
A_5	0	0	1	0	1

T	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	0	1	0	1	0
A_2	0	0	1	0	0
A_3	1	0	0	1	0
A_4	0	0	0	1	1
A_5	1	1	0	0	1

Entonces:

R^{-1}	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	0	0	1	0
A_2	1	1	1	0	0
A_3	0	1	0	1	1
A_4	1	0	1	0	0
A_5	1	1	0	1	1

R^c	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	0	0	1	0	0
A_2	1	0	0	1	0
A_3	1	0	1	0	1
A_4	0	1	0	1	0
A_5	1	1	0	1	0

RT	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	0	0	1	0
A_3	0	0	1	1	1
A_4	1	1	0	1	0
A_5	1	1	0	1	1

Observación. La matriz asociada a RT es el producto booleano²⁰ de las matrices R y T .

Para simplificar la escritura escribimos “ssi” en lugar de “si y solo si”.

²⁰ La suma y el producto booleano se definen por: $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=1$; $0*0=0$, $0*1=1*0=0$, $1*1=1$.

Definición 1 (Propiedades de las relaciones). Se dice que la relación R satisface la propiedad:

1. Reflexiva si $x R x$ ssi $Id \subset R$.
2. Irreflexiva si $\neg(x R x)$ ssi $R \subset Id^c$.
3. Simétrica si $(x R y) \Rightarrow (y R x)$ ssi $R = R^{-1}$.
4. Asimétrica si $(x R y) \Rightarrow \neg(y R x)$ ssi $R \cap R^{-1} = \emptyset$.
5. Antisimétrica si $(x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow (x = y)$ ssi $R \cap R^{-1} = Id$.
6. Transitiva si $(x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow (x R z)$ ssi $RR \subset R$.
7. Semitransitiva si $(x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow (x R u) \vee (u R z)$ ssi $PPI \subset P$ ssi $IPP \subset P$.
8. Ferrers si $(x R y) \wedge (z R u) \Rightarrow (x R u) \vee (z R y)$ ssi $PIP \subset P$.
9. Completa si $(x R y) \vee (y R x)$ ssi $X^2 = R \cup R^{-1}$.
10. Cuasi completa si $x \neq y \Rightarrow (x R y) \vee (y R x)$ ssi $X^2 \setminus Id = R \cup R^{-1}$.

para todo $x, y, z, u \in X$, según corresponda.

La completitud y cuasi completitud se denominan también completitud fuerte y completitud respectivamente Öztürk et al. (2003).

Definición 2 (Relaciones de orden). Sean I , P y R relaciones definidas sobre el conjunto X . Se dice que R es una relación de:

1. Orden total si R es (reflexiva,) antisimétrica, transitiva y completa ssi $R \cap R^{-1} \subset Id$, $RR \subset R$ y $X^2 = R \cup R^{-1}$.
2. Preorden si R es transitiva y completa ssi $RR \subset R$ y $X^2 = R \cup R^{-1}$.
3. Semiorden si R es Ferrers, semitransitiva y completa ssi $PIP \subset P$, $PPI \subset P$ y $X^2 = R \cup R^{-1}$.
4. Orden parcial si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva ssi $Id \subset R$, $R \cap R^{-1} \subset Id$ y $RR \subset R$.
5. Preorden parcial si R es reflexiva y transitiva ssi $Id \subset R$ y $RR \subset R$.
6. Semiorden parcial si R es reflexiva, Ferrers y semitransitiva ssi $Id \subset R$, $PIP \subset P$ y $PPI \subset P$.

La relación P se denomina:

1. Orden estricto total si P es asimétrica, transitiva y cuasi-completa ssi $P \cap P^{-1} = \emptyset$, $PP \subset P$ y $X^2 \setminus Id = R \cup R^{-1}$.
2. Orden estricto parcial si P es asimétrica y transitiva ssi $P \cap P^{-1} = \emptyset$ y $PP \subset P$.

El par (X, R) o (X, P) se denomina estructura de orden.

La relación I se denomina de:

1. Semejanza si I es reflexiva y simétrica ssi $Id \subset I$, $I = I^{-1}$.
2. Equivalencia si I es reflexiva, simétrica y transitiva ssi $Id \subset I$, $I = I^{-1}$ y $II \subset I$.

La clase de equivalencia de $x \in X$ para la relación de equivalencia I , se define por:

$$[x] = \{y \in X \mid x I y\}. \quad (1.5)$$

Observación

1. La completitud implica la reflexividad; la asimetría, la irreflexividad; y, la completitud, la cuasi-completitud.
2. La completitud es un supuesto de partida en la economía convencional (mainstream). La economía ecológica por el contrario considera a la comparabilidad débil de valores como uno de sus fundamentos [Mart_uez-Alier et~al.(1998)Mart_uez-Alier, Munda, y John]. Siendo este el caso, queda abierta la posibilidad de la no comparabilidad entre alternativas, lo que lleva a estructuras de orden parcial.

A continuación se presentan ejemplos sobre las distintas estructuras de orden total y parcial.

Ejemplo 3. Orden total

(reordenando X)

R	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	1	0	0	1
A_2	1	1	1	1
A_3	1	0	1	1
A_4	0	0	0	1

R	A_2	A_3	A_1	A_4
A_2	1	1	1	1
A_3	0	1	1	1
A_1	0	0	1	1
A_4	0	0	0	1

$$R: A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$$

Figura 59: $R: A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$



En un orden total finito los elementos pueden ordenarse uno detrás de otro, por ello se lo denomina también orden lineal. La relación $P = R \setminus I$ es un orden estricto.

Para visibilizar de mejor manera, en un grafo no se grafican los arcos que se pueden obtenerse por la aplicación de la transitividad. Así en un orden lineal se suele graficar únicamente los arcos que enlazan un nodo al siguiente.

El ejemplo paradigmático de orden total es el orden usual “mayor o igual” (\geq) en los números naturales o en los números reales.

Ejemplo 4. Preorden

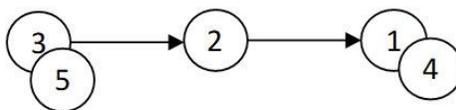
R	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	0	0	1	0
A_2	1	1	0	1	0
A_3	1	1	1	1	1
A_4	1	0	0	1	0
A_5	1	1	1	1	1

(reordenando X)

R	A_3	A_5	A_2	A_1	A_4
A_3	1	1	1	1	1
A_5	1	1	1	1	1
A_2	0	0	1	1	1
A_1	0	0	0	1	1
A_4	0	0	0	1	1

$$R: A_3 \sim A_5 \succ A_2 \succ A_1 \sim A_4.$$

Figura 60: $R: A_3 \sim A_5 \succ A_2 \succ A_1 \sim A_4$



Reordenando los elementos de X de ser necesario, la matriz de una relación de preorden es una matriz con 1's en la triangular superior y una estructura de bloques cuadrados de 1's disjuntos sobre la diagonal principal. Los bloques cuadrados determinan las clases de equivalencia de la relación I .

En el ejemplo, las clases de equivalencia son $[A_3] = \{A_3, A_5\}$, $[A_2] = \{A_2\}$, $[A_1] = \{A_1, A_4\}$, las cuales están totalmente ordenadas por la relación inducida $[x] \succ [y]$ siempre que $x R y$. En este ejemplo, el orden es $[A_3] \succ [A_2] \succ [A_1]$. Se tiene además que las clases de equivalencia forman una partición de X .

En microeconomía las “curvas de indiferencia” son las clases de equivalencia.

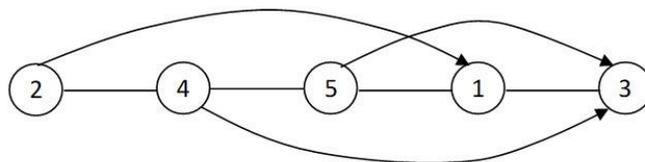
Ejemplo 5. Semiorden

R	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	0	1	1	1
A_2	1	1	1	1	1
A_3	1	0	1	0	0
A_4	1	1	1	1	1
A_5	1	1	1	1	1

(reordenando X)

R	A_2	A_4	A_5	A_1	A_3
A_2	1	1	1	1	1
A_4	1	1	1	1	1
A_5	1	1	1	1	1
A_1	0	1	1	1	1
A_3	0	0	0	1	1

Figura 61: Grafo asociado



En un semiorden, al reordenar los elementos de X de ser necesario, la matriz asociada tiene 1's en la triangular superior y una estructura de bloques cuadrados de 1's no necesariamente disjuntos sobre la diagonal principal. La matriz asociada es en “escalera”: la frontera entre los 0's y 1's tiene la forma de una escalera con los 0's en la triangular inferior de la matriz (Monjardet 1978).

En un semiorden, la relación de indiferencia es una relación de semejanza. No es una relación transitiva.

En el grafo de un semiorden, los nodos se puede graficar en secuencia, uno a continuación de otro (o uno debajo de otro), siguiendo el orden de los elementos en la matriz en escalera.

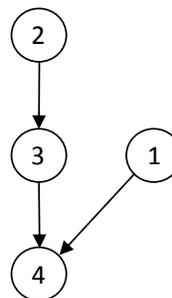
Cada nodo se enlaza con el primer nodo estrictamente menor mediante un arco dirigido (flecha). El nodo “padre” será mayor al nodo hijo y a todos los nodos a la derecha (o sucesores). Esto permite graficar un conjunto limitado de arcos y visibilizar de mejor manera el grafo.

En el ejemplo, los bloques son: $B_1 = \{A_2, A_4, A_5\}$, $B_2 = \{A_4, A_5, A_1\}$, $B_3 = \{A_1, A_3\}$. No son clases de equivalencia pues no son bloques disjuntos pero son bloques consecutivos. Nótese que en un semiorden, los mejores elementos de X son los elementos de $B_1 \setminus \cup_{i \geq 2} B_i$. Los elementos de este conjunto son máximos, satisfacen que para todo $y \in X$, $x \succ y$.

Ejemplo 6. Orden parcial

Figura 62: Grafo asociado

R	A_2	A_3	A_1	A_4
A_2	1	1	0	1
A_3	0	1	0	1
A_1	0	0	1	1
A_4	0	0	0	1

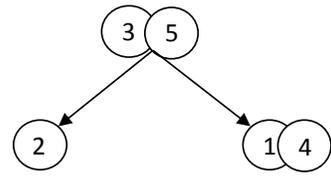


La estructura de orden parcial es bastante común. Por ejemplo, los elementos de una familia de subconjuntos de un conjunto están relacionados por un orden parcial.

Ejemplo 7. Preorden parcial

R	A_3	A_5	A_2	A_1	A_4
A_3	1	1	1	1	1
A_5	1	1	1	1	1
A_2	0	0	1	0	0
A_1	0	0	0	1	1
A_4	0	0	0	1	1

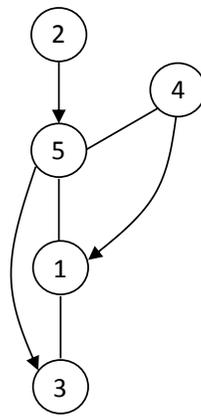
Figura 63: Grafo asociado



Ejemplo 8. Semiorden parcial

R	A_2	A_4	A_5	A_1	A_3
A_2	1	0	1	1	1
A_4	0	1	1	1	1
A_5	0	1	1	1	1
A_1	0	0	1	1	1
A_3	0	0	0	1	1

Figura 64: Grafo asociado



Anexo 2

En este anexo se presentan los datos y parámetros para la evaluación multicriterio de los proyectos multipropósito.

Criterios

Dimensión	N°	Criterio	Unidades	Objetivo	Peso local	Peso
Económica	1	Costos de inversión	Mill \$	min	0,2	0,05
	2	TIR	%	max	0,15	0,0375
	3	VAN	Mill \$	max	0,15	0,0375
	4	Costos de operación	Mill \$/año	min	0,2	0,05
	5	Costos evitados	Cualit	max	0,3	0,075
Ambiental	6	Emisiones evitadas de CO2	Ton eq	max	0,05	0,0083
	7	Servicios ambientales	Cualit	max	0,2	0,0333
	8	Impactos de áreas	Cualit	min	0,25	0,0417
	9	Eventos irreversibles	Cualit	min	0,25	0,0417
	10	Vulnerabilidad ecosistémica	Cualit	min	0,25	0,0417
Social	11	Número de beneficiados	Personas	max	0,5	0,0833
	12	Empleo directo construcción	Personas	max	0,25	0,0417
	13	Empleo directo operación	Personas	max	0,25	0,0417
Servicios	14	Hectáreas regadas	Ha	max	0,4	0,1
	15	Provisión de agua a la población	Personas	max	0,4	0,1
	16	Generación de electricidad	GWh	max	0,1	0,025
	17	Generación de potencia	MW	max	0,1	0,025
Política	18	Tiempo de construcción	Meses	min	0,5	0,0833
	19	Conflictos socioambientales	Cualit	min	0,25	0,0417
	20	Apoyo político	Cualit	max	0,25	0,0417

Dimensiones: Compensación y pesos

Dimensión	Peso	Compensación global	Compensación local
Económica	0,25	0,25	0,6
Ambiental	0,167		0,4
Social	0,167		0,35
Servicios	0,25		0,4

Matriz de Impacto

N°	Criterio	Tahuin	Tumbabiro	Pampas De Salasaca	Chalupas
1	Costos de inversión	90,7	166,4	80	434,9
2	TIR	13,89	8	13,09	9,58
3	VAN	31,9	0	5	122,1
4	Costos de operación	1,17	4,4	0,2	4,2
5	Costos evitados	alta	alta	alta	alta
6	Emisiones evitadas de CO2	12.245	28.470	0	56.099
7	Servicios ambientales	bueno	bueno	moderadamente bueno	muy bueno
8	Impactos de áreas	bajo	más o menos	más o menos	más o menos
9	Eventos irreversibles	bajo	más o menos	más o menos	moderadamente bajo
10	Vulnerabilidad ecosistémica	bajo	bajo	moderadamente bajo	más o menos
11	Número de beneficiados	85.000	100.000	25.000	65.000
12	Empleo directo construcción	400	450	800	2300
13	Empleo directo operación	30	25	320	87
14	Hectáreas regadas	8.000	7.210	2.323	19.000
15	Provisión de agua a la población	85.000	100.000	25.000	65.000
16	Generación de electricidad	11,83	54,2	0	177,68
17	Generación de potencia	2,5	16	0	50
18	Tiempo de construcción	24	36	34	48
19	Conflictos socioambientales	extremadamente baja	muy baja	muy baja	muy baja
20	Apoyo político	muy alta	moderadamente alta	muy alta	alta

Matriz de Impacto

N°	Criterio	Puma	Santa Elena	Yasipan	Ozogoche
1	Costos de inversión	202,3	250,0	66,7	67,4
2	TIR	7,9	15,48	18,19	6,79
3	VAN	0,0	112,0	19,8	-15,1
4	Costos de operación	1,9	7,6	0,088	0,19
5	Costos evitados	alta	Muy alta	alta	alta
6	Emisiones evitadas de CO2	7.282	0	0	0
7	Servicios ambientales	bueno	moderadamente bueno	bueno	bueno
8	Impactos de áreas	bajo	más o menos	más o menos	moderadamente alta
9	Eventos irreversibles	bajo	más o menos	más o menos	alta
10	Vulnerabilidad ecosistémica	bajo	bajo	más o menos	alta
11	Número de beneficiados	120	400	0	0
12	Empleo directo construcción	200	800	360	640
13	Empleo directo operación	16	350	45	55
14	Hectáreas regadas	900	42	2.144	3.85
15	Provisión de agua a la población	120	400	0	0
16	Generación de electricidad	16,8	0	0	0
17	Generación de potencia	2,5	0	0	0
18	Tiempo de construcción	48	30	48	48
19	Conflictos socioambientales	baja	extremadamente baja	alta	alta
20	Apoyo político	alta	alta	alta	alta

Lista de referencias

- Alsina, C., 1985. "On a family of connectives for fuzzy sets". *Fuzzy Sets and Systems* 16 (3): 231–235.
- Banville, C., Landry, M., Martel, J., Boulaire, C., 1998. "A stakeholder approach to MCDA". *Behavioral Science* 15 (1): 15–32.
- Bojórquez-Tapia, L., Sánchez-Colon, S., Florez, A., 2005. "Building consensus in environmental impact assessment through multicriteria modeling and sensitivity analysis". *Environmental Management* 36 (3): 469–481.
- Bouyssou, D., 1986. "Some remarks on the notion of compensation in MCDM". *European Journal of Operational Research* 26 (1): 150–160.
- Bouyssou, D., 1992. "Ranking methods based on valued preference relations: A characterization of the net flow method". *European Journal of Operational Research* 60 (1): 61–67.
- Bouyssou, D., Pirlot, M., 2006. "An axiomatic approach to TACTIC". Cahier du LAMSADE 238, Université de Paris-Dauphine.
- Bouyssou, D., Pirlot, M., Vincke, P., 1997. "A General Model of Preference Aggregation. Essays in Decision Making. En *A Volume in Honour of Stanley Zionts*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 120–134.
- Bouyssou, D., Vansnick, J., 1986. "Noncompensatory and generalized noncompensatory preference structures". *Theory and Decision* 21 (3): 251–266.
- Brans, J., Mareschal, B., 2005. "Promethee Methods". En *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer, Vol. 78, 163–186.
- Brian, E., 2008. "Condorcet and Borda in 1784. Misfits and Documents". *Electronic Journal for History of Probability and Statistics* 4 (1): 1–10.
- Burbano, R., 2016. "El análisis multicriterio y el Teorema de Arrow". *Revista Politécnica* 37 (1).
- CAF (Corporación Andina de Fomento). 2000. Las Lecciones de El Niño 97-98 Ecuador. Documento, CAF.
- CEPAL (Comisión Económica para América Latina and el Caribe). 2003. Evaluación del impacto socioeconómico and ambiental de los desastres. Documento, CEPAL.

- Charnes, A., Cooper, W., Ferguson, R., 1955. "Optimal estimation of executive compensation by linear programming". *Management Science* 1 (2): 138–151.
- Cioni, L., 2010. A few notes on the Borda and Condorcet methods. Technical Report, Universidad de Pisa, Departamento de Informática TR-10-16.
- Colson, G., de Bruyn, C., 1989. "Models and methods in multiple objectives decision making". *Mathematical and Computer Modelling* 12 (10-11): 1201–1211.
- Dasgupta, P., Maskin, E., 2003. On the robustness of majority rule and unanimity rule. Institute for Advanced Study, Princeton.
- de Walle, B. V., De-Baets, B., Kerre, E., 1998. "Characterizable fuzzy preference structures". *Annals of Operations Research* 80: 105–136.
- England, R., 2000. "Natural capital and the theory of economic growth". *Ecological Economics* 34 (3): 425–431.
- Fernández-Barberis, G., Escribano, M., 2011. "La ayuda a la decisión multicriterio: orígenes, evolución y situación actual". En VI Congreso internacional de historia de la estadística y de la probabilidad. 1–10.
- Fishburn, P., 1976. "Noncompensatory preferences". *Synthese* 33 (1): 393–403.
- Fodor, J., de Baets, B., 2008. "Fuzzy preference modelling: Fundamentals and recent advances". *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models* 220: 207–217.
- Fodor, J., Roubens, M., 1994. "Valued preference structures". *European Journal of Operational Research* 79 (2): 277–286.
- Galárraga, R., 2005. Estado y Gestión de los Recursos Hídricos en el Ecuador. HIDRORED.
- Grabisch, M., Roubens, M., 2000. "Application of the choquet integral in multicriteria decision making". *Fuzzy Measures and Integral* 40: 415–434.
- Greco, S., Figueira, J., 2003. Dealing with interaction between bi-polar multiple criterio preferences in outranking methods. Research Report 11k2003 INESCkCoimbra, Portugal.
- Greco, S., Matarazzo, B., Slowinski, R., 2003. "The axiomatic basis of multicriteria non-compensatory preferences". eN Proceedings of the 4th international workshop on preferences and decisions Trento. 81–86.
- Guitouni, A., Martel, J., 1998. "Tentative guidelines to help choosing an appropriate MCDA

- method". *European Journal of Operational Research* 109 (2): 501–521.
- Hwang, C., Yoon, K., 1981. *Multiple Attribute Decision Making: An Introduction*. Springer.
- Jahn, J., 2011. *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions*. Springer.
- Johnson, C., 1983. A characterization of Borda's rule via optimization. IMA Preprint Series Universidad de Minnesota (41): 680–684.
- Keeney, R., Raiffa, H., 1976. *Decisions with Multiple Objectives*. John Wiley and Sons, New York.
- MAE (Ministerio del Ambiente Ecuador). 2011. Segunda comunicación de cambio climático. Documento, Ministerio del Ambiente, Quito.
- MAGAP (Ministerio de Agricultura, Ganadería, Acuacultura y Pesca, Ecuador). 2013. Plan Nacional de Riego y Drenaje (PNRD). Documento, MAGAP, Subsecretaría de Riego y Drenaje, Quito.
- Martínez-Alier, J., Munda, G., John, J. O., 1998. "Weak comparability of values as a foundation for ecological economics". *Ecological Economics* 2 (3): 277–286.
- Mas-Colell, A., Winston, M., Green, J., 1995. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, New York.
- May, K., 1952. "A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision". *Econometrica* 20 (4): 680–684.
- Monjardet, B., 1978. "Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres". *Mathématiques et Sciences Humaines* 53: 51–82.
- Monjardet, B., 1990. "Sur diverses formes de la règle de Condorcet d'agrégation des préférences". *Mathématiques et Sciences Humaines* 111: 1–71.
- Munda, G., 2004. "Social Multi-criteria Evaluation (SMCE): methodological foundations and operational consequences". *European Journal of Operational Research* 158 (3): 662–677.
- Munda, G., Nardo, M., 2005. Non compensatory composite indicators for ranking countries: a defensible setting. Documento de Trabajo EUR 21833EN, Institute for the Protection and Security of the Citizen. Office for Official Publications of the European Communities, Luxemburgo.
- Ok, E., 2007. *Real Analysis with Economic Applications*. Princeton University Press.
- Öztürk, M., Tsoukiàs, A., Vincke, P., 2003. Preference modelling. Documento de trabajo 34,

- Center for Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science (DIMACS),
Piscataway, NJ.
- Podinovsky, V., 1994. "Criteria importance theory". *Mathematical Social Sciences* 27 (3): 237–252.
- Podinovsky, V., 2002. "The quantitative importance of criteria for MCDA". *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 11 (1): 1–15.
- Pomerol, J., Barba-Romero, S., 2000. *Multicriterion Decision in Management: Principles and Practice*. Kluwer Academic Publishers.
- Reina, D., 2008. Fundamentos de Matemática Difusa. Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Facultad de Matemáticas. URL <http://www.konradlorenz.edu.co>
- Roy, B., 1991. "The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods". *Theory and Decision* 31 (1): 49–73.
- Roy, B., 1996. *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. Kluwer Academic Publishers.
- Roy, B., Mousseau, V., 1996. "A theoretical framework for analysing the notion of relative importance of criteria". *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis* 5 (2): 145–159.
- Rudas, I., Fodor, J., 2009. "Fundamentals of fuzzy preference modeling". En 8th WSEAS International Conference on Applied Informatics and Communications (AIC'08). 134–145.
- Rudin, W., 1964. *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill.
- Schalk, S., 1996. General equilibrium model with a convex cone as the set of commodity bundles. FEW Research Memorandum 740, Tilburg University.
- SENPLADES (Secretaría Nacional de Planificación y Desarrollo). 2013. Plan Nacional del Buen Vivir 2013-2017.
- Truchon, M., 2006. Borda and the maximum likelihood approach to vote aggregation. Working paper, CIRPÉE.
- Vansnick, J., 1986. "On the problem of weights in multiple criteria decision making (the noncompensatory approach)". *European Journal of Operational Research* 24 (2): 288–294.
- Young, H., 1974. "An axiomatization of Borda's rule". *Journal of Economic Theory* 9 (1): 43–52.

Young, H., 1988. "Condorcet's theory of voting". *American Political Science Review* 82 (4): 1231–1244.

Zimmermann, H., 2001. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Springer Netherlands.