TRATADO

DE

ARITMETICA GENERAL

Y

ALGEBRA

POR

José Kolberg S. J.

PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA POLITÉCNICA DE QUITO.

QUITO.

IMPRENTA NACIONAL.

1872.

ADVERTENCIA.

Este tratado de Aritmética general, que conforme al nuevo programa de enseñanza debe servir para el estudio de las Matemáticas en los colegios de la República del Ecuador, difiere notablemente de las demas obras de su género que hasta ahora se han usado así en esta República como en otros estados.

La Aritmética, como ciencia, es la teoría de los números, de donde fundándose en las nociones que el comun de los hombres tiene acerca del número, debe desarrollar su objeto hasta ponerle en consonancia con las aplicaciones mas elevadas del cálculo integral. Solo esponemos al presente la parte inferior de esta ciencia, tal cual suele esplicarse en la enseñanza secundaria; mas, con la mira de dar una esplicacion mas cabal de la misma, nos ha parecido conveniente desarrollar la teoría del número con mayor estension que aquella con que hasta ahora se ha acostumbrado; no dudando que los principios establecidos en las páginas de esta obra, satisfarán á las exigencias de una verdadera y sólida filosofía, así como á los deseos de los que mas de lleno quieran imponerse en las ciencias de las Matemáticas.

No es frecuente á la verdad ver en los tratados de Algebra la idea exacta del número positivo, negativo, algébrico y mucho ménos la del imaginario y complejo. Vemos así que el señor P. L. Cirodde, en sus lecciones de Algebra, traducidas al castellano por Don Lope Gisbert, obra francesa y que por el título de científica, tanta difusion ha adquirido, se espresa en el nº 281 del modo siguiente, sobre las cantidades imaginarias: "Cuando entran, dice, en un cálculo espresiones imaginarias de la forma $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ sin atribuirles idea alguna de cantidad, *lo cual seria absurdo, convendremos* en someterlas á las reglas establecidas para las cantidades reales." Siempre se ha creido que el objeto adecuado de las matemáticas es la cantidad y que solo con la cantidad puede el Algebra verificar sus cálculos; pero, segun este autor, los matemáticos pueden hacer algo mas que los otros hombres. Con efecto, segun él las espresiones imaginarias, no solo no contienen cantidad alguna, sino que hasta es absurdo atribuirles tal significacion; y no obstante *convienen* los matemáticos en verificar sus cálculos por tales espresiones, y por consiguiente calculan no con cantidades sino con absurdos ó con ideas quiméricas de cantidad, y lo que es mas, valiéndose de premisas desconocidas, reflexionando con ideas absurdas llegan siempre, en fuerza de la consecuencia lógica, á los verdaderos y sublimes resultados de las ciencias exactas. Don Joaquin M. Fernandez y Cardin, á quien á pesar del órden poco lógico de su obra, ciertamente han hecho célebre las seis ediciones de la misma publicadas hasta 1869, reconoce la cantidad en las espresiones imaginarias; pero ni una palabra dice sobre el modo como pueden representarla, salvando al principio de estos cálculos la dificultad, diciendo: "Se ha *convenido* en aplicar á las cantidades imaginarias las mismas reglas que van espuestas para el cálculo de las cantidades reales y en que $(\sqrt{-1})^2=-1$. En esta doble hipótesis &a." Las palabras "se ha convenido" indican por lo ménos que la idea que á las cantidades imaginarias corresponde es estéril ó probablemente semiabsurda ó desconocida.

Por lo que toca á nosotros nos abstendremos de deshonrar con semejantes aserciones á una ciencia que justamente ha merecido el nombre de ciencia exacta.

Bien conocemos que una obra destinada á la enseñanza secundaria, ademas del mérito científico debe tener una suma aptitud didáctica, por lo que se suprime en ella toda dificultad ménos útil: pero no se puede negar que el fundamento es lo mas importante y principal del edificio, y esperamos de la pericia y celo que adornan á los profesores de que dispone la República, conseguirán en la instruccion de la juventud mucho mas de lo que puedan imaginarse otros ménos interesados y celosos.

Empezando como es natural por los números absolutos, esponemos la teoría de los números positivos y negativos, ó sea de los números destinados á sumarse ó restarse, haciéndose abstraccion del número absoluto con quien tienen esta relacion. Un número que puede ser á la vez positivo y negativo se dice que es *algébrico*: esta es la primera abstraccion aritmética que conduce á generalizar el cálculo; y claro está que en órden á esta clase de números habrán de tener su valor las demostraciones. Aplicando los números positivos y negativos á la espresion de posiciones geométricas, se ve cuan perfectamente pueden representarles si son estas completamente opuestas; y generalizando este método de considerar los números como símbolos de posicion, se manifiesta cómo pueden las posiciones aun cuando no sean completamente opuestas ser significadas por números. De aquí resulta la ídea de *números de posicion* que espresan á la vez una cantidad ó distancia absoluta y una posicion determinada al rededor de un punto fundamental que sirve de partida. Los números de posicion forman la segunda abstraccion aritmética, la mas general posible, que convierte la Geometría en Aritmética, haciendo que las relaciones de distancia y posicion angular entre puntos de un plano, se sujeten á las reglas del cálculo como cantidades puramente numéricas. Pertenecen á esta suprema clase todos los números conocidos, bien sean positivos ó negativos, reales, imaginarios ó complejos, y se demuestra que no puede haber otra clase mas elevada. Fundados en este principio geométrico bien podremos determinar para todos una misma y general regla de cálculo sin necesidad de hacer suposicion alguna. "*No convenimos* por consiguiente en someter las espresiones imaginarias y complejas á las reglas establecidas para las cantidades reales"; sino que partiendo del principio general que las une á todas, demostramos absolutamente que aquellas se sujetan á las leyes de estas; ó para espresarnos con mas exactitud, que las de las primeras como pertenecientes á la suprema clase, rigen tambien á la segundas, que no son sino una especie de la misma clase. Mucho conduce al fin propuesto la definicion general de la multiplicacion dado en el § 3º que es el fundamento de la mayor parte de la Aritmética, y que se ha demostrado por su aplicacion á todos los casos posibles.

Bien podrá abreviarse el tratado de los números imaginarios y complejos contenido desde el § 77 al 86, lo cual tendrá lugar en la 2ª edicion. Por ahora, como lo suponemos ménos conocido y en algunos puntos completamente nuevo, hemos creido deber esponerlo con mayor estension y diligencia, de suerte que no quede duda alguna en las demostraciones. Queda por consiguiente á la inteligencia y discrecion del maestro el elegir lo mas necesario para la enseñanza secundaria.

Tal vez la oposicion de los nombres *real é imaginaria* aplicados á la cantidad, ha inducido á algunos á creer que solo tienen existencia real las cantidades reales, y que las imaginarias solo existen en la imaginacion ó que son imposibles. Semejante modo de considerar las cantidades solo puede ser verdadera, si se concibe a á la cantidad puramente discreta, que no permita esplicacion alguna geométrica, pero es evidentemente falso aplicado á la cantidad en general.

El cálculo de las cantidades concretas se reduce pues al de las cantidades abstractas, el de los números enteros es un caso particular del de los quebrados, el de los números absolutos está contenido en el de los algébricos y el de los números reales algébricos sigue las mismas reglas que el de los números complejos. Siempre tiende la Aritmética á generalízar por los métodos mas universales; si bien puede suceder en algun caso particular que el resultado de un problema debe necesariamente ser un número entero y absoluto, é incapaz por la naturaleza de la cuestion de los caractéres imaginario, positivo, negativo ó fraccionario.

Si se pregunta, por ejemplo, cuántos hombres se necesitan para hacer en 8 dias la obra que 15 hombres han acabado en 17 dias; responde la Aritmética $31\frac{7}{8}$ hombres, cantidad que concreta como debe ser es evidentemente imposible. No se sigue de aquí que las fracciones en general sean cantidades imposibles, sino que no pudiendo satisfacerse al problema mas que con un número fraccionario, contiene dicho problema un absurdo. Del mismo modo cuando en la resolucion de un problema, que debe ser satisfecho por una cantidad real, obtenemos un número imaginario, solo podremos inferir que el tal problema contiene alguna condicion absurda é imposible por lo tanto de realizarse, y no que sean imposibles los números imaginarios.

Así que, mas convendria derivar el nombre *cantidad imaginaria* de la palabra *imagen*, esto es, espresion de tal cantidad que puede gráficamente designarse.

La multiplicacion de cantidades complejas puede siempre verificarse de dos maneras diferentes, á saber, puramente algébrica ó por la suma de los ángulos que contienen. Esta propiedad tan fundamental es consecuencia necesaria del carácter de las cantidades complejas, y por ella se verifica el tránsito sencillo de los números y líneas rectas á cantidades que á primera vista parecen tan heterogéneas, como son los ángulos y arcos.

De todos es conocida la gran dificultad en demostrar geométricamente las fórmulas trigonométricas. Casi nunca se encuentran demostradas con el rigor que exige la generalidad con que han de aplicarse; y solo para establecer la fórmula del seno ó coseno de $(\alpha+\beta)$ es necesario descender á una multitud de casos. La teoría de los números complejos suministra como consecuencias sencillas estas fórmulas en toda su generalidad, por manera que presupuesta la nocion de las funciones goniométricas, basta aplicar la definicion general de la multiplicacion, para deducir facilmente las cuatro fórmulas generales.

La teoría enteramente nueva consignada así en los §§ 91-95 juzgamos nos autoriza para que separándonos de la costumbre hasta ahora seguida, tratemos de la Goniometría como parte del Algebra. Fuera de esto, nos mueve á adoptar este método la simple reflexion de que perteneciendo á la Geometría las funciones Goniométricas, no deben por lo mismo considerarse fuera del objeto de la Aritmética, y aun con mas razon parecen ser del dominio inmediato de esta ciencia que de la Geometría atendido su carácter de números abstractos; puesto que son cocientes que representan las relaciones existentes así entre las partes de un número complejo, como entre este y su ángulo. Por esto el uso de los números complejos como algébricos, es lo mas frecuente en las matemáticas superiores.

Manifestemos por fin el propósito que constantemente nos ha acompañado durante este trabajo de emplear el método mas sencillo y apto para la inteligencia de los jóvenes. Una larga esperiencia en semejantes ocupaciones nos ha proporcionado medios suficientes de eleccion, ya sea respecto de las materias, ya respecto del método y demostraciones.

Ademas del testimonio de nuestra conciencia, miráseinos como premio de nuestra diligencia en procurar la sencillez y claridad, la aprobacion de los maestros, y la que con su diligente aplicacion y constancia en aprovecharse de estos trabajos, manifiesten los discípulos.

No se ha dejado sinembargo que prevalezca este cuidado de la sencillez al deber de dar, cuando se ofrece, demostraciones sólidas y completas, capaces de satisfacer de lleno al entendimiento deseoso de la verdad. Muy bien conocemos que no hay en materia de instruccion preocupacion mas perjudicial que el pretender eludir las dificultades científicas cubriéndolas con la falsa apariencia de semidemostraciones, y esto nos ha movido á proponer bajo las formas que se pueden ver en el § 17 las demostraciones relativas al órden indiferente de los factores, las de la multiplicacion de los polinomios algébricos y division de los mismos en los §§ 22 y 25 y otras varias. Concluimos finalmente con advertir que en ciencias de un carácter práctico tan marcado, como las que son objeto de la presente obra, nadie debe contentarse con la simple especulacion y teoría: al matemático como al soldado le forma el ejercicio; y por esto nunca se encarecerá demasiado la necesidad del cálculo numérico y demas aplicaciones prácticas que acompañen ó sigan inmediatamente á la adquisicion de los principios teóricos.

Quito, setiembre 24 de 1872.

El Autor.

ARITMETICA GENERAL

Y

ALGEBRA.

INTRODUCCION GENERAL.

I. 1. Todo lo que puede aumentarse ó disminuirse se llama *cantidad.* Una cantidad que se presenta como numerable, se llama *cantidad numérica ó discreta;* una cantidad que se representa como estensa y mensurable, se llama *cantidad geométrica ó continua.* Son, por ejemplo, cantidades: una propiedad, una deuda, un bosque de árboles, una línea, una superficie, la intensidad de la luz, el peso de un cuerpo &a. Todo esto puede aumentarse ó disminuirse sin que deje ser ó propiedad, ó deuda, ó un bosque &a.

2. Una cantidad numérica cualquiera, por ejemplo, una multitud de árboles ó pesos, se compone de cosas *semejantes* (considerando su naturaleza, fin ó forma &a.), pero *distintas* é independientes entre sí por su individualidad y naturaleza (un árbol, un peso constituye un ser por sí mismo independiente de otro). Esta distincion natural de las cosas que forman una pluralidad, se entiende cuando decimos que la cantidad numérica es *discreta.* Frecuentemente solo por una operacion de nuestro entendimiento, considerando la semejanza repetida en cada individuo de una pluralidad, nos formamos la idea de que estas pertenezcan unas á otras y formen *un todo,* de un órden superior, compuesto de

partes que pueden numerarse; y como este todo lógico podria contener un número mayor ó menor de partes distintas, se llama cantidad numérica. Una cantidad numérica, por tanto, no es otra cosa que un número de cosas semejantes y discretas comprendidas por su semejanza como un todo.

3. *Las cantidades geométricas* pertenecen todas al espacio y se reducen á tres clases segun el número de las dimensiones que tienen, es decir: á las líneas (con una), á las superficies (con dos) y á los cuerpos (con tres dimensiones). Estas cantidades constituyen siempre un todo por sí mismo ántes de operacion alguna de nuestro entendimiento. Por otra parte, no contienen partes discretas ó determinadas segun la magnitud ó individualidad. En una línea, por ejemplo, no hay distincion ninguna entre una parte de ella y la parte siguiente, sino por el lugar del espacio que ocupan; todas las partes imaginables se siguen unas en pos de otras sin interrupcion ó límite sensible. Donde se ve que no está compuesta por partes realmente distintas y determinadas. Ademas, si se quiere saber cuántas partes hay en dicha línea, no podria asignarse jamàs ese número pedido, siendo indefinidamente grande, porque en una parte dada, tan pequeña como se quiera, siempre podremos asignar las partes de esta parte, y por consiguiente multiplicar el número encontrado de las partes de la línea sin límite alguno. A dicha calidad de las cantidades geométricas llamamos su *continuidad.*

4. Como la cantidad geométrica no contiene por sí misma un número determinado de partes naturales, no es numerable. Pero para hacerse una exacta idea de su magnitud respecto á otra de la misma especie, es menester usar una medida, es decir, otra cantidad geométrica de la misma especie y mas pequeña y determinada por su magnitud. Observando cuantas veces dicha medida está contenida en la cantidad geométrica dada, hallaremos un número que represente la magnitud de la cantidad de que se trata: es decir, la cantidad en cuestion es á la medida, como el número obtenido á la unidad. Esta operacion se llama *medir.* Cada cantidad geométrica siendo mensurable, puede representarse por números, cuya unidad es la medida usada.

II. Las ciencias que tratan de las cantidades se llaman *Matemáticas* (μάϑησις=scientia per excellentiam); y se dice *Aritmética* (αριϑμός=número, scientia aritmética=ciencia de los números) la parte que trata de las cantidades numéricas; y *Geometría* (γῆ=tierra, μετρεῖν=medir, medida de tierra) la parte que trata de las cantidades geométricas.

III. *Términos técnicos.*

1) *Axioma ó principio* es una verdad evidente por sí misma y que por esto no necesita demostracion.

2) *Teorema* es una verdad cuya evidencia se tiene solo despues de la demostracion.

3) *Problema* es una cuestion que exige una solucion.

4) *Lema* es una proposicion ménos importante que prepara la demostracion de otra.
5) *Escolio* es una observacion sobre una ó varias proposiciones precedentes.
6) *Corolario* es una consecuencia muy sencilla que resulta de una ó varias proposiciones precedentes.
7) *Esplicaciones* son unas definiciones y nociones previas.
8) *Hipótesis* es una suposicion hecha en el enunciado de una proposicion, y *tesis* la afirmacion de una verdad contenida en el mismo enunciado de la proposicion.

Teorema, problema y lema en general toman el nombre de proposicion.

Deben demostrarse todas las verdades que las matemáticas enseñan, cuando por sí mismas no son evidentes, es decir, cuando no se contiene en uno ú otro axioma. Las demostraciones se efectúan ó inmediatamente por medio de dichos axiomas ó por medio de verdades ya demostradas. Donde se ve que los axiomas finalmente constituyen el fondo de todas las matemáticas.

IV. Tales *axiomas ó principios generales* son las siguientes:

1) Toda cantidad es igual á sí misma:

$$A=A$$

2) Una cantidad igual puede ponerse en lugar de otra igual:

$$\begin{array}{r} A+B=C \\ B=M \\ \hline A+M=C \end{array}$$

3) Dos cantidades que son iguales á una tercera son iguales entre si:

$$\begin{array}{c} A=M \\ B=M \\ \hline A=B \end{array}$$

4) El todo es igual á sus partes juntas:

$$\begin{array}{c} m,\ n,\ p \text{ las partes de } A \\ \hline A=m+n+p \end{array}$$

5) El todo es mayor que cada una de sus partes.

$$\begin{array}{c} A=m+n \\ \hline A>m;\ A>n \end{array}$$

6) Las partes son menores que el todo:

$$\frac{A=m+n+p}{m<A;\ m+n<A}$$

7) Sumar cantidades iguales con otras iguales da por resultado cantidades iguales:

$$\frac{\begin{array}{c}A=M\\B=N\end{array}}{A+B=M+N}$$

8) Restar cantidades iguales de otras iguales da por resultado cantidades iguales:

$$\frac{\begin{array}{c}A=M\\B=N\end{array}}{A-B=M-N}$$

9) Multiplicar cantidades iguales por otras iguales da por resultado cantidades iguales:

$$\frac{\begin{array}{c}A=M\\B=N\end{array}}{A\,.\,B=M\,.\,N}$$

10) Dividir cantidades iguales por otras iguales da por resultado cantidades iguales:

$$\frac{\begin{array}{c}A=M\\B=N\end{array}}{\frac{A}{B}=\frac{M}{N}}$$

11) En general: Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales los resultados son iguales.

NOCIONES PRELIMINARES.

Los números y las reuniones de los números.

I.

Esplicaciones. Cada cantidad numérica considerada como un todo y en oposicion á otras de la misma especie se llama *unidad*. La unidad, sus múltiplos y partes se llaman *números*. Añadiendo la unidad á la unidad se produce el número 2; añadiendo la unidad á 2 se produce el número 3, y así añadiendo siempre la unidad al número ya obtenido, se forma la serie *natural* é indefinidamente creciente de números: 1, 2, 3, 4, 5.... La formacion de números por medio de la unidad se dice *numerar*, y la de nuevos números por medio de otros dados se dice *calcular*.

II.

Esplicaciones. Entre los números deben distinguirse:

1. *Números enteros y fraccionarios ó quebrados*. Un *número entero* es un número que tiene por unidad una cantidad indivisa; y un número fraccionario es un número que tiene por unidad una parte de una cantidad. Son números enteros los números naturales 1, 2, 3, 4, 5...., pues tienen por unidad el número indiviso 1; pero son números fraccionarios, por ejemplo, los números $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ . . . $\frac{13}{7}$, pues tienen por unidad $\frac{1}{7}$, es decir, una parte de 1.

2. *Números concretos y abstractos*. Un número *concreto* es un número que tiene por unidad una cantidad denominada por sus calidades físicas, por ejemplo, 7 árboles, 13 caballos, 4 luces &a. Dicha calidad se llama la *denominacion* del número concreto. Un número *abstracto* es un número que tiene por unidad la unidad sin denominacion ó abstracta. Así, 3, 125 son números abstractos.

Cantidades concretas que tienen la misma denominacion se llaman *homónimas* (*ὁμός*=igual, *ὄνομα*=nombre); cantidades concretas que pueden reducirse á la misma denominacion (por ejemplo: pesos, reales ó metros, centímetros), se llaman *homogéneas* (ὁμός=igual, γένος=especie). Dos cantidades son iguales cuando teniendo la misma denominacion ó siendo abstractas contienen el mismo número de unidades. La espresion algebráica de la igualdad que existe entre dos cantidades se llama *ecuacion* ($a=7$); la cantidad que está á la izquierda del signo de igualdad (=) se llama *primer miembro* de la ecuacion y la que está á la derecha *segundo miembro* de la ecuacion. En la ecuacion $x+7=15$ la cantidad compuesta $x+7$ es el primer miembro y el número 15 el segundo miembro de la ecuacion.

III.

Espliaciones. Ademas de esto, los números se distinguen en números *determinados é indeterminados ó generales.*

1. Los *números determinados* son indefinidos. Para designarlos basta un número muy pequeño de signos que se llaman *cifras.*

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

El signo 0, que se pone con las cifras, aunque no sea una cifra, se dice *cero* y designa que las unidades faltan en el lugar que ocupa. Por los otros se designan inmediatamente los números: *uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve.* Por medio de los mismos signos se espresan los números enteros mayores que nueve, atendiendo ya al *valor absoluto ó natural* ya al *valor local* de dichos signos. Escribiendo las cifras 1, 8, 9, 2, 7 en una misma línea, unas en pos de otras sin interposicion de signo ó espacio alguno:

18927

y contando de la derecha á la izquierda, los *valores absolutos ó naturales* de las cifras escritas son siete, dos, nueve, ocho, uno; pero contando igualmente de la derecha á la izquierda, la cifra del primer lugar significa *unidades,* la del segundo lugar *decenas,* la del tercer lugar *centenas,* la del cuarto lugar las *unidades de mil,* la del quinto lugar *las decenas de mil* &a. Así 18927 significa: una decena de mil, mas ocho unidades de mil, mas nueve centenas, mas dos decenas, mas siete unidades; es decir en breve, significa: diez y ocho mil novecientos veintisiete. Por este valor local de las cifras, el valor de cada una de ellas se hace 10, 100, 1000, 10000.... veces mayor, ocupando el 2.°, 3.°, 4.°, 5°....lugar. Faltando en el número que ha de escribirse las unidades ó las decenas, ó las centenas &a; el lugar de unidades, de decenas, de centenas &a. debe ocuparse por el signo 0; por ejemplo, en 20300 faltan las unidades de mil, las decenas y las unidades y el número escrito significa: veinte mil trescientos. Este método de representar todos los números enteros por medio de las nueve cifras y del signo 0 se llama *el sistema decimal* ó *década*, y el número 10 se llama la *base* del mismo sistema.

Por medio de los mismos signos pueden escribirse tambien todos los números fraccionarios. La parte de la cantidad que constituye la unidad del número fraccionario, se escribe, haciendo una raya horizontal en la línea, en donde se escribe, poniendo la cifra 1 sobre la raya y el número que indica la multitud de las partes bajo la raya; por ejemplo, $\frac{1}{5}$ significa una quinta parte. Dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.... quintas partes, se escriben $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$ .... poniendo los números correspondientes 1, 2, 3, 4... en lugar de 1 sobre la raya. La cantidad puesta sobre la raya se dice *numerador* y la cantidad puesta bajo la raya se llama *denominador*.

2. Los *números indeterminados* se espresan por signos generales, ordinariamente por las letras minúsculas del alfabeto latino ó griego. Por esto, cada letra así empleada puede representar todos los números posibles, pero con la restriccion que en el mismo problema, la misma letra ha de representar siempre el mismo número, y letras diversas números distintos. Por ejemplo, cuando en un problema á la letra *a* se ha atribuido el valor 9, este valor 9 debe retenerse para dicha letra *a* por todo el discurso del mismo problema, aunque otras veces la tal *a* pueda representar otro número cualquiera.

La parte de la aritmética que trata de los números determinados se llama *aritmética inferior*, y la que trata de los números indeterminados se llama *aritmética superior ó general.* Por el uso recibido en muchos paises, la primera se dice tambien simplemente sin adjetivo determinante *aritmética* y la segunda *álgebra.*

NOTA.—La palabra "álgebra" es por su orígen árabe, siendo al=el y gebra=cálculo. Por esto se usaba al principio para designar una parte de la aritmética general que enseña á buscar el número incógnito por medio de otros conocidos relacionados entre sí, por ecuaciones, lo cual es calcular. Pero con el tiempo esa palabra fué reduciendo mas y mas el nombre aritmética, que designa frecuentemente solo la aritmética inferior.

IV.

Esplicaciones. *Operaciones aritméticas ó algebraicas* se llaman todos los diversos métodos de calcular por medio de números á fin de obtener los resultados que se quieren. Dichas operaciones pueden completamente ejecutarse cuando los números dados son determinados; en el caso opuesto, cuando los números dados son indeterminados, las operaciones se ejecutan hasta obtener una forma muy cómoda del resultado en la cual finalmente han de poherse valores determinados en lugar de las cantidades indeterminadas. Para hacer posibles tales operaciones, la aritmética tiene necesidad de varios signos de cantidad, de operacion y de relacion.

Signos de cantidad son todos los susodichos de número, ó las cifras para los números determinados, y las letras minúsculas latinas ó griegas para los números indeterminados.

Signos de operacion son entre otros los de adicion, sustraccion, multiplicacion y division (+, —, . ó ×, :). Los otros se darán á conocer á medida que se vayan presentando.

Signos de relacion son el signo de igualdad (a=b, a igual á b) y los signos de desigualdad (a>b„ a mayor que b"; a<b„ a menor que b").

V.

Esplicaciones. La reunion de las cantidades por medio de los signos de operacion se llama *espresion aritmética ó algébrica.* Se llaman *términos* las partes de una espresion que van precedidas ó seguidas del signo + ó del signo —. Así los términos de la espresion a+b—c son a, +b, —c. Una tal espresion que consta de varios términos se dice *espresion compuesta.* Usanse tambien las palabras monómio, binómio, trinómio.... en general polinómio, segun que el número de los términos sea uno, dos, tres.... varios; *a* es un monómio, a—b un binómio, a+b—c un trinómio.

Toda reunion de cantidades y espresiones algébricas efectuada por medio de signos de relacion se llama *fórmula.* Cada fórmula constituye la espresion matemática de una proposicion ó verdad que las matemáticas enseñan. Así, por ejemplo,

$$(a+b)\,(a-b)=a^2-b^2$$

es una fórmula, y la espresion abreviada del teorema: La suma de dos números multiplicada por la diferencia de los mismos da por resultado la diferencia de los cuadrados de los mismos números."

Para designar que una espresion compuesta debe tomarse como un todo y como un todo someterse á las diversas operaciones que han de hacerse de ella, es menester tener cuidado de encerrar dicha espresion en un paréntesis. Así a—(b—c) significa, que la diferencia b—c debe restarse de a, y el resultado es a—b+c; pero a—b—c significa que a debe disminuirse lo primero de b y despues de c.

Quitar ó resolver un paréntesis, es: quitar el paréntesis y hacer todas las operaciones necesarias á fin que el valor de la espresion no padezca alteracion.

VI.

Esplicaciones. La aritmética, pues, tiene por objeto reunir las cantidades, unas á otras conforme á las reglas descubiertas, y conforme á las condiciones de una cuestion propuesta; desarrollar en seguida las espresiones algébricas así formadas, y transformarlas en otras equivalentes y mas acomodadas al cálculo numérico; ademas de esto, en general buscar números incógnitos por números conocidos y dados, estudiar las relaciones varias y muy complicadas que existen entre las cantidades, y así venir á hallar nuevas leyes y verdades que el entendimiento del hombre nunca hubiera inmediatamente conocido.

Hay siete operaciones llamadas aritméticas ó operaciones de cálculo estrictamente, es decir, la adicion, sustraccion, multiplicacion, division, formacion de potencias, estraccion de raices y formacion de logaritmos.

§. 1.

Adicion.

Esplicaciones. La adicion es la reunion de las unidades de dos ó mas números en un número nuevo. Efectuar la adicion se dice *sumar* y por consiguiente:

Sumar un número a á otro b, es hallar un número nuevo s, que contenga tantas unidades cuantas contienen a y b juntas.

Los números a y b dados para sumar se llaman *sumandos*; el número s, resultado de la adicion se llama *suma*. El signo de la adicion es una cruz derecha $(+)$ y se enuncia "mas".

La espresion aritmética de que el número b ha de sumarse al número a, y que el nuevo número formado es s, tiene la forma

$$a + b = s$$
$$7 + 5 = 12$$

La espresion $a + b$ se dice *suma indicada* y el número s *suma real*.

A un mismo número pueden sumarse tambien varios otros números. Para efectuar esta suma, al número dado, se suma lo primero otro número cualquiera, al resultado obtenido otro número &a, cuya operacion puede indicarse del siguiente modo:

$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d$$

En una suma todos los sumandos deben tener la misma denominacion, la cual por consiguiente será la de la suma:

$$5 \text{ pesos} + 6 \text{ pesos} + 8 \text{ pesos} = 19 \text{ pesos};$$
$$8 \text{ caballos} + 10 \text{ caballos} = 18 \text{ caballos}.$$

Si las cantidades dadas tienen denominaciones que pueden reducirse á la misma, frecuentemente en la suma indicada, esas se escriben con sus propias denominaciones; pero la suma real, despues de haber reducido las cantidades dadas á la misma denominacion, debe tener siempre la denominacion comun:

$$3 \text{ pesos} + 4 \text{ rs.} = (24 \text{ rs.} + 4 \text{ rs.}) = 28 \text{ rs.} \quad \text{ó bien}$$
$$= (\tfrac{6}{2} \text{ ps.} + \tfrac{1}{2} \text{ ps.}) = \tfrac{7}{2} \text{ ps.}$$

Como las fracciones tienen la denominacion que indican los denominadores, se sigue el mismo modo de escribir:

$$2 + \tfrac{4}{3} + \tfrac{5}{6} = (\tfrac{12}{6} + \tfrac{8}{6} + \tfrac{5}{6}) = \tfrac{25}{6}$$

Pero aquí se escribe tambien en la suma real $4\tfrac{1}{6}$ en lugar de $\tfrac{25}{6}$, y esa espresion quiere designar $4 + \tfrac{1}{6}$.

§. 2.

Sustraccion.

Esplicaciones. Restar un número 4 de otro número 12, supone que el número 4 se encuentra en el número 12 como parte, es decir, que el número 12 sea la suma del número 4 y del número buscado 8. De donde podremos deducir la definicion:

> *La sustraccion* es la operacion que, dada la suma de dos números y uno de los sumandos, da el otro sumando. Y por consiguiente:
>
> *Restar* un número b de otro a es: formar un nuevo número d, que sumado con el número b vuelva á reproducir el número a.

La suma a de la que el número b debe restarse, en la sustraccion, se llama *minuendo;* el sumando dado b, que debe restarse, en la sustraccion, se llama *sustraendo;* y el otro sumando pedido d, resultado de la sustraccion, se llama aquí *resta ó diferencia.* El signo de sustraccion es una raya pequeña horizontal (—) y se enuncia "ménos."

Por esto la espresion aritmética que significa que el número b ha de restarse del número a y que el nuevo número formado es d, se escribe:

$$a - b = d \quad \text{y equivale á} \quad b + d = a$$
$$9 - 4 = 5 \quad \text{y equivale á} \quad 4 + 5 = 9$$

La espresion $a - b$ se llama *diferencia indicada* y el número d *diferencia real.*

De un mismo número pueden restarse tambien varios otros números. A este fin, del minuendo dado, lo primero se resta uno de los sustraendos, del resto obtenido otro de los mismos &a. Para indicar esta operacion puede escribirse:

$$a - b - c - d = [(a - b) - c] - d$$

Como la sustraccion no es otra cosa que la inversion de la adicion, todo lo que se ha dicho en el parágrafo precedente sobre la denominacion de las cantidades que entran en una suma, vale igualmente respecto á la sustraccion.

§. 3.

Multiplicacion.

Esplicaciones. Siendo iguales todos los sumandos en una suma indicada, la adicion se convierte en *multiplicacion.*

Definicion elemental. Multiplicar un número a por otro número b es: formar un nuevo número p que contiene al número a tantas veces por sumando, cuantas el número b contiene á la unidad.

$$\left.\begin{array}{r} 7 . 4 = 7 + 7 + 7 + 7 \\ 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}\right\} \qquad (1^*)$$

$$\left.\begin{array}{r} a . b = a + a + a + a + \ldots . b \text{ veces} = a\,b \\ b = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots . b \text{ veces} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

El número a que debe multiplicarse, se llama *multiplicando*; el número b por que debe multiplicarse, se llama *multiplicador;* uno y otro juntamente toman tambien el nombre de *factores;* el número p, resultado de la multiplicacion, se llama *producto.* El signo de la multiplicacion es una cruz oblicua $(\times)$ ó un punto $(.)$ que se enuncian "*multiplicado por.*" Estos signos, empleando letras ó signos generales de números, tambien pueden enteramente dejarse.

La espresion aritmética que indica que el número a ha de multiplicarse por el número b y que el nuevo número formado es p, se escribe por consiguiente

$$a \times b, \quad ó \quad a . b, \quad ó \quad a b = p$$
$$7 \times 4, \quad ó \quad 7 . 4 = 28$$

La espresion $a \times b$, $a . b$, ab se llama *producto indicado* y el número p *producto real.*

Un número a puede multiplicarse tambien por varios otros números b, c, d . . . A este fin, se multiplica lo primero, el número dado por uno de los multiplicadores, despues el resultado obtenido por otro de los mismos &a. La espresion correspondiente será:

$$a\,b\,c\,d = [(a\,b)\;c]\;d$$

En un producto indicado de dos factores, solo el multiplicando puede tener denominacion, el multiplicador nunca la tiene; el producto resultante tiene la denominacion del multiplicando. En un producto de varios factores solo uno de los mismos puede tener denominacion, todos los otros son números abstractos.

Ejemplo: En cada una de las 20 casas de un pueblo hay 4 caballos, ¿cuántos hay en el pueblo?

Resp. Hay 20 veces 4 caballos, es decir, 4.20 ú 80 caballos. El número 4 tiene denominacion, pero el número 20 no la tiene, significando 20 veces y siendo por esto, como multiplicador, número abstracto. Multiplicar 4 caballos por 20 casas no tiene sentido ninguno.

Segun la definicion propuesta de multiplicacion, el multiplicador ha de ser número *entero*. Pero el uso recibido permite tambien la multiplicacion por una fraccion, dándole sentido diferente de el de aquella definicion. Conforme dicho uso, por ejemplo, 15 multiplicar por $\frac{3}{5}$, quiere decir, tomar tres quintas partes de 15, es decir, dividir 15 en cinco partes iguales y tomar tres de estas partes:

$$15\,.\,\tfrac{3}{5} = \tfrac{15}{5} + \tfrac{15}{5} + \tfrac{15}{5} = 3 + 3 + 3 = 9$$

Se hace primeramente una operacion de division y luego la de la multiplicacion, segun la definicion arriba enunciada.

Como toda ciencia ha de considerar la materia de que trata de un modo general, pondremos aquí una definicion de multiplicacion que contenga todos los casos posibles,

2. *Definicion general de la multiplicacion. Multiplicar* un número a por otro número b es: formar un nuevo número p de a del mismo modo, que el número b está formado de la unidad entera.

Distinguiremos los dos casos:

1) El multiplicador b sea un número *entero.* Segun la definicion general es

$$b = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ b veces}$$

de donde $a\,.\,b = a + a + a + a + \ldots$ b veces $= p$

Pero este es el mismo resultado que hemos encontrado arriba en (1) estableciendo la primera definicion.

2) El multiplicador sea *una fraccion* $\frac{m}{n}$ cualquiera. Conforme á la definicion general, el producto buscado debe formarse de a

de la misma manera que el multiplicador $\frac{m}{n}$ de la unidad 1. Pero se hace de 1 el número $\frac{m}{n}$, tomando la n^a parte de 1 y poniéndola *m* veces:

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots \text{ m veces}$$

Luego se hallará el producto que se busca tomando la n^a parte de *a*, y poniéndola *m* veces. Por consiguiente, espresando la parte n^a de *a* conforme al modo de escribir las fracciones, tendremos:

$$a \cdot \frac{m}{n} = \frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \frac{a}{n} + \dots \text{ m veces} = \frac{a}{n} \cdot m = p$$

El mismo resultado que hemos encontrado arriba, hablando de la multiplicacion de 15 por $\frac{3}{5}$, pues poniendo $a=15$ y $\frac{m}{n} = \frac{3}{5}$, se saca $\frac{a}{n} \cdot m = \frac{15}{5} \cdot 3 = 9$.

Luego la segunda definicion es aplicable á los dos casos propuestos, y mas tarde veremos, que ella vale tambien para todos los otros casos posibles.

§. 4.

Division.

Esplicaciones. Dado un número como producto y ademas otro número como uno de los factores, se halla el otro factor por medio de la *division.*

> *Dividir* un número *a* por otro *b* es: hallar un tercer número *c*, que multiplicado por el número *b*, vuelva á reproducir el número *a* por producto.

El número *a* que debe dividirse, se llama *dividendo;* el número *b* que divide, se llama *divisor;* el número *c*, resultado de la division, se llama *cociente.* El signo de division es (:) ó una raya horizontal (—) y se enuncia "dividido por."

Por consiguiente la espresion aritmética que indica, que el número *a* ha de dividirse por *b*, y que el número nuevo encontrado es *c*, se escribe

$a:b$ ó bien $\frac{a}{b} = c$ y equivale á $a = c \cdot b$

$18:3$ ó bien $\frac{18}{3} = 6$ y equivale á $18 = 6 \cdot 3$

La espresion a:b ó $\frac{a}{b}$ se llama *cociente indicado*, y el número c *cociente real*.

Puede tambien un número dividirse por otros varios. Para efectuarlo, el número dado se divide por uno de los divisores, el cociente hallado por otro de los mismos &a. Dicha operacion puede escribirse

$$a : b : c : d = [(a : b) : c] : d$$

La division contiene dos operaciones distintas:

1.ª *Si el dividendo tiene denominacion y el divisor la tiene tambien*, la division es *una medida* ó dividir es *mensurar*, pues se quiere saber cuántas veces el divisor *está contenido* en el dividendo. El cociente, en este caso, es *un número abstracto* y dice: tantas ó tantas veces. Por ejemplo, dividir 100 pesos por 25 pesos, es preguntar, cuantas veces 25 pesos están repetidos en 100 pesos. El número 4, resultado de la division, es un número abstracto y da la respuesta pedida: cuatro veces.

2.ª *Si el dividendo tiene denominacion y el divisor no la tiene*, la division es *una formacion de una parte* del dividendo, y en este caso, el cociente como parte del todo, tiene la denominacion del dividendo. Así, dividir 100 pesos por 4 es formar una parte de los 100 pesos, que tomada 4 veces equivale á los 100 pesos y que será 25 pesos.

Si el dividendo no tiene denominacion, ni el divisor ni el cociente la tienen.

La razon del todo se deduce de lo susodicho sobre la denominacion de los factores y del producto, en el parágrafo precedente.

§. 5.

Formacion de las potencias.

Esplicaciones. Si un producto tiene iguales todos los factores, la multiplicacion se convierte en *la formacion de las potencias.*

Formar la potencia n *del número* a, ó lo que es lo mismo, *elevar* el número *a* á la potencia *n*, quiere decir: formar un nuevo número *P*, poniendo *a* tantas veces por factor cuantas *n* contiene la unidad.

El número *a* que debe elevarse á la potencia, se llama *base ó raiz;* el número *n* que indica cuantas veces *a* debe tomarse por factor y que por tanto indica *el grado de la potencia*, se llama *esponente;* y el número *P*, resultado de la operacion, se llama *potencia.*

La base, el esponente y la potencia no son sino *números abstractos.*

La formacion de las potencias se indica, escribiendo la base una vez y poniendo el esponente á la derecha un poco mas alto y con letra minúscula.

Por consiguiente, la espresion aritmética que indica que el número a debe elevarse á la potencia n, y que el número P es el nuevo número formado, se escribe:

$$a^n = P \quad \text{y equivale á } a^n = .\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a \ldots \text{ n veces}$$
$$3^5 = 243 \quad \text{y equivale á } 3^5 = 3\,.\,3\,.\,3\,.\,3\,.\,3$$

La espresion a^n se pronuncia "*a* á la potencia *n*," ó bien "*a* á la *n*," ó finalmente, "*n*esima potencia de a" Ademas a^n se llama *potencia indicada* y el nuevo número formado *P potencia real ó valor real* de la potencia.

No puede cambiarse la base con el esponente en una potencia indicada como a^n; este cambio da otro valor real. Es por ejemplo $2^3 = 8$, $3^2 = 9$. Solo $2^4 = 4^2$.

La primera potencia de un número es el número mismo: $a^1 = a$; se pone aquí *a* una vez como factor de 1. La segunda potencia se dice tambien *cuadrado*, la tercera *cubo*, la cuarta *bicuadrado*. Por esto se dice tambien

a^2 el cuadrado de a; $\quad a^3$ el cubo de a;

a^4 el bicuadrado de a.

Si la base es un número entero ó fraccionario y el esponente (como suponemos en la definicion dada) un número entero, cada potencia tiene solo un valor numérico determinado. Asi tendremos siempre:

$$4^3 = 64; \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}, \quad \text{de donde} \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$$

De aquí se infiere, que números iguales elevados á potencias indicadas por los mismos esponentes (enteros), no pueden dar sino valores de potencias numéricamente iguales.

Dado $a = b$, será tambien $a^z = b^z$

§. 6.

Estraccion de raiz.

Esplicaciones. Dado un número como potencia y ademas otro como esponente, se hallará la base por *la estraccion de la raiz.*

Estraer de un número a la raiz del grado n, quiere decir: formar un nuevo número r, que elevado á la potencia n vuelva á reproducir el número a.

Por consiguiente, estraer la raiz n al número a es tambien, descomponer el número a en n factores iguales y tomar uno de los mismos, que será r; y r tomado n veces por factor, dará el número a por producto.

El número a del que debe estraerse la raiz, se llama *cantidad subradical* ó simplemente *subradical;* el número n que indica el grado de la raiz, se llama *índice ó esponente radical;* y el número r, cuya n^{esima} potencia es a, resultado de la operacion, se llama *raiz.*

El subradical, el índice de raiz y la raiz no son sino *números abstractos.*

La estraccion de raiz se indica, poniendo delante del subradical de que ha de estraerse la raiz, el signo $\sqrt{}$, que es una r rasgada, inicial de radix=raiz: y se escribe en el ángulo del mismo signo el índice de la raiz, es decir, el número que indica la raiz que debe estraerse. Ademas de esto, debe tenerse cuidado de cubrir con una línea horizontal, toda la espresion de que debe estraerse la raiz y que por tanto tiene el nombre de *subradical.*

Por consiguiente, la espresion aritmética que designa que la raiz n ha de estraerse del número a y que r es el nuevo número encontrado, se escribe

$$\sqrt[n]{a}=r \quad \text{y equivale á} \quad \sqrt[n]{r\,.\,r\,.\,r\ldots n \text{ veces}}=r \quad \text{ó á} \quad r^n=a$$

$$\sqrt[3]{8}=2 \quad \text{y equivale á} \quad \sqrt[3]{2\,.\,2\,.\,2}=2 \quad \text{ó á} \quad 2^3=8$$

La primera raiz de un número es el número mismo, $\sqrt[1]{a}=a$. La segunda raiz se escribe sin índice, poniendo solo el signo radical; luego $\sqrt{a}=\sqrt[2]{a}$.

La segunda raiz se llama tambien *raiz cuadrada,* y la tercera *raiz cúbica,* de modo que se dice

$\sqrt{a}$, raiz cuadrada de a; $\sqrt[3]{a}$, raiz cúbica de a.

Supuesto que las cantidades subradicales son números enteros ó fraccionarios y los índices de raiz números enteros (los que suponemos en la definicion dada) cada raiz no tiene sino un valor numérico determinado. Así, siempre tendremos:

$$\sqrt[3]{64}=4; \quad \sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\tfrac{2}{3}; \quad \text{de donde} \quad \sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}$$

De aquí se infiere que estrayendo la raiz del mismo índice á cantidades iguales, los valores radicales serán numéricamente iguales:

Dado $a=b$, será tambien $\sqrt[x]{a}=\sqrt[x]{b}$.

§. 7.

Formacion de logaritmos.

Esplicaciones. Dado un número por potencia, y ademas otro por base, se hallará el esponente por *la formacion del logaritmo*, lo que se dice tambien *tomar el logaritmo.*

> *Tomar el logaritmo* de un número a respecto á otro número b es: formar ó buscar un nuevo número l, que siendo esponente de b, vuelva á reproducir el número a.

El número a, que es potencia y de que se busca el logaritmo, se llama *el Número del logaritmo* ó simplemente *el Número;* el número b, que es base de la potencia, se llama aquí igualmente *base:* y el esponente l, que se busca, se llama *logaritmo.*

El Número, la base y el logaritmo no son sino *números abstractos.*

La espresion aritmética que designa que el número l es logaritmo de a respecto á b, se escribe:

$$l = {}_b\log a \qquad \text{y equivale á } b^l = a$$

$$5 = {}_2\log 32 \qquad \text{y equivale á } 2^5 = 32$$

y se pronuncia: l es el logaritmo de a para la base b.

Los logaritmos de números iguales y tomados para la misma base serán iguales; porque si tenemos $b^l = a$, $b^{l'} = c$ y $a=c$, tendremos tambien $l = l'$, luego

$$\text{si } a = c, \quad \text{será tambien } {}_b\log a = {}_b\log c$$

CAPITULO I.

ADICION Y SUSTRACCION.

§. 8.

Calidades de una suma.

Conforme á la definicion, la idea de una suma es que ella há de ser el conjunto, ó la coleccion de todas las partes dadas para constituir un todo, que es la misma suma. Por consiguiente, la suma queda bien ejecutada, si contiene todas las partes dadas, siendo indiferente el órden de los sumandos, supuesto que todos existen en ella. De aquí se infiere:

a) *La suma ha de contener tantas unidades (enteras ó fraccionarias) cuantas tienen los sumandos juntos.*

b) *Para conseguir la suma de varios números, es indiferente que un sumando entre en la suma por primero ó por último.*

Estas proposiciones pueden considerarse como otro enunciado del axioma 4.° *"el todo siempre es igual á sus partes juntas."*

De donde se saca inmediatamente:

1º *Los sumandos pueden cambiar de posicion, sin que se altere el valor de la suma.*

$$a+b+c=a+c+b=b+c+a=\ldots a.c.b. \qquad (\alpha)$$

Luego para efectuar la misma suma de los tres números *a, b,* c, puede cada uno de ellos ser el primero, el segundo ó el tercer sumando, lo cual podremos designar por:

$$(a+b)+c=(a+c)+b=(b+c)+a=\ldots\ldots \qquad (\beta)$$

es decir, que la suma de tres números se puede hacer sumando primeramente dos de ellos, y luego añadiendo el tercer número. Ordinariamente se dejan estos paréntesis en una suma; pues la manera de escribir como en (α) indica suficientemente la misma cosa.

2º *Un número quedará sumado con una suma, añadiéndolo á cualquiera de los sumandos:*

$$(a+b+c)+d=(a+d)+b+c=a+(b+d)+c=\ldots\ldots(\gamma)$$

Porque en uno y otro caso el todo contiene las mismas partes

3º *Una suma quedará sumada con un número, añadiendo cada uno de sus sumandos al número dado.*

$$a+(b+c+d)=a+b+c+d \qquad (\delta)$$

Porque en uno y otro caso, el todo contiene las mismas partes.

Coeficientes y términos semejantes. Conforme á la definicion de la multiplicacion, la suma de varios sumandos *iguales*, no es otra cosa que un múltiplo de dicho sumando. En este caso el sumando igual se escribe solamente una vez, y delante del mismo se pone el número, que indica cuantas veces dicho sumando igual debe ponerse en la suma.

Esplicacion. Se llama *coeficiente* el número que se coloca como factor á la izquierda de una cantidad y que indica cuantas veces esta debe ponerse en la suma. De este modo tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} a+a+a+a=4a \\ a+a+a+\ldots\ m\ \text{veces}=m\,a \end{array}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

No se escribe el coeficiente cuando es la unidad.

Así en el binomio $2a+b$, puede decirse que b tiene por coeficiente la unidad, pues en efecto $1\,.\,b=b$.

Esplicacion. Se llaman *términos semejantes* los que fuera del coeficiente, son *enteramente iguales*, y que por esto constan de las mismas letras, con los mismos esponentes, dispuestos del mismo modo &a. Son, por ejemplo, semejantes los términos:

1) $a;\quad +a;\quad -a;\quad +a$

2) $a^2b;\quad 2a^2b;\quad \frac{1}{3}a^2b;\quad -m\,a^2b$

3) $\frac{a^3c}{x};\quad -5\,\frac{a^3c}{x};\quad +\frac{7}{3}\,.\,\frac{a^3c}{x}$

Pero no son semejantes los términos a^2b, a^3b, ab^2, ab^3. De donde se deduce:

4º *Se hace la suma de términos semejantes, efectuando la suma de los coeficientes que tienen, y escribiendo la suma de los coeficientes encontrada delante del término comun que se escribe una sola vez.*

Por ejemplo:

$$5a + a + 7a = (5+1+7)a = 13a$$

$$2bx^2 + 3bx^2 + \tfrac{1}{5}bx^2 = 5\tfrac{1}{5}bx^2$$

Términos desemejantes no pueden sumarse de este modo.

Como razon de uno y de otro puede asignarse la siguiente: Las espresiones aritméticas, que tienen coeficientes, son verdaderamente las denominaciones especiales de los coeficientes. Así en $3a$ y $5a$, la cantidad a es la denominacion de 3 y de 5. Luego, siendo iguales las denominaciones de los coeficientes, estos pueden sumarse (§. 1 Adicion), dando la denominacion comun á la suma de ellos. Pero cuando las espresiones aritméticas, que tienen coeficientes, no son enteramente iguales, como en los términos desemejantes, ellas no constituyen la misma denominacion de los coeficientes, y por consiguiente, estos no pueden sumarse.

§. 9.

Teoremas fundamentales de las diferencias.

Teorema 1. Cuando se suma con la diferencia de dos números el sustraendo, se halla el minuendo.

$$(a-b)+b=a \qquad (1)$$

Dem. La cantidad $(a-b)$ contiene b unidades (enteras ó fraccionarias) ménos que a; añadiendo, pues, estas b unidades, se hallará la cantidad a.

Teorema 2. Cuando se resta de la suma de dos números uno de los sumandos, se halla el otro sumando.

$$(a+b)-b=a \qquad (2)$$

Dem. La cantidad $(a+b)$ contiene b unidades mas que a; luego restando estas b unidades, quedará solamente a.

Teorema 3. Cuando se resta la diferencia de dos números del minuendo, se halla el sustraendo.

$$a-(a-b)=b \qquad (3)$$

Dem. La cantidad (a—b) contiene *b* unidades ménos que *a*; luego restando esa cantidad (a—b) de *a*, quedarán estas *b* unidades.

Escolio. Un número no padece alteracion, cuando se le añade y quita un mismo número.

$$a+b-b=a$$

§. 10.

Teoremas de las sumas y diferencias.

Teorema 4. Un número queda sumado con una suma, añadiéndolo à un sumando cualquiera (cf. §. 8. 2).

$$(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c) \qquad (4)$$

Dem. De uno y otro modo, el todo contiene las mismas partes.

Teorema 5. Un número queda restado de una suma, restándolo de un sumando cualquiera.

$$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c) \qquad (5)$$

Dem. El todo se disminuye de *c* unidades (enteras ó fraccionarias) si una de sus partes se disminuye de estas.

Teorema 6. Un número queda sumado con una diferencia, sumándole con el minuendo, ó restándole del sustraendo.

$$(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c) \qquad (6)$$

Dem. α) Se aumenta *a* de *c* unidades, si estas *c* unidades se añaden, y luego restando *b* de esta suma, se encuentran en el resultado (a+c)—b, *c* unidades mas que en (a—b). —β). El número (b—c) contiene *c* unidades ménos que *b*; luego restando (b—c) de *a*, quedarán *c* unidades mas, que restando solo *b* de *a*, es decir, a—(b—c) es de *c* unidades mayor que (a—b).

TEOREMA 7. Un número queda restado de una diferencia, restándole del minuendo, ó sumándole con el sustraendo.

$$(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c) \qquad (7)$$

DEM. α) Disminuir a de b y luego de c, es disminuir a de $b+c$; pero del mismo modo disminuir a de c y luego de b, es disminuir a de $c+b$, lo cual es $=b+c$. Por consiguiente será $(a-b)-c=(a-c)-b$.—β) Disminuir a de b y luego de c, es disminuir a de $b+c$; por consiguiente $(a-b)-c=a-(b+c)$.

TEOREMA 8. Un número se aumenta de una suma, añadiéndole cada uno de los sumandos en cualquier órden (§. 8, 3).

$$a+(b+c+d)=a+b+c+d=a+c+b+d=\ldots. \qquad (8)$$

DEM. El todo contiene, de uno y otro modo, las mismas partes.

TEOREMA 9. Una suma se resta de un número, restando cada uno de los sumandos en cualquier órden.

$$\left.\begin{array}{l} a-(b+c)=a-b-c=a-c-b \\ a-(b+c+d)=a-b-c-d=a-d-b-c=\ldots \end{array}\right\} \qquad (9)$$

DEM. Como el todo es igual á todas sus partes juntas, el todo $(b+c+d)$ se habrá restado, cuando se habrán restado todas sus partes, es decir, será

$$a-(b+c+d)=a-b-c-d$$

Notemos que la posicion de los sustraendos en el segundo miembro de la ecuacion, es la misma que la de los sumandos, en la suma $b+c+d$. Pero sin alteracion del valor de esta suma, los sumandos b, c, d, pueden cambiar la posicion en la suma; por consiguiente lo podrán igualmente los sustraendos á la derecha del signo de igualdad, es decir, será

$$a-b-c-d=a-d-b-c=\ldots.$$

TEOREMA 10. Se suma una diferencia con un número, sumando el minuendo y restando el sustraendo en un órden cualquiera.

$$a+(b-c)=a+b-c=a-c+b \qquad (10)$$

DEM. Sumando con a el minuendo b, la suma $a+b$ contiene c unidades mas de lo que se ha pedido; pues habian de restarse c unidades ménos que b unidades; por consiguiente, estas c unidades quedarán para restarse, y la suma pedida será $a+b-c$, lo cual es $=a-c+b$. [T 5.]

Teorema 11. Se resta una diferencia de un número, restando el minuendo y sumando el sustraendo, en un órden cualquiera.

$$a-(b-c)=a-b+c=a+c-b. \qquad (11)$$

Dem. Restando solo b de a, el resto será de c unidades menor que el pedido, porque habian de restarse c unidades ménos que b unidades; luego dichas c unidades quedarán para añadirse á la diferencia $a-b$ y será $a-(b-c)=a-b+c$, lo cual [T. 6] es igual á $a+c-b$.

Teorema 12. Una diferencia quedará sumada con otra diferencia, restando de la suma de los minuendos, la suma de los sustraendos.

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d) \qquad (12)$$

Dem. Sumando solo a con c, la suma $a+c$ tendrá b y d unidades mas de lo pedido; porque el un sumando es de b y el otro de d unidades menor que a y c. Luego quedarán para restarse b y d unidades, es decir, la suma $(b+d)$: de donde $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.

§. 11.

Adicion y sustraccion de polinómios.

Teorema 13. Para restar una suma dada de otra tambien dada, todos los términos de una y otra pueden escribirse en un órden cualquiera, dejando el signo $+$ á los términos de la suma, que representa el minuendo, y dando el signo $-$ á los términos de la suma que representaba el sustraendo.

$$(a+b+c)-(m+n+p)=a-m+b+c-p-n=\ldots \qquad [13]$$

Dem. En virtud de [T. 9] tenemos:

$$(a+b+c)-(m+n+p)=a+b+c-m-n-p$$

Pero el número m, que ha de restarse de la suma $a+b+c$, puede restarse de cualquiera de los sumandos [T. 5]; por consiguiente el número m puede tener todas las proposiciones posibles entre los sumandos a, b, c. Lo mismo vale respecto de los otros sustraendos, n, p. Ademas de esto, segun [T. 9], los sustraendos pueden colocarse como se quiera y tambien los sumandos a, b, c &a.

Escolio. En todo polinómio los términos pueden cambiar de lugar como se quiera, solo dejándoles sus signos:

$$a-b+c-d-e+f=a+c-d+f-b-e=\ldots$$

Se infiere inmediatamente de lo acabado de demostrar.

Teorema 14. Todo polinómio, cuyos términos tienen signos distintos, puede escribirse como diferencia de dos sumas, la primera de las cuales tiene todos los términos que estaban afectados del signo $+$, y la segunda todos los que estaban afectados del signo $-$.

$$a-b-c+d+f-g=(a+d+f)-(b+c+g) \qquad (14)$$

Dem. Resolviendo los paréntesis, y empleando á este fin el T. 13, se hallará el primer miembro de la ecuacion [14.]

NOTA. Cambiando la posicion de los términos puede hacerse que los primeros tengan el signo $-$, ó que den un resultado que tendria el signo $-$. Por ejemplo:

$$15-8+3-4$$

puede escribirse $-8+15-4+3$, en donde 8 tiene el signo $-$, ó bien $3-8+15-4$, en donde los dos primeros términos $3-8$ dan el resultado $3-3-5=-5$, que tiene tambien el signo $-$. Añadiendo un número bastante grande, por ejemplo 100, tendremos sin duda las igualdades [T. 13 y 14]:

$$100+15-8+3-4=100-8+15-4+3=3-8+15-4$$

de modo que dicha manera de invertir el órden de los términos será tambien permitido.

Corolario. Un polinómio que tiene términos semejantes puede simplificarse observando estas reglas:

Regla I. *Si los términos semejantes tienen el mismo signo, se da por coeficiente á la parte literal comun, la suma de todos los coeficientes, con el mismo signo que tenian* [cf. §. 8, 4º]

$$2x+3x+7x+x=(2+3+7+1)x=13x$$

$$-8x-2x-4x-3x=-(8+2+4+3)x=-17x$$

porque, en el segundo caso están para restarse 8 y 2 y 4 y 3 cantidades de la misma denominacion, es decir, está para restarse $(8+2+4+3)x$; por consiguiente el resultado será

$$-(8+2+4+3)\,x=-17\,x$$

REGLA II. *Si los términos semejantes tienen signos distintos, se sumarán separadamente los que tienen el signo $+$, y los que tienen el signo $-$, se restará el menor de los nuevos coeficientes encontrados del mayor, se pondrá al resto el signo del mayor, y el coeficiente así obtenido, es el de la parte literal comun á todos los términos.*

$$3\,a-2\,a+5\,a-6\,a+4\,a$$
$$=(3+5+4)\,a-(2+6)a=12\,a-8\,a=4a.$$

$$2\,b+3\,b-6\,b+5\,b-10\,b$$
$$=(2+3+5)\,b-(6+10)\,b=10\,b-16\,b=-6\,b$$

TEOREMA 15. Un polinómio se suma con un número, poniendo detras del número dado todos los términos del polinómio con sus signos propios, y dando al primero el signo $+$.

$$A+(a-b-c+d-e+f)=A+a-b-c+d-e+f \qquad (15)$$

DEM. Variando el órden de los términos en el polinómio dado y empleando el teorema 14, tendremos

$$\begin{aligned} A+(a-b-c+d-e+f)&=A+[(a+d+f)-(b+c+e)] \\ &=A+(a+d+f)-(b+c+e) \quad [T.\ 10] \\ &=A+a+d+f-b-c-e \quad [T.\ 9] \\ &=A+a-b-c+d-e+f \quad [T.13;\ Esc] \end{aligned}$$

TEOREMA 16. Un polinómio se resta de un número, poniendo detras del número dado todos los términos del polinómio con signos contrarios, y dando al primer término el signo $-$:

$$A-(a-b-c+d-e+f)=A-a+b+c-d+e-f \qquad [16]$$

DEM. Usando los mismos razonamientos tenemos [T. 14, T. 11, T. 9]:

$$A-(a-b-c+d-e+f)$$

$$=A-[(a+d+f)-(b+c+e)]=A-(a+d+f)+(b+c+e)$$

$=A-a-d-f+b+c+e=A-a+b+c-d+e-f.$

Corolario. Si A es tambien polinómio, el resultado de la adicion ó sustraccion, frecuentemente se simplificará, reduciendo los términos semejantes de los dos polinómios.

Por ejemplo:

A. Sumar los polinómios:

$2a^2+3a^2b+5b^2$; $4a^2+6a^2b-6b^2$; $2a^2b-2b^2+3a^2$

Regla I. *Se escriben los polinómios unos debajo de otros, ordenándoles por los términos semejantes, de modo que estos estén en una columna vertical:*

$$\begin{array}{rrrr} & 2a^2 & +3a^2b & +5b^2 \\ & 4a^2 & +6a^2b & -6b^2 \\ & +3a^2 & +2a^2b & -2b^2 \\ \hline \text{suma:} & 9a^2 & +11a^2b & -3b^2 \end{array}$$

efectuando la suma de cada columna, segun las reglas dadas en el corolario del T. 14.

Podrán tambien colocarse los términos semejantes en paréntesis separados, calculando como se sigue:

$$(2a^2+4a^2+3a^2)+(3a^2b+6a^2b+2a^2b)$$
$$+(5b^2-6b^2-2b^2)$$

$$=(2+4+3)a^2+(3+6+2)a^2b+(5-6-2)b^2$$
$$=9a^2+11a^2b-3b^2$$

B. Restar del polinómio

$5z^2-8xy+3yz$ el polinómio $3xy+4z^2-6yz$.

Regla II. *Se escribe el polinómio que es sustraendo, debajo del que es minuendo, y mudando todos los signos del polinómio sustraendo, este se sumará con el polinómio minuendo.*

$$\begin{array}{rrr} 5z^2 & -8xy & +3yz \\ 4z^2 & +3xy & -6yz \\ - & - & + \\ \hline z^2 & -11xy & +9yz \end{array}$$

REGLA III. *Si se han de restar varios polinómios de la suma de otros, se escribirán todos, unos debajo de otros, ordenándoles por los términos semejantes, y dando á todos los términos de los polinómios que deben restarse, el signo contrario, y luego todos se sumarán.*

Ejemplo. Restar los polinómios:

$$x+3y+2z\ ;\qquad 2x-3y-5z$$

de la suma de

$$4x+6y-z\ ;\qquad 9y-6x+3z$$

Tendremos:

$$\begin{array}{r} 4x+6y-z \\ -6x+9y+3z \\ -x-3y-2z \\ -2x+3y+5z \\ \hline \end{array}$$

Resultado: $-5x+15y+5z$

§. 12.

El uso de los paréntesis.

En virtud de los teoremas establecidos, es preciso atender á las reglas que deben observarse respecto á los paréntesis:

1.° Si inmediatamente delante de un paréntesis se encuentra el signo $+$, el paréntesis puede omitirse sin mudar los signos $+$ y $-$ contenidos en él.

$$A+(3xy-4z)=A+3xy-4z$$

2° Si un paréntesis va precedido del signo $-$, el paréntesis se quita, mudando todos los signos $+$ y $-$, que están dentro del mismo.

$$A-(x^2-2y+z)=A-x^2+2y-z$$

3.° Si despues de un signo $+$, se pone un paréntesis, todos los signos que entran en el paréntesis quedarán los mismos.

$$A+m+p^2-q=A+(m+p^2-q)$$

4º Si despues de un signo —, se pone un paréntesis, todos los signos que entran en el paréntesis se mudarán en los contrarios.

$$A - m + p^2 - q = A - (m - p^2 + q)$$

NOTA. Si delante de un paréntesis ó de una cantidad (que es la primera en el paréntesis) no hay signo ninguno, la falta del signo equivale al signo $+$.

5º Si hubiese paréntesis encerrados dentro de otros, primeramente se quitarán los paréntesis esteriores, y luego los interiores.

§. 13.

De los números positívos y negativos.

Esplicaciones. Un número se llama *positivo, si es dado para aumentar;* él se llama *negativo, si es dado para disminuir*, y él se llama *absoluto, si es dado ni para aumentar ni para disminuir.*

Por ejemplo, cuando habia al principio 10 unidades (pesos, hombres &a.) y despues con ellas se han reunidas otras tres unidades, y finalmente todo este número se ha disminuido de dos unidades, tendremos la espresion

$$10 + 3 - 2$$

en la cual *el número* 10 *es absoluto,* no diciendo por sí mismo relacion ninguna con otros números; pero el *número* $+3$ *es positivo y el número* -2 *es negativo; los dos últimos lo son, si se toman con sus signos; pues sin signo, no quieren decir ni aumentar ni disminuir.*

Obsérvese:

1.º *Una suma ó cualquier polinómio no puede tener mas de un término absoluto,* que es el primero; pues todos los otros términos estarán afectados del signo $+$ ó del signo $-$.

2.º *El término absoluto de un polinómio cualquiera puede tomar el signo* $+$. Por ejemplo, será

$$10 + 3 - 2 = + 10 + 3 - 2$$

Porque el término absoluto, aunque no sea dado para aumentar, *puede sin embargo considerarse como sumando de cero,* que se presupone ántes de todo número, ó se puede escribir así para indicar generalmente *que se ha formado una cantidad* y que ella ha crecido hasta 10.

3° Frecuentemente la definicion de *un número negativo* se enuncia de esta manera: *Un número negativo es el resultado de una sustraccion, en la cual el sustraendo es mayor que el minuendo.* Dado, por ejemplo, el número 8 para restarlo del número 5, la sustraccion no puede efectuarse completamente, pues tenemos $5-8=5-5-3=0-3=-3$. Luego el número 3 queda indicado para restarse ó disminuir á otro número si lo hay. Tal número -3 es verdaderamente un número negativo. Pero dicha definicion no es general, *porque no hay semejante definicion para los números positivos*, lo que por la oposicion de los números positivos y negativos seria necesario, y podremos decir solamente que el número negativo *puede ser* el resultado de una sustraccion, en la cual el sustraendo es mayor que el minuendo y en cuyo caso no hay número, de que pueda restarse.

4.° A pesar de esto, la definicion que hemos dado arriba de los números positivos y negativos, solo enuncia generalmente, que dichos números son dados para aumentar ó disminuir, y *no indica cual número ha de aumentarse ó disminuirse, haciendo abstraccion del mismo.* Al emplear las Matemáticas en la solucion de problemas, que tienen números absolutos y denominados, los números positivos y negativos se refieren á aquellos como á la base del cálculo. Pero las Matemáticas puras que hacen abstraccion de las denominaciones, hacen tambien abstraccion de los números absolutos, considerando todos los números que entran en el cálculo, como dados para aumentar ó disminuir. Este modo de considerar los números, como pronto veremos, ofrece grandes ventajas y atribuye una estension mayor á todas las reglas de la Aritmética. Aquí solo notamos que hay partes muy importantes de las Matemáticas, como la Trigonometría, cuya existencia supone necesariamente dicha abstraccion. Ahora vamos á esplicar cómo esta abstraccion puede efectuarse y cuáles son las causas de emplearla.

5° Sean dados para restarse los polinomios

$$\left.\begin{array}{l} a-2b+c \\ 2a-3b-4c \end{array}\right\} \qquad [a]$$

el segundo del primero. Conforme á las reglas establecidas, tendremos mudando los signos del segundo y sumando:

$$\left.\begin{array}{r} a-2b+c \\ +2a-3b-4c \\ -\quad+\quad+ \\ \hline -a+b+5c \end{array}\right\} \qquad [\alpha]$$

Suponiendo que b sea un número muy grande, el primer polinómio tendrá un valor negativo; lo mismo vale respecto al segundo polinómio, y bastará á este fin que $4\,c$ sea $> 2\,a - 3\,b$. Las reglas hasta aquí establecidas suponen que el minuendo y el sustraendo de una sustraccion sean números absolutos y ademas que el minuendo sea mayor que el sustraendo. Por consiguiente, la sustraccion de los polinómios dados, no podrá efectuarse observando las reglas con rigor, cuando no sabemos si dichas suposiciones son verdaderas. Pero, *calculando con números indeterminados*, como aquí, *es muy difícil determinar los casos de ser aplicables ó no aplicables los teoremas dados.* En el ejemplo propuesto, para poder usar las reglas dadas, deberán cumplirse las condiciones siguientes:

en el primer polinómio $a + c > 2\,b$

en el segundo polinómio $2\,a > 3\,b + 4\,c$

Ademas: el primer polinómio $>$ que el segundo, ó

$$a - 2\,b + c > 2\,a - 3\,b - 4\,c \qquad \text{es decir}$$

$$a < b + 5\,c$$

De otra parte, *tales diferencias ocurren frecuentemente en el cálculo*, y es preciso efectuar con el resultado obtenido nuevas operaciones, por ejemplo, las de la multiplicacion, division &a.

Sin embargo *podremos afirmar que el resto que hemos encontrado en la sustraccion* (α) *en todo caso es verdadero,* aunque sean a, b, c números cualesquiera. Añadiendo las cantidades absolutas A y A′ á los polinómios dados, de modo que tengamos los nuevos polinómios:

$$\left.\begin{array}{l} A + a - 2\,b + c \\ A' + 2\,a - 3\,b - 4\,c \end{array}\right\} \qquad (b)$$

la sustraccion se convertirá en la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r|l} A & + a - 2\,b + c \\ A' & + 2\,a - 3\,b - 4\,c \\ - & - \quad\; + \quad\; + \\ \hline (A - A') & - a + b + 5\,c \end{array}\right\} \qquad (\beta)$$

Podremos sin duda suponer A y A′ tan grandes, que el primero y el segundo polinómio se hagan absolutos, y ademas, A en comparacion de A′ tan grande, que el primer polinómio sea mayor que el segundo. Esto supuesto, las reglas dadas pueden aplicarse y el resultado de (β) será verdadero, cualesquiera que sean los valores de a, b y c Por otra parte, restando solo A′ de

A, el resultado (A—A') será tambien verdadero y conforme á las reglas. Luego, siendo verdadera toda la sustraccion en (β) y además una parte de la misma, será tambien verdadera la otra parte de la misma, es decir la sustraccion, que hemos efectuado en (α), cualesquiera que sean los valores de a, b y c. De donde se infiere igualmente que el resultado de la sustraccion de polinómios absolutos no padece alteracion, si suponemos que todos los números que los constituyen se hagan positivos ó negativos; porque suponiendo en (α) cumplidas todas las condiciones que hemos mencionado arriba, el resultado no es otro que el que está en (β). Luego en el ejemplo propuesto, *el cálculo que vale para números positivos y negativos, vale tambien para absolutos.*

Finalmente, podremos prescindir de las cantidades absolutas A y A' que están en (β), como de cantidades que siempre se presuponen; pero ellas serán muy necesarias al establecer las reglas que deben seguirse, calculando con números positivos y negativos.

6° Con esto se ve, que *el cálculo con números positivos y negativos, en el fondo no es otra cosa, que un cálculo que trata las espresiones ocurrentes como las últimas partes de polinómios,* prescindiendo de las primeras partes de los mismos, que contienen los números absolutos, y con las cuales hubiesen de ser reunidas. Luego, *para hallar reglas seguras é indubitables para tratar los números positivos y negativos, es preciso notar las reglas que siguen las últimas partes de los polinómios, cuando estos se suman, ó restan, ó multiplican &a.*

7.° Hay cantidades concretas que por sí mismas tienen tal relacion con otras, que no pueden entrar en un problema sino bajo la forma de números positivos ó negativos. Por ejemplo, si una persona tiene de *pedir* 1000 reales y otra *debe* 1000 reales; si un reloj *se adelanta* cada dia 10 segundos y otro por el contrario *se retrasa* 10 segundos; si un acontecimiento sucedió 200 años *despues de* Jesucristo y otro sucedió 200 años *ántes de* Jesucristo: se comprende perfectamente que una de estas cantidades deben entrar en el mismo cálculo con el signo $+$, y las otras con el signo $-$. *Tales cantidades se dicen opuestas ó contrarias,* las unas aumentan y las otras disminuyen un número absoluto que se presupone. Observemos sin embargo, que no solo estas se usan como positivas ó negativas; pues, *como toda cantidad,* segun la definicion de la misma, *puede aumentarse y disminuirse, es necesario considerar á toda cantidad como susceptible de crecer en dos sentidos contrarios, es decir, de otra cantidad positiva ó negativa de la misma especie, de las cuales una la aumentará y otra la disminuirá.*

8.° Añadir el número $+3$ al número 100, no es otra cosa que aumentar el número 100 de 3, porque $+3$ se añade solamente para aumentar. *Designando la palabra "añadir" que es lo mismo qué "sumar,"* por el signo $+$, se encuentra

$$100+(+3)=100+3 \qquad (c)$$

Añadir el número -3 al número 100, es disminuir el número 100 de 3; porque el número -3 es solamente dado para disminuir. Por consiguiente

$$100+(-3)=100-3 \qquad (d)$$

De donde se saca generalmente

$$\left.\begin{array}{l} +(+a)=+a \\ +(-a)=-a \end{array}\right\} \qquad (e)$$

Como el signo $+$ designa que un número es parte de una suma ó de un todo, se *infiere tambien que el número -3 á la derecha de la ecuacion* (d), *puede considerarse como parte de un todo ó de una suma, la cual designa el primer miembro de la misma ecuacion.*

9° Siendo $100+4<100+5$, será tambien $100+(+4) < 100+(+5)$, y como la parte 100 es comun á los miembros de esta desigualdad, se infiere que la segunda parte del primer miembro será menor que la segunda parte del segundo miembro, es decir

$$+4<+5 \qquad (f)$$

y en general tendremos:

$$+1<+2<+3<+4<+5<+6<+7\ldots.$$

es decir: *de los números positivos son mayores los que tienen mayores valores absolutos.*

De semejante modo es $100-8<100-7$ ó bien $100+(-8) <100+(-7)$, y siendo el número 100 comun á los dos miembros de la desigualdad, será

$$-8<-7$$

y en general tendremos:

$$-8<-7<-6<-5<-4<-3<-2<-1 \qquad (g)$$

es decir: *De los números negativos son mayores los que tienen menores valores absolutos.*

Finalmente tenemos $100-3<100<100+3$, ó bien

$$100+(-3)<100+0<100+(+3)$$

de donde

$$-3<0<+3$$

es decir:

1) *Cero es menor que un número positivo cualquiera.*
2) *Un número negativo es menor que cero, y cualquier número positivo.*

Se dice que *cero es el límite entre los números positivos y negativos, siendo menor que toda cantidad positiva y mayor que toda cantidad negativa asignable.*

Si escribimos los números positivos y negativos en una línea horizontal, ordenándolos por su magnitud, tendremos *la serie algébrica de los números:*

$$-\infty \ldots -4, -3, -2, -1,\ 0, +1, +2, +3, +4 \ldots +\infty$$

cada número que está mas á la derecha, es entre ellos mayor.

§. 14.

De los números algébricos.

Esplicaciones. 1° *Como una suma, así tambien un polinómio que tiene signos distintos, puede considerarse como un todo, cuyas partes son los varios términos tomados con sus signos.* Así las partes del polinómio

$$A - a - b + c$$

serán $$A, \ -a, \ -b, \ +c$$

de las cuales unas aumentarán y las otras disminuirán el número absoluto A. Designando por ejemplo, el valor de la hacienda y plata que tiene un sujeto, por el número absoluto A, si el ha de pedir á otro 100 ps., pero ha de pagar 20 ps. á otro, y á un tercero 200 ps., y luego pagar á un cuarto 150 ps., á un quinto 60 ps., la suma del todo, que realmente posee, será

$$A+100-20+200-150-60$$

y las partes de su hacienda total serán

$$A, +100, -20, +200, -150, -60$$

Si se prescinde del número absoluto A, encontraremos el *aumento actual* de su posesion:

$$+100-20+200-150-60$$

las partes $+100$ y $+200$ la aumentan realmente, las partes -20, -150, -60 la disminuyen.

Por consiguiente, designando por el signo $+$, el que una parte se añade á otra, tendremos [cf. § 13, 8.° ecuaciones (e)]:

$$A+a-b-c=A+(+a)+(-b)+(-c) \qquad [m]$$

cuya espresion puede leerse de este modo:

Al número absoluto A *se añade* el número *a* para *aumentarlo*, luego *se añade* al mismo el número *b* para *disminuirlo*, despues *se añade* el número *c* para *disminuirlo* &a.

Del mismo modo será con signos contrarios:

$$A-a+b+c=A+(-a)+(+b)+(+c) \qquad [n]$$

y por consiguiente las dos espresiones

$$A+a-b-c$$

$$A-a+b+c$$

pueden recibir la forma de una misma suma

$$A+(\pm a)+(\mp b)+(\mp c)$$

tomando los signos superiores para la primera y los signos inferiores para la segunda espresion.

Poniendo

$$\pm a=a'; \ \pm b=b'; \ \pm c=c'$$

de modo que las cantidades a′, b′, c′, tengan el sentido de aumentar ó disminuir en sí mismas, sin designarlo por un signo particular, la suma

$$A+a'+b'+c'$$

no solo designará las dos supuestas espresiones, sino una grande multitud de otras espresiones, es decir, todas las combinaciones que pueden hacerse con los términos a, b, c, variando sus signos en todas las maneras posibles. Abstrayendo del número absoluto A, el polinómio

$$+a'+b'+c'$$

designará los polinómios:

$$
\begin{array}{r}
a+b+c\\
a+b-c\\
a-b+c\\
a-b-c\\
-a+b+c\\
-a+b-c\\
-a-b+c\\
-a-b-c
\end{array}
$$

Dicho polinómio designará, por ejemplo, el primero de estos polinómios, si todas las cantidades a', b', c', son positivas, y el último, si todas son negativas.

Con esto se ve, que emplear espresiones tan generales como la espresion $a'+b'+c'$, será de una grande utilidad; pues supuesto que se ha demostrado un teorema ó resuelto un problema para tal espresion, el mismo teorema ó la misma solucion llegará á valer para todas las formas particulares que contienen.

2.° Esplicacion. *Números,* como los de arriba, a', b', c'.... *que pueden representar juntamente los números positivos y negativos,* y en lugar de los cuales, por consiguiente, pueden sustituirse todos los números indeterminados y determinados con los signos + y —, *se llaman números algébricos ó algebráicos.* Un polinómio cualquiera que contiene números algébricos, como el de arriba

$$a'+b'+c' \qquad \text{ó bien}$$

$$2a^2b-3\,bc+5\,a^3b^2-4\,c^3$$

suponiendo que *a*, *b*, y *c* son susceptibles de valores positivos y negativos, *se llama suma algébrica,* aunque hay signos negativos en el mismo.

En general, *toda espresion cualquiera, si está compuesta de números algébricos, se llama espresion algébrica ó algebráica; y todas las otras espresiones, que tienen letras no susceptibles de valores positivos y negativos, por oposicion se llaman espresiones aritméticas ó absolutas.* Un polinómio aritmético ó absoluto supone tambien, que el valor del todo sea un número absoluto.

El cálculo con números algebráicos se llama propiamente Algebra; luego el Álgebra no es sino una parte de la aritmética general, *que trata de todos los números* y frecuentemente usa del Algebra para hallar las calidades de los números absolutos.

§. 15.

Adicion y sustraccion de las cantidades algebráicas.

Notamos que las definiciones de la adicion y sustraccion que hemos dado en los §§ 1 y 2, para los números absolutos, valen tambien para los números positivos, negativos y algébricos.

Teorema 17. Un número positivo ó negativo queda sumado con otro, añadiéndole al otro con su signo propio; y un número positivo ó negativo queda restado de otro, añadiéndole al otro con signo contrario.

Designando por a un número absoluto, será $+a$ un número positivo, y $-a$ un número negativo, y se tiene que demostrar que:

$$\left.\begin{array}{ll} +(+a)=+a\ ; & -(+a)=-a \\ +(-a)=-a\ ; & -(-a)=+a \end{array}\right\} \quad (17)$$

Dem. 1ª usando los polinómios (cf. § 13, N.° 6):

$$A+(A'+a)=A+A'+a\ ;\qquad A-(A'+a)=A-A'-a$$

$$A+(A'-a)=A+A'-a\ ;\qquad A-(A'-a)=A-A'+a$$

Respecto al número a, los primeros miembros de estas ecuaciones enuncian, que $+a$ ó $-a$ ha de ser sumado con A ó de ser restado del mismo; y los segundos miembros dan el resultado de la operacion. Haciendo abstraccion de los números absolutos A y A′ se sacan las ecuaciones (17).

Dem. 2ª usando las definiciones:

α) La espresion $A+(+a)$ significa que el número *a debe añadirse* al número A *para aumentarle*, lo que no es otra cosa que aumentar el número A de a y se designa por $A+a$. Pero si $A+(+a)=A+a$, será tambien $+(+a)=+a$.

β) La espresion $A+(-a)$ significa que el número *a debe añadirse* al número A *para disminuirle*, lo que no es otra cosa que disminuir A de a y se designa por $A-a$. Pero si $A+(-a)=A-a$, será tambien $+(-a)=-a$.

γ) La espresion $A-(+a)$ ó restar $(+a)$ de A, supone que $(+a)$ está contenido como parte en una cantidad, cuyo valor es A, y quiere decir que esta parte debe quitarse, separándola de la otra. Pero

$$A = A - a + a = (A - a) + (+a) \qquad \text{segun } \alpha)$$

y si se quita la parte $(+a)$, quedará $(A-a)$, es decir, tenemos

$$A-(+a)=A-a \ ; \qquad \text{luego} -(+a) = -a.$$

δ) La espresion $A-(-a)$ ó restar $(-a)$ de A, supone que $(-a)$ está contenido como parte en una cantidad, cuyo valor es A, y quiere decir que esta parte debe quitarse, separándola de la otra. Pero

$$A = A + a - a = (A + a) + (-a) \qquad \text{segun } \beta)$$

y si se quita la parte $(-a)$, quedará $(A+a)$, es decir, tenemos $A-(-a)=A+a$; luego $-(-a)=+a$.

Corolario 1. Se infiere:

$$+[+(+a)] = +[+a] = +a \ ; \quad -[+(+a)] = -[+a] = -a$$
$$+[+(-a)] = +[-a] = -a \ ; \quad -[+(-a)] = -[-a] = +a$$
$$+[-(+a)] = +[-a] = -a \ ; \quad -[-(+a)] = -[-a] = +a$$
$$+[-(-a)] = +[+a] = +a \ ; \quad -[-(-a)] = -[+a] = -a$$

Podremos aquí establecer la regla general:

Si una cantidad es afectada de varios signos, el signo que resulta será +, cuando todos dichos signos son +, ó el número de los signos —, es un número par; pero el signo que resulta será —, cuando el número de los signos —, es un número impar.

Corolario 2. Suponiendo en

$$a' + b' - c'$$

que las cantidades a', b', c', sean números algébricos, los signos de los términos no se mudarán, sustituyendo valores positivos en lugar de las mismas; pero los signos de los términos se convertirán en los contrarios, si se sustituyen valores negativos. Poniendo

$$a' = +a \ ; \quad b' = +b \ ; \quad c' = +c$$

tendremos:

$$(+a) + (+b) - (+c) = a + b - c$$

Pero haciendo

$$a' = -a \; ; \quad b' = -b \; ; \quad c' = -c$$

tendremos:

$$(-a)+(-b)-(-c) = -a-b+c$$

Corolario 3. Se infiere que todo lo que se ha dicho de la posicion de los términos en un polinomio absoluto [§. 11 T. 13 escol. y T. 14 nota] vale tambien si los términos son algébricos. Porque en el polinomio algébrico

$$a'+b'-c'$$

el valor de cada término tomado con su signo finalmente es positivo ó negativo y equivale á un número absoluto con el signo + ó —. Pero sabemos que tales términos pueden cambiar de lugar como se quiera.

Teorema 18. Una suma algébrica queda sumada con un número cualquiera, poniendo despues del número dado todos los términos de la suma algébrica con sus signos propios, y dando al primero el signo + [Cf. T 15].

$$P+(a-b-c+d) = P+a-b-c+d \tag{18}$$

Dem. Añadir al número P, todas las partes $+a$, $-b$, $-c$, $+d$, de la suma, es añadir toda la suma. Por consiguiente tenemos

$$P+(a-b-c+d) = P+(+a)+(-b)+(-c)+(+d)$$

lo que es (T. 17):

$$P+a-b-c+d$$

Teorema 19. Una suma algébrica se resta de un número cualquiera, poniendo detras del número dado, todos los términos del polinomio con signos contrarios, y dando al primero el signo — (Cf. T. 16).

$$P-(a-b-c+d) = P-a+b+c-d \tag{19}$$

Dem. Quitar del número P todas las partes $+a$, $-b$, $-c$, $+d$ de la suma dada, es quitar toda la suma. Por esto, el resto pedido será:

$$P-(+a)-(-b)-(-c)-(+d) = P-a+b+c-d$$

Corolario 1. Los teoremas 15 y 16 no son sino casos particulares de los teoremas 18 y 19.

Corolario 2. Las ecuaciones

$$(m+n)+(x+y)=m+n+x+y \qquad [\alpha]$$

$$(m+n)-(x+y)=m+n-x-y \qquad [\beta]$$

y todas sus semejantes que tienen en el segundo miembro el resultado de la operacion indicada en el primero, no valen solamente, si m, n, x, y son números algébricos cualesquiera, sino tambien si se sustituye

$$m=\pm a,\ n=\pm b,\ x=\pm c,\ y=\pm d,$$

en donde a, b, c, d son números algébricos, es decir, *se permite sustituir en lugar de los números algébricos de una espresion algébrica cualquiera, otros números algébricos con signos propios;* porque, por ejemplo m, en uno y otro miembro de la ecuacion (α) es susceptible de todo valor positivo ó negativo, pero $+a$ finalmente es positivo ó negativo, y $-a$ negativo ó positivo.

Corolario 3. Las ecuaciones (α) y (β) contienen como casos particulares los teoremas 1—3 y 9—12, los cuales se demostrarán aquí en general para todo valor de a, b, c, d.

1º Poniendo $m=a$, $n=-b$, $x=b$, $y=o$ dará α)

$$(a-b)+b=a$$

2º Sustituyendo $m=a$, $n=b$, $x=b$, $y=o$ se saca de β)

$$(a+b)-b=a$$

3º Haciendo $m=a$, $n=o$, $x=a$, $y=-b$ se deduce β)

$$a-(a-b)=b$$

9º Si se pone $m=a$, $n=o$, $x=b$, $y=c$, se infiere de β)

$$a-(b+c)=a-b-c$$

10º Para $m=a$, $n=o$, $x=b$, $y=-c$, se saca de α)

$$a+(b-c)=a+b-c$$

11º Poniendo $m=a$, $n=o$, $x=b$, $y=-c$ se sigue de β)

$$a-(b-c)=a-b+c$$

12º Finalmente si $m=a$, $n=-b$, $x=c$, $y=-d$ dará α)

$$(a-b)+(c-d)=a-b+c-d=(a+c)-(b+d) \qquad [\text{N. } 9^o]$$

Por tanto, todos los teoremas sobre las sumas y diferencias, y tambien sobre los polinomios que estaban establecidos solo para los números absolutos, valen tambien para los números algébricos. Porque los otros teoremas 4—8 y 13—14 tratan solamente de la posicion de los términos, de la cual, respecto á términos algébricos, se ha dicho lo necesario en el corolario 3º del teorema 17.

El uso hecho de las fórmulas α) y β) demuestra igualmente la grande utilidad de las fórmulas algébricas.

CAPITULO II.

MULTIPLICACION Y DIVISION.

ARTICULO I.

De los monómios absolutos ó aritméticos.

§. 16.

Teoremas fundamentales que se siguen inmediatamente de las definiciones.

TEOREMA. 1. Un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)$ multiplicado por el divisor (b); da por producto el dividendo (a).

$$(a:b) \cdot b = a \quad \text{ó bien } \frac{a}{b} \cdot b = a \qquad [1]$$

DEM. Se infiere inmediatamente de la definicion de la division.

TEOREMA 2. Un producto (a b) dividido por uno de sus factores (b), da por cociente el otro factor (a).

$$(a\,b):b = a \quad \text{ó bien } \frac{a\,b}{b} = a \qquad [2]$$

DEM. Porque, conforme á la definicion de la division, el cociente (a) multiplicado por el divisor (b), reproduce el dividendo (a b).

TEOREMA 3. Si se parte el dividendo por el cociente, resultará el divisor.

$$a : \frac{a}{b} = b \qquad [3]$$

DEM. Conforme á la definicion de la division, $a : \frac{a}{b}$ debe tener por cociente un número que multiplicado por $\frac{a}{b}$ de el producto a. Pero este número es b, pues $\frac{a}{b} . b = a$ [T. 1.]

TEOREMA 4. Un número dividido por sí mismo, da por cociente la unidad, y un número dividido por la unidad, da por cociente sí mismo.

$$a : a = 1 \quad \text{y} \quad a : 1 = a \qquad [4]$$

DEM. Tenemos $a = 1 . a$, luego, segun la definicion de la division $a : a = 1$ y $a : 1 = a$.

TEOREMA 5. Un número no padece alteracion, cuando se multiplica y parte por un mismo número.

$$(a . b) : b = a \quad \text{y} \quad (a : b) . b = a \qquad [5]$$

DEM. Este teorema es el teorema 2 y 1 enunciados de otro modo.

TEOREMA 6. Para multiplicar una fraccion por un número entero, se multiplica el numerador por el entero y se pone por denominador el de la fraccion.

$$\frac{a}{b} . c = \frac{a c}{b} \qquad [6]$$

DEM. En virtud de la definicion de la multiplicacion, el producto pedido ha de formarse de $\frac{a}{b}$ del mismo modo, que el multiplicador c está formado de la unidad entera. Pero el multiplicador c, que es entero, está formado de la unidad entera, poniéndola c veces por sumando:

$$c = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots c \text{ veces}$$

Luego se formará el producto buscado, poniendo el multiplicando $\frac{a}{b}$, c veces por sumando:

$$\frac{a}{b} . c = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots . c \text{ veces}$$

La denominacion de todos los quebrados á la derecha de esta ecuacion es la misma $y=\frac{1}{b}$; luego el denominador b se escribe una vez bajo una raya comun, y el número que indica la multitud de las unidades fraccionarias, se escribe sobre la raya [Noc. prel. II). De donde

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a+a+a+a+\ldots .c \text{ veces}}{b}=\frac{a\,c}{b}$$

Teorema 7. Para dividir una fraccion por un número entero, se multiplica el denominador por el entero, y se pone por numerador el de la fraccion.

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\,.\,c} \qquad [7]$$

Dem. Dividiendo a por b tendremos b partes iguales, cuya magnitud se representa por $\frac{a}{b}$; y dividiendo de nuevo cada una de estas b partes en c partes iguales, tendremos $\frac{a}{b}:c$ y por otra parte $b\,c$ partes iguales de a, lo cual se presenta por $\frac{a}{b\,c}$. Luego $\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\,c}$.

Teorema 8. Se multiplica una fraccion por otra, multiplicando entre sí los numeradores y los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{a\,m}{b\,n} \qquad [8]$$

Dem. Conforme á la definicion de la multiplicacion, se tiene el producto pedido, formando de $\frac{a}{b}$ un nuevo número, del mismo modo, que el multiplicador $\frac{m}{n}$ se ha formado de la unidad entera. Pero á este fin la unidad entera se ha dividido en n partes iguales y una de estas partes se ha tomado m veces. Luego se dividirá $\frac{a}{b}$ en n partes iguales y se pondrán m de estas partes como sumandos, es decir, tendremos

$$\left(\frac{a}{b}:n\right).\,m=\frac{a}{b\,n}.\,m=\frac{a\,m}{b\,n} \quad \text{(T. 7 y 6.)}$$

§. 17.

De los productos.

TEOREMA 9. Un producto no varía de valor cambiando el órden de los factores.

$$ab=ba\ ;\quad abc=acb=bca\ \ \&a. \qquad (9)$$

DEM. Distinguiremos dos casos, el de ser enteros y el de ser fraccionarios los factores dados:

I. CASO. *Los factores dados sean números enteros.*

1° *Sean dados dos factores* a y b. Considerando b como multiplicador, tendremos

$$ab=a+a+a+a+\ldots\ldots b \text{ veces}$$

y descomponiendo a en las unidades que tiene, hallaremos

$$\begin{array}{rl} ab= & 1+1+1+\ldots.a \text{ veces} \\ & 1+1+1+\ldots.a \text{ veces} \\ & 1+1+1+\ldots.a \text{ veces} \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\quad\cdot \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\quad\cdot \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\quad\cdot \\ & \quad b \text{ veces} \end{array}$$

La suma de cada columna es b, y como tenemos a columnas, b se encuentra a veces, es decir, tenemos la suma $b\,a$; luego $ab=ba$.

2° *Sean dados tres factores* a, b, c. Tenemos

$$\begin{array}{rl} ab.c= & ab+ab+ab+\ldots.c \text{ veces} \\ = & a\ +a\ +a\ +\ldots.b \text{ veces} \\ + & a\ +a\ +a\ +\ldots.b \text{ veces} \\ + & a\ +a\ +a\ +\ldots.b \text{ veces} \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\quad\cdot \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\quad\cdot \\ & \quad c \text{ veces} \end{array}$$

Cada columna tiene la suma $a\,c$, y como hay b columnas, la suma total será $ac.b$; luego $ab.c=ac.b$.

Mudando el órden de a y b á la derecha de arriba, tendremos tambien

$$\begin{aligned} ab.c = & \ ba + ba + ba + \ldots . c \text{ veces} \\ = & \ b \ + b \ + b \ + \ldots . a \text{ veces} \\ + & \ b \ + b \ + b \ + \ldots . a \text{ veces} \\ + & \ b \ + b \ + b \ + \ldots . a \text{ veces} \\ & \ \ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & \qquad\quad c \text{ veces} \end{aligned}$$

Cada columna tiene la suma $b\,c$, y como hay a columnas, la suma total será $b\,c\,.\,a$; luego $a\,b\,.\,c = b\,c\,.\,a$.

Luego tenemos

$$a\,b\,.\,c = a\,c\,.\,b = b\,c\,.\,a$$

y si mudamos el órden de los factores que están juntos, lo cual segun 1.° es permitido, tendremos en general:

$$a\,b\,.\,c = b\,a\,.\,c = a\,c\,.\,b = c\,a\,.\,b = b\,c\,.\,a = c\,b\,.\,a$$

Estas posiciones son todas las posibles de los tres factores a, b, c.

3° *Sean dados cuatro factores* $a, b, c\ d$. Tenemos segun 1° y 2°

$$a\,b\,.\,c\,.\,d = a\,b\,.\,d\,.\,c = a\,d\,.\,b\,.\,c = d\,.\,a\,.\,b\,.\,c$$

es decir el factor d puede tener cualquier posicion entre los otros factores, y como estos tambien pueden cambiar de lugar como se quiera, se infiere que los cuatro factores pueden tener todas las posiciones posibles en el producto, sin que esto varíe de valor. Del mismo modo se demostrará para cinco, seis, siete.... en general, un número indeterminado de factores.

II. *Caso.* Los factores dados sean fracciones

$$a = \frac{m}{n},\ b = \frac{p}{q},\ c = \frac{r}{s}$$

Tenemos (T. 8):

$$a\,b\,c = \frac{m}{n}\,.\,\frac{p}{q}\,.\,\frac{r}{s} = \frac{m\,p\,r}{n\,q\,s}$$

Como en el numerador, así tambien en el denominador, los factores pueden cambiar de lugar como se quiera; tendremos por ejemplo el producto igual á

$$\frac{p\,r\,m}{q\,s\,n} = \frac{p}{q}\,.\,\frac{r}{s}\,.\,\frac{m}{n};\ \text{ó}\ \frac{r\,m\,p}{s\,n\,q} = \frac{r}{s}\,.\,\frac{m}{n}\,.\,\frac{p}{q}$$

es decir, tambien los factores, que son quebrados, pueden cambiar de lugar como se quiera, sin alterar el valor del producto.

Si suponemos $q=1$, la fraccion $\frac{p}{q}$ se hace $=\frac{p}{1}=p$, es decir, se hace entero Luego el teorema será verdadero aun si hay factores enteros y fraccionarios.

Corolario 1. *Un producto queda multiplicado por un número, multiplicando uno de los factores por el número y el producto así obtenido por los demas factores.*

Se deduce inmediatamente de la demostracion del teorema, pues tenemos

$$ab.c=ac.b \quad y \quad abc.d=ad.bc$$

Corolario 2. *Un número queda multiplicado por un producto, multiplicándolo por uno de los factores y el producto así obtenido por los demas factores.*

$$a.bcd=ab.cd$$

Porque, segun 1.°, tenemos $a.bcd=bcd.a$ y por el corolario precedente $=ba.cd$, lo cual es $=ab.cd$.

Escolio. En efecto de este teorema y los corolarios, un producto de varios factores se escribe dejando todos los paréntesis, ó signos de multiplicacion, y ordenando las letras que designan los factores, por la posicion del alfabeto, por ejemplo.

$$3abcd; \qquad 27pqt; \qquad 19x^2yz$$

y se ponen los factores determinados ó coeficientes en primer lugar. Por este modo de escribir se entiende que el primer número indeterminado, ha de multiplicarse por el segundo, el producto obtenido por el tercero &a, y el todo por el coeficiente; pero que, sustituyendo números determidados en lugar de los indeterminados, el órden de la multiplicacion puede variarse, como se quiera.

Teorema 10. Potencias que tienen la misma base, se multiplican entre sí, sumando sus esponentes y dando la suma obtenida por esponente á la base comun, la que se escribe una sola vez,

$$a^m.a^n=a^{m+n}$$

Dem. Conforme á la definicion de las potencias tenemos

$$a^m=a.a.a.... \, m \text{ veces}$$
$$a^n=a.a.a.... \, n \text{ veces}$$

Por consiguiente el producto $a^m.a^n$ tiene el factor a, $m+n$

veces, es decir, equivale á a^{m+n}.

De este modo se tiene

$$a^3 . a^2 = a^{3+2} = a^5$$
$$a^5 . a^7 = a^{5+7} = a^{12}$$

Aquí debe atenderse:

1.° La primera potencia no tiene el esponente escrito, de donde $a^6 . a$ será $= a^6 . a^1 = a^{6+1} = a^7$.

2° No deben cambiarse las distintas bases que hay en un producto. Será por ejemplo:

$$a^8 . b^3 . c \times a^2 b^5 c^2 = a^{8+2} b^{3+5} c^{1+2} = a^{10} b^8 c^3$$

poniendo los esponentes respectivos á las bases, á las que pertenecen.

3º Dados varios productos para multiplicarse, 1) se multiplicarán entre sí los coeficientes; 2) se pondrán los otros factores, cada uno una vez y en el órden del alfabeto; 3) escribiendo á las letras respectivas las sumas de los esponentes, que pertenecen á las mismas.

§. 18.

De los cocientes.

Las fracciones y los cocientes pueden escribirse del mismo modo $\left(\frac{a}{b}\right)$; pero en virtud de las definiciones establecidas (en Noc. prelim. II y § 4), entre las unas y los otros realmente existe la diferencia, que las fracciones ó quebrados tienen por numeradores y denominadores, números *enteros* ($\frac{5}{8}$, $-\frac{13}{7}$ etc.), y los cocientes no admiten tal restriccion, es decir, que ellos pueden tener por dividendos y divisores números cualesquiera. De aquí se vé, que los quebrados ó fracciones no son sino una especie particular de cocientes, es decir, cocientes cuyos dividendos y divisores son números enteros. Demostrando los teoremas, que pertenecen á los cocientes, á un tiempo demostramos los que suelen ponerse sobre los quebrados. Pero al contrario, lo que se ha demostrado para los quebrados, no por esto se ha demostrado para los cocientes. Por ejemplo, los teoremas 1 – 5 del § 16 valen para los cocientes, y por consiguiente para los quebrados; pero los teoremas 6 – 8 del mismo parágrafo no están aun demostrados hasta aquí para los cocientes ó números cualesquiera.

Teorema 11. El valor de un cociente no padece alteracion, si el dividendo y el divisor juntamente se multiplican ó dividen por un mismo número.

$$\frac{a}{b}=\frac{a.m}{b.m} \quad ; \quad \frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n} \qquad (11)$$

Suponemos aquí, como en todos los teoremas, que se darán en este Artículo, que los números *a*, *b*, *m*, *n* &ª, sean números absolutos cualesquiera, enteros ó fraccionarios.

Dem. I. parte. El Teorema quedará demostrado, si la inversion

$$\frac{a.m}{b.m}=\frac{a}{b}$$

es verdadera. Pero si multiplicamos el cociente $\frac{a}{b}$, que se encuentra en esta última ecuacion, por el divisor b.m del primer miembro, se se sigue el dividendo a.m; [definicion de la division § 4] porque

$$\frac{a}{b}(b.m)=\left(\frac{a}{b}.b\right).m \text{ (T. 9 cor. 1)}=a.m \quad [\text{T. 1.}]$$

Dem. II parte. El teorema asimismo quedará demostrado si la inversion

$$\frac{a:n}{b:n}=\frac{a}{b}$$

es exacta. Pero así es, pues si en esta última ecuacion multiplicamos el dividendo y el divisor del primer miembro por el mismo número *n*, lo que segun la primera parte de la demostracion es permitido, se obtiene el cociente que está en el segundo miembro de la ecuacion:

$$\frac{a:n}{b:n}=\frac{(a:n).n}{(b:n).n}=\frac{a}{b} \quad [\text{T. 5.}]$$

Teorema 12. Para dividir un producto por un número, se divide por el número uno de los factores, y se multiplica el cociente encontrado por la otra parte del producto.

$$\frac{a.b}{c}=\frac{a}{c}.b=a.\frac{b}{c} \qquad [12]$$

Dem. Si multiplicamos el cociente $\frac{a}{c}.b$ por el divisor *c*, que está en el primer miembro, hallamos

$$\left(\frac{a}{c}.b\right).c=\frac{a}{c}.b.c=\frac{a}{c}.c.b=a.b \quad [\text{T. 1.}]$$

pero a.b es el dividendo que está en el primer miembro. El mismo resultado encontrarémos, multiplicando el otro cociente $a.\frac{b}{c}$ por el divisor c, que está en el primer miembro; pues, $a\frac{b}{c}.c=a.b$ (T 1.)

Teorema 13. Un cociente quedará multiplicado por un número, si se multiplica por él el dividendo ó si se divide por él el divisor.

$$\frac{a}{c}.b=\frac{a.b}{c}=\frac{a}{c:b} \qquad (13)$$

Dem. α) La espresion $\frac{a}{c}.b$, que está en el primer miembro, no cambiará de valor, si se multiplica y divide á un mismismo tiempo por el mismo número c (T. 5); luego tendrémos

$$\frac{a}{c}.b=[(\frac{a}{c}.b)c]:c=(\frac{a}{c}.c.b):c \text{ (T. 9)} =ab:c=\frac{a.b}{c}$$

β) El cociente $\frac{a.b}{c}$, que hemos encontrado, no padece alteracion, si partimos el dividendo y el divisor por el mismo número b (T. 11); pero por esto tenemos

$$\frac{a.b}{b}=\frac{(a.b):b}{c:b}=\frac{a}{c:b} \quad \text{(T. 5)}$$

Teorema 14. Un cociente quedará dividido por un número si se divide por él el dividendo ó si se multiplica por él el divisor.

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}=\frac{a}{b.c} \qquad [14]$$

Dem. Si multiplicamos el dividendo y divisor del cociente $\frac{a}{b}:c$, por el mismo número b, dicho cociente no cambia de valor [T. 11]; de donde

$$\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}.b:cb=a:cb=\frac{a}{bc}=\frac{a}{b.c}$$

por lo cual se tiene demostrada la segunda parte. Pero

$$\frac{a}{b.c}=\frac{a:c}{bc:c}=\frac{a:c}{b}$$

y esta es la primera parte.

TEOREMA 15. Un número queda dividido por un producto, si se divide por uno de los factores y luego el cociente obtenido por la otra parte del producto.

$$\frac{a}{b\,.\,c}=\frac{a}{b}:c=\frac{a}{c}:b \qquad [15]$$

DEM. Tenemos

$$\frac{a}{b\,.\,c}=\left(\frac{a}{b\,.\,c}\,.\,c\right):c=\frac{a}{b\,.\,c:c}:c \quad (T.\ 13)=\frac{a}{b}:c$$

$$\frac{a}{b\,.\,c}=\left(\frac{a}{b\,.\,c}\,.\,b\right):b=\frac{a}{b\,.\,c:b}:b \quad (T.\ 13)=\frac{a}{c}:b$$

TEOREMA 16. Un número queda multiplicado por un cociente, si se multiplica por el dividendo y se divide por el divisor.

$$c\,.\,\frac{a}{b}=\frac{c\,.\,a}{b}=\frac{c}{b}\,.\,a \qquad (16)$$

DEM. Pues tenemos

$$c\,.\,\frac{a}{b}=(c\,.\,\frac{a}{b}\,.\,b)\ :b=c\,.\,a:b=\frac{c\,.\,a}{b}$$

y esta espresion es $=\frac{c}{b}\,.\,a$ (T. 12)

TEOREMA 17. Un cociente queda multiplicado por otro cociente, si el producto de los dos dividendos se parte por el producto de los dos divisores.

$$\frac{m}{n}\,.\,\frac{p}{q}=\frac{m\,.\,p}{n\,.\,q} \qquad (17)$$

DEM. $\frac{m}{n}\,.\,\frac{p}{q}=[(\frac{m}{n}\,.\,\frac{p}{q})\,.\,n\,q]:n\,q$

$$=[\frac{m}{n}\,.\,n\,.\,\frac{p}{q}\,.\,q]:n\,q=m\,p:n\,q$$

$$=\frac{m\,.\,p}{n\,.\,q}$$

TEOREMA 18. Un número queda dividido por un cociente, si se multiplica por el divisor y se divide por el dividendo.

$$a:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\,.\,c=\frac{a\,.\,c}{b} \qquad (18)$$

DEM. $a : \frac{b}{c} = ac : b$ (T. 11) $= \frac{a.c}{b}$

lo cual es la segunda parte y da la primera $\frac{a}{b} . c$ por el T. 12.

ESPLICACION. *Dos cantidades se llaman recíprocas, si tienen por producto la unidad.*

Así

$$\frac{1}{3} \text{ y } 3 \text{ ; } \frac{2}{5} \text{ y } \frac{5}{2} \text{ ; } \quad \frac{b}{c} \text{ y } \frac{c}{b}$$

son cantidades recíprocas, pues

$$\frac{1}{3} . 3 = 1 \text{ ; } \frac{2}{5} . \frac{5}{2} = 1 \text{ ; } \quad \frac{b}{c} . \frac{c}{b} = 1$$

TEOREMA 18*. Un número queda dividido por un cociente, si se multiplica por el valor recíproco del mismo.

$$a : \frac{b}{c} = a . \frac{c}{b} \tag{18*}$$

DEM. Se saca de (18), pues $\frac{a.c}{b} = a . \frac{c}{b}$ [T. 12.]

Directamente:

$$a : \frac{b}{c} = a . \frac{c}{b} : \frac{b}{c} . \frac{c}{b} \text{ [T. 11]} = a . \frac{c}{b} : 1 \text{ [T. 17]} = a . \frac{c}{b} \text{ [T. 4.]}$$

TEOREMA 19. Un cociente queda dividido por otro cociente, si el cociente de los dos dividendos se parte por el cociente de los dos divisores.

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m:p}{n:q} \tag{19}$$

DEM. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m:p}{n} : \frac{p:p}{q}$ [T. 11 y T. 14]

$$= \frac{m:p}{n:q} : \frac{p:p}{q:q} \text{ [T. 11 y T. 14]}$$

$$= \frac{m:p}{n:q} : \frac{1}{1} = \frac{m:p}{n:q} : 1$$

$$= \frac{m:p}{n:q}$$

TEOREMA 19*. Un cociente queda dividido por otro cociente, si el primero se multiplica por el valor recíproco del segundo.

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$$

DEM. $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} : \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p}$ [T. 11]

$$= \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} : 1 \text{ [T. 17]} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$$

COROLARIO 1. En general, se divide por un cociente ó quebrado, multiplicando por su valor recíproco. [T. 18* y 19*].

COROLARIO 2. Dividir por un número cualquiera, es multiplicar por su valor recíproco:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Porque $a:b = \frac{a}{b} = \frac{a \cdot 1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ [T. 12.]

TEOREMA 20. Si un número debe dividirse repetidas veces por varios otros números, el órden de la division no altera el valor del cociente total.

$$a:b:c:d = a:c:b:d = a:d:c:b = \ldots. \quad (20)$$

DEM. Dividir por un número, es multiplicar por su valor recíproco [T. 19 corol. 2]; por consiguiente dividir a sucesivamente por b, c, d, es multiplicarlo sucesivamente por $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$. Luego el resultado será

$$a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{b\,c\,d} \quad (\alpha)$$

Se ve que el primero, segundo, tercero divisor tiene el primero, segundo, tercero lugar entre los factores del producto $b\ c\ d$, que se encuentra en el denominador del cociente total. Mudar el órden de los divisores b, c, d, no haria otro efecto, que mudar el órden de los factores b, c, d en dicho producto, lo cual respecto al valor del mismo, y por consiguiente al del cociente total, es indiferente (T. 9.)

COROLARIO 1. Todos los divisores de una cantidad son multiplicadores entre sí.

COROLARIO 2. Como la repetida multiplicacion de un número *a* por varios otros *b*, *c*, *d* se designa por

$$a \cdot b \cdot c \cdot d$$

así la repetida division del mismo número por *b*, *c*, *d*, se escribe

$$a : b : c : d$$

dejando todos los paréntesis, y esta espresion equivale á $a : b\,c\,d$.

TEOREMA 21. Las potencias se dividen por otras de la misma base, restando los esponentes respectivos, el menor del mayor, y dando el resto obtenido como esponente á la base comun, la que se escribe una sola vez, y

α) *sin divisor*, cuando el esponente del dividendo es mayor que el del divisor.

β) *como divisor* de la unidad, cuando el esponente del dividendo es menor que el del divisor.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\text{condicion } m > n)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (\text{condicion } m < n)$$

DEM. Tenemos

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots \; m \text{ veces}}{a \cdot a \cdot a \ldots \; n \text{ veces}}$$

Si $m > n$, los *n* factores del denominador se quitarán por un igual número de factores del numerador, en el cual quedarán $m-n$ factores, es decir, el resultado será a^{m-n}. Si $m < n$, los *m* factores del numerador se quitarán por un igual número de factores del denominador, en el cual quedarán $n-m$ factores, y como el numerador retiene la unidad, el resultado será $\frac{1}{a^{n-m}}$.

Así es

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a \cdot a \cdot a = a^3 = a^{5-2}$$

$$\frac{a^2}{a^5} = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^{5-2}}$$

ARTICULO II.

Multiplicacion de los polinómios absolutos ó aritméticos.

§. 19.

Teoremas sobre los polinómios absolutos.

Teorema 22. Un polinómio absoluto se multiplica por un número absoluto, multiplicando cada uno de sus términos por el número y dando á los productos parciales así obtenidos los signos que los términos tenian ántes.

$$(a-b+c-d)\,n = a\,n - b\,n + c\,n - d\,n \qquad (22)$$

Dem. Caso 1º El multiplicador n sea un número *entero*. Conforme á la definicion general de la multiplicacion, ha de formarse del polinómio dado un nuevo número (es decir polinómio) del mismo modo, como el número entero n se ha formado de la unidad entera. Pero

$$n = 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ n veces}$$

es decir, la unidad entera se ha puesto n veces por sumando; por consiguiente el polinómio $(a-b+c-d)$ debe ponerse n veces por sumando, ó lo que es lo mismo, debemos formar la suma de n deestos polinómios. Luego será

$$\begin{aligned}(a-b+c-d)\,n = {} & a - b + c - d \\ & + a - b + c - d \\ & + a - b + c - d \\ & + \;.\quad .\quad .\quad . \\ & + \;.\quad .\quad .\quad . \\ & \quad \text{n veces} \\ \hline & = a\,n - b\,n + c\,n - d\,n \qquad (\S.\ 11)\end{aligned}$$

Dem. Caso 2º El número n sea un número *fraccionario* $n=\frac{p}{q}$

Conforme á la definicion dela multiplicacion, ha de formarse del polinómio dado un nuevo número, del mismo modo como el multiplicador $\frac{p}{q}$ se ha formado de la unidad entera. Pero $\frac{p}{q}$ se ha formado de la unidad entera, dividiéndola primeramente en q partes iguales y poniendo una de estas partes p veces por sumando:

$$\frac{p}{q}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\ldots\ldots p \text{ veces}$$

Luego para formar el producto buscado, el polinómio a—b+c—d tieno que dividirse en q partes iguales y una de estas partes ha de ponerse p veces por factor, ó lo que es lo mismo, debe multiplicarse por p. Pero una de las q partes iguales del polinómio es

$$\frac{a-b+c-d}{q}$$

y multiplicándola por p hallaremos

$$(a-b+c-d)\frac{p}{q}=\frac{a-b+c-d}{q}\cdot p=\frac{(a-b+c-d)\cdot p}{q}$$

$$=\frac{ap-bp+cp-dp}{q} \qquad (\alpha)$$

En lugar de la última fraccion puede escribirse

$$\frac{ap}{q}-\frac{bp}{q}+\frac{cp}{q}-\frac{dp}{q}$$

porque si se multiplica esta espresion por el divisor q de la division indicada en (α), vuelve á reproducir el dividendo de la misma:

$$\left(\frac{ap}{q}-\frac{bp}{q}+\frac{cp}{q}-\frac{dp}{q}\right)q=\frac{ap}{q}\cdot q-\frac{bp}{q}\cdot q+\frac{cp}{q}\cdot q-\frac{dp}{q}\cdot q$$

segun el 1.^{er} caso, y esto $=ap-bp+cp-dp$ [T. 5.]

Luego tendremos

$$(a-b+c-d)\cdot\frac{p}{q}=\frac{ap}{q}-\frac{bp}{q}+\frac{cp}{q}-\frac{dp}{q}$$

$$=a\cdot\frac{p}{q}-b\cdot\frac{p}{q}+c\cdot\frac{p}{q}-d\cdot\frac{p}{q} \qquad \text{[T. 12]}$$

ó bien, siendo $\frac{p}{q}=n$,

$$(a-b+c-d)\cdot n=an-bn+cn-dn$$

Teorema 23. Se multiplica un número absoluto por un polinómio absoluto, multiplicando el número por cada uno de los términos del polinómio y dando á los productos parciales así obtenidos, los signos que los términos tenian ántes.

$$n(a-b+c-d)=na-nb+nc-nd \qquad (23)$$

Dem. Siendo el polinómio dado un número absoluto, el órden de los factores en el producto $n(a-b+c-d)$ puede cambiarse (T. 9); de donde hallaremos

$$n(a-b+c-d)=(a-b+c-d)\,n=a\,n-b\,n+c\,n-d\,n$$

y variando el órden de los factores que se encuentran en cada uno de los productos parciales á la derecha, se deduce la ecuacion (23).

Escolio. Si un polinómio

$$n\,a-n\,b+n\,c-n\,d$$

tiene un factor n comun á todos los términos, este puede *sacarse* escribiéndolo una sola vez como factor, fuera de un paréntesis, que tenga todos los términos sin dicho factor:

$$(n\,a-n\,b+n\,c-n\,d)=n\,(a-b+c-d)=(a-b+c-d)\,n$$

$$(a\,x^3-2\,b\,x^3+c\,x^3)=(a-2b+c)\,x^3$$

$$5\,a+10\,a\,b^2+15\,c^2=5\,(a+2ab^2+3\,c^2)$$

Cuando todos los términos del polinómio tienen la misma letra, pero afectada de diversos esponentes, se sacará la menor potencia de dicha letra

$$3\,a\,x^2+5\,b\,x^3-6\,c\,x^5=(3\,a+5\,b\,x-6\,c\,x^3)\,x^2$$

El primer término en el paréntesis no tiene la letra x, el segundo tiene la potencia $x^{3-2}=x^1=x$, el tercero tiene la potencia $x^{5-2}=x^3$. Así tambien

$$2\,a\,b^3+3\,a^2\,b^4+5\,a^3\,b^5=(2+3\,a\,b+5\,a^2\,b^2)\,a\,b^3$$

$$\tfrac{1}{5}\,\frac{a^3}{c^2}+\tfrac{1}{10}\cdot\frac{a^6}{c^4}+\tfrac{1}{15}\cdot\frac{a^9}{c^6}=\tfrac{1}{5}\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{c^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{a^6}{c^4}\right)\frac{a^3}{c^2}$$

Teorema 24. Se multiplica un polinómio absoluto por otro polinómio absoluto, multiplicando cada término del uno por cada término del otro y dando á los productos parciales así obtenidos el signo $+$, si los dos términos de los cuales resultan, tienen signos iguales, pero dándoles el signo $-$, si los dos términos de los cuales resultan, tienen signos distintos.

$$\left.\begin{aligned}(a+b-c)\,(m-p+q)=\;&a\,m+b\,m-c\,m\\&-a\,p-b\,p+c\,p\\&+a\,q+b\,q-c\,q\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

Dem. Poniendo $(a+b-c)=P$ hallaremos (T. 23):

$$
\begin{array}{llll}
(a+b-c)\ (m-p+p) = P\,.\,(m-p+q) = P\,m - P\,p + P\,q & & & \\
& =(a+b-c)\,m & =(a\,m+b\,m-c\,m) & =a\,m+b\,m-c\,m \\
& -(a+b-c)\,p & -(a\,p+b\,p-c\,p) & -a\,p-b\,p+c\,p \\
& +(a+b-c)\,q & +(a\,q+b\,q-c\,q) & +a\,q+b\,q-c\,q
\end{array}
$$

Escolio 1. Se ve α) que el término $+b$ multiplicado por el término $+q$ da $+b\,q$; β) que $-c$ multiplicado por $+q$ da $-c\,q$; γ) que $+b$ multiplicado por $-p$ da $-b\,p$; y finalmente δ) que $-c$ multiplicado por $-p$ da $+c\,p$. Luego tenemos

$$
\begin{array}{ll}
(+b)\,.\,(+q) = +\,b\,q\ ; & (+b)\,.\,(-p) = -\,b\,p \\
(-c)\,.\,(+q) = -\,c\,q\ ; & (-c)\,.\,(-p) = +\,c\,p
\end{array}
$$

ó bien, escribiendo m en lugar de b y c, n en lugar de p y q, si solo atendamos á los signos:

$$
\begin{array}{ll}
(+m)\,.\,(+n) = +\,m\,n\ ; & (+m)\,.\,(-n) = -\,m\,n \\
(-m)\,.\,(+n) = -\,m\,n\ ; & (-m)\,.\,(-n) = +\,m\,n
\end{array}
$$

De donde se saca la regla de los signos enunciada en el teorema.

Escolio 2. Esta regla se enuncia tambien de la manera siguiente:

+	multiplicado por	+	da	+
—		+		—
+		—		—
—		—		+

§. 20.

Ejemplos de la multiplicacion

Ejemplo I. Multiplicar

$$5\,x^2+3\,x-4 \quad \text{por} \quad 2\,x^3-3\,x^2-4\,x$$

El cálculo se dispone de la manera siguiente:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
5\,x^2 & +3\,x & -4 & & & \text{multiplicando.} \\
2\,x^3 & -3\,x^2 & -4\,x & & & \text{multiplicador.} \\
\hline
10\,x^5 & +6\,x^4 & -8\,x^3 & & & \text{producto parcial por } 2\,x^3 \\
& -15\,x^4 & -9\,x^3 & +12\,x^2 & & \text{,, ,, por } -3\,x^2 \\
& & -20\,x^3 & -12\,x^2 & +16\,x & \text{,, por } -4\,x \\
\hline
10\,x^5 & -9\,x^4 & -37\,x^3 & & +16\,x & \text{Resultado}
\end{array}
$$

Siendo semejante el primer término $-15\,x^4$ del segundo producto parcial, al segundo término del producto parcial que precede, se ha escrito debajo de este término; y así todos los términos semejantes se colocan unos bajo los otros. El producto total se obtiene haciendo la reduccion de todos los términos situados en una misma columna.

Ejemplo II. Multiplicar:

$$3\,a^2x^2-5\,a\,x^3-2\,a^4+4\,x^4$$

por

$$2\,a^3x^2-6\,a^2x^3$$

Ordenamos estos polinómios por las potencias *descendentes* de una misma letra, por ejemplo de x, y como no entra en el multiplicando su primera potencia, dejaremos vacío el lugar del término que le corresponderia, si el polinómio fuera *completo.*

$$\begin{array}{llllll}
4\,x^4 & -5\,a\,x^3 & +3\,a^2x^2 & & -2\,a^4 & \\
-6\,a^2\,x^3 & +2\,a^3x^2 & & & & \\
\hline
-24\,a^2x^7 & +30\,a^3x^6 & -18\,a^4x^5 & & +12\,a^6x^3 & \\
 & +8\,a^3x^6 & -10\,a^4x^5 & +6\,a^5x^4 & & -4\,a^7x^2 \\
\hline
-24\,a^2x^7 & +38\,a^3x^6 & -28\,a^4x^5 & +6\,a^5x^4 & +12\,a^6x^3 & -4\,a^7x^2
\end{array}$$

Los dos polinómios dados se llaman *homogéneos,* porque es constante la suma de los esponentes en cada término. Como esta suma es 4 en el primero y 5 en el segundo, se dice que el multiplicando es un polinómio de *cuarto grado,* y el multiplicador un polinómio de *quinto grado.* Es evidente que su *producto debe ser tambien homogéneo y de un grado igual á la suma de los grados de los factores, es decir de nono grado.*

ARTICULO III.

Multiplicacion de los monómios y polinómios álgébricos.

§. 21.

Signos de los productos formados por números positivos y negativos.

Teorema 25. El producto de un número

1)	*positivo*	por otro *positivo*	es	*positivo*
2)	*negativo*	*positivo*		*negativo*
3)	*positivo*	*negativo*		*negativo*
4)	*negativo*	*negativo*		*positivo*

$$\left.\begin{array}{ll}(+a)\cdot(+b)=+ab\ ; & (+a)\cdot(-b)=-ab \\ (-a)\cdot(+b)=-ab\ ; & (-a)\cdot(-b)=+ab\end{array}\right\}\quad(25)$$

DEM. 1ª por medio de los polinómios (cf. §. 13 N.° 6.°).

Designando por A, B, a, b números absolutos y suponiendo $A>a$ y $B>b$ será (T. 24.)

$$\begin{aligned}(A+a)\,(B+b) &= AB+aB+Ab+ab\\(A-a)\,(B+b) &= AB-aB+Ab-ab\\(A+a)\,(B-b) &= AB+aB-Ab-ab\\(A-a)\,(B-b) &= AB-aB-Ab+ab\end{aligned}$$

En la primera ecuacion el número $+a$, dado para aumentar el número A, se multiplica por el número $+b$, dado para aumentar el número B, y resulta el producto parcial $+ab$, que aumenta tambien los términos de que va precedido. Haciendo ya abstraccion de los números absolutos A y B y de los productos formados por ellos, se ve que un número positivo $(+a)$ multiplicado por otro positivo $(+b)$ da un resultado positivo $(+ab)$.

De semejante modo, en la segunda ecuacion el número $-a$, dado para disminuir el número A, se multiplica por el número $+b$, dado para aumentar el número B, y resulta el producto parcial $-ab$, que disminuye los términos precedentes. De donde, haciendo abstraccion de los números absolutos A y B, se deduce la segunda ecuacion [25]. Del mismo modo se demuestran la tercera y cuarta parte del teorema.

DEM. 2.ª Usando la definicion general de la multiplicacion.

Enunciaremos esta definicion bajo la forma:

Formar el producto de dos números es formar del multiplicando un nuevo número, del mismo modo que el multiplicador se ha formado de la unidad entera y absoluta.

Añadimos solo la palabra "*absoluta*," la cual no altera la definicion en ninguna cosa, siendo ella primeramente dada para los números absolutos que suponen la unidad absoluta; pero aquí es muy necesario añadir dicha palabra para distinguir la unidad absoluta de la positiva y negativa. Hecho esto se infiere:

1° Multiplicar $(+a)$ por $(+b)$ es formar un nuevo número del multiplicando $(+a)$ del mismo modo que el multiplicador $(+b)$ se ha formado de la unidad entera y absoluta. Pero suponiendo que *b*, sea un número entero, el número $+b$, se ha formado de la unidad entera y absoluta, poniéndola *b* veces por *sumando*:

$$(+b)=+1+1+1+1+\ldots\ldots\ b\ \text{veces}$$

Por consiguiente se formará el producto buscado poniendo el multiplicando [+a] *b* veces por *sumando*, es decir, tendremos

$$[+a].[+b] = + [+a] + [+a] + \dots \text{ b veces}$$
$$= + a + a + a + \dots \text{ b veces} \quad [\text{T. 17 §. 15}]$$
$$= + a b$$

2.° Multiplicaremos [—a] por [+b], poniendo [—a], *b* veces por *sumando*; luego

$$[-a].[-b] = + [-a] + [-a] + [-a] + \dots \text{ b veces}$$
$$= - a - a - a - \dots \text{ b veces} [\text{T. 17 §. 15}]$$
$$= - a b$$

3º Para multiplicar [+a] por [—b], observaremos que el multiplicador —b se ha formado de la unidad entera y absoluta, poniéndola *b* veces por *sustraendo:*

$$[-b] = -1 - 1 - 1 - 1 - \dots \text{ b veces.}$$

Por consiguiente hallaremos el producto buscado poniendo el multiplicando [+a], *b* veces por *sustraendo*, lo cual dará:

$$[+a].[-b] = - [+a] - [+a] - [+a] - \dots \text{ b veces.}$$
$$= - a - a - a - a - \dots \text{ b veces } [\text{T. 17 §. 15.}]$$
$$= - a\, b.$$

4º Finalmente se encontrará el producto de [—a] por [—b], poniendo el multiplicando [—a], *b* veces por sustraendo:

$$[-a].[-b] = - [-a] - [-a] - [-a] - \dots \text{ b veces.}$$
$$= + a + a + a + \dots \text{ b veces} \quad [\text{T. 17 §. 15.}]$$
$$= + a b$$

Si se supone *b* una fraccion $= \frac{p}{q}$, el multiplicando ha de dividirse primeramente en *q* partes iguales, y una de estas ha de ponerse *p* veces por sumando ó sustraendo, segun el signo de *b* sea + ó —. Pero dividir $\pm a$ en *q* partes iguales, es dividir *a* en *q* partes iguales y tomar una de ellas por sumando ó sustraendo, de donde $\frac{\pm a}{q} = \pm \frac{a}{q}$. Con esto tendremos:

$$1^{\circ}\ (+a).(+b)=+\left(+\frac{a}{q}\right)+\left(+\frac{a}{q}\right)+\left(+\frac{a}{q}\right)+\ldots p \text{ veces.}$$

$$=+\frac{a}{q}+\frac{a}{q}+\frac{a}{q}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p \text{ veces.}$$

$$=+\frac{a}{q}.p=+a.\frac{p}{q}=+ab$$

$$2^{\circ}\ (-a).(+b)=+\left(-\frac{a}{q}\right)+\left(-\frac{a}{q}\right)+\left(-\frac{a}{q}\right)+\ldots p \text{ veces.}$$

$$=-\frac{a}{q}-\frac{a}{q}-\frac{a}{q}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p \text{ veces.}$$

$$=-\frac{a}{q}.p=-a.\frac{p}{q}=-ab$$

etc.

Escolio. Este teorema es idéntico al escolio 1 del teorema 24; por consiguiente vale aquí tambien el escolio 2 de dicho teorema.

Corolario. Se infiere la regla general:

Si dos factores tienen el mismo signo, el producto será positivo, y si dos factores tienen signos contrarios, el producto será negativo.

Teorema 26. El cociente de un número

1] *positivo* por otro *positivo* es *positivo*
2] *negativo* *positivo* *negativo*
3] *positivo* *negativo* *negativo*
4] *negativo* *negativo* *positivo*

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{+a}{+b}=+\dfrac{a}{b}\ ; & \dfrac{+a}{-b}=-\dfrac{a}{b} \\[2ex] \dfrac{-a}{+b}=-\dfrac{a}{b}\ ; & \dfrac{-a}{-b}=+\dfrac{a}{b} \end{array}\right\} \quad [26]$$

Dem. Conforme á la definicion de la division, el cociente multiplicado por el divisor ha de producir el dividendo. Pero, usando del teorema precedente, cada una de las ecuaciones propuestas [26] dará el dividendo, si se multiplica el cociente que está á la derecha de las mismas por el divisor $+b$ ó $-b$. Pues

1] $+\frac{a}{b}.+b=+\frac{a}{b}.b=+a$; 3] $-\frac{a}{b}.-b=+\frac{a}{b}.b=+a$

2] $-\frac{a}{b}.+b=-\frac{a}{b}.b=-a$; 4] $+\frac{a}{b}.-b=-\frac{a}{b}.b=-a$

COROLARIO 1. Podremos, pues, formar la tabla siguiente:

Dividendo.	Divisor.	Cociente.
+	+	+
—	+	—
+	—	—
—	—	+

COROLARIO 2. Tambien se enuncia esta regla, diciendo que

+	dividido por	+	da	+
—		+		—
+		—		—
—		—		+

COROLARIO 3. El cociente llevará el signo +, si el dividendo y divisor tienen el mismo signo, y él llevará el signo—, si el dividendo y divisor tienen signos distintos.

COROLARIO 4. Para la multiplicacion y la division vale la misma regla:

Signos iguales dan un resultado positivo; y signos desiguales dan un resultado negativo.

TEOREMA 27. El producto de varios factores es positivo, si todos los factores son positivos ó el número de los factores negativos es un número *par;* pero el producto es negativo, si el número de los factores negativos es un número *impar.*

$$\left.\begin{array}{l} +a.+b.+c.+d=+abcd \\ +a.-b.-c.+d.-e.-f=+abcdef \\ +a.-b.-c.+d.-e.-f.-g=-abcdefg \end{array}\right\} \quad [27]$$

DEM. 1] Si todos los factores son positivos, evidentemente el producto será positivo; porque el primer factor multiplicado por el siguiente dará un producto positivo, y este producto multiplicado por el tercer factor, dará tambien un producto positivo &a.

2] $+a.-b$ es negativo y este producto multiplicado por $-c$ es positivo. Luego multiplicando el producto obtenido por $+d$, el signo quedará el mismo, y multiplicando despues por $-e$ el signo cambiará, pero por el factor siguiente $-f$ el signo cambiará otra vez, haciendo el producto total positivo. Por consiguiente, los cuatro factores negativos hacen el producto positivo; lo mismo sucederá si hay seis, ocho, diez. . . en general un número *par* de factores.

3] Si por el contrario, como en el tercer caso es *impar* el número de factores negativos, podremos formar el producto de todos, menos el último negativo. Este producto será positivo, porque el número de sus factores negativos es un número par; y multiplicando luego el producto así obtenido por dicho factor último, obtendremos el producto pedido que será negativo, pues + multiplicado por — dá —.

Corolario 1. El órden de los factores puede variarse como se quiera, aun entre ellos hay factores positivos, negativos ó algébricos; porque el signo del producto, solo depende del número par ó impar de los signos negativos, pero no depende de la posicion de los signos. De donde se infiere, que todo lo que se ha dicho en el [§. 17] de la posicion de los factores, vale tambien para factores positivos, negativos y algébricos.

Corolario 2. Una potencia cualquiera de un número positivo es positiva; una potencia de un número negativo es positiva, si el esponente es un número par, pero es negativa, si el esponente es un número impar.

$$(+a)^3 = +a . +a . +a = +a^3$$
$$(+a)^4 = +a . +a . +a . +a = +a^4$$
$$(-a)^2 = -a . -a = +a^2$$
$$(-a)^3 = -a . -a . -a = -a^3$$
$$(-a)^4 = -a . -a . -a . -a = +a^4$$
$$(-a)^5 = (-a)^4 . (-a) = +a^4 . -a = -a^{4+1} = -a^5$$

Corolario 3. Para hallar el signo de un cociente, se buscará el signo final del dividendo y del divisor, usando este teorema y el corolario 2, y luego se determinará el signo pedido por el teorema precedente.

Problema. ¿Qué signo tendrá el cociente

$$\frac{a^5 b^2 c^7 e^9}{x^3 y^6 z^7}$$

si las cantidades a y x son positivas y todas las otras son negativas?—*Res.* En el dividendo hay $2+7+9=18$ factores negativos, y como este número es un número par, el dividendo será *positivo.* El divisor tiene $6+7=13$ factores negativos, y por tanto es *negativo.* Siendo positivo el dividendo y negativo el divisor, el cociente será *negativo.*

Corolario 4. Se infiere ahora igualmente, que todos los teoremas establecidos de los monomios absolutos [§§. 16–18] valen tambien para los números positivos, negativos y algébricos. Porque el valor de los signos de estas cantidades no altera el valor absoluto de las mismas. Pero es preciso observar las reglas espuestas en este teorema y en los corolarios 2 y 3.

§. 22.

Polinómios algébricos.

Teorema 28. Un polinómio algébrico se multiplica por otro polinómio algébrico, enteramente como si uno y otro polinómio fuese absoluto, es decir: se multiplica cada término del uno por cada término del otro, dando á los productos parciales así obtenidos el signo $+$, si los dos términos de los cuales resultan, tienen signos iguales, pero dándoles el signo $-$, si los dos términos de los cuales resultan tienen signos distintos [Cf. teor. 24.]

$$\left.\begin{aligned}(a'+b'-c')\;(m'-p'+q') = {}& a'm'+b'm'-c'm'\\ & -a'p'-b'p'+c'p'\\ & +a'q'+b'q'-c'q'\end{aligned}\right\}\quad[28]$$

suponiendo que a', b', c', m', p', q' sean números algébricos: $a'=\pm a$, $b'=\pm b$, $c'=\pm c$, $m'=\pm m$, $p'=\pm p$, $q'=\pm q$, cualesquiera sean los valores absolutos de a, b, c....

Dem. Para demostrar este teorema importante, usaremos la ecuacion

$$\left.\begin{aligned}(A+a+b-c)\,(M+m-p+q) = {}& A\,M+a\,M+b\,M-c\,M\\ & +A\,m+a\,m+b\,m-c\,m\\ & -A\,p-a\,p-b\,p+c\,p\\ & +A\,q+a\,q+b\,q-c\,q\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

la cual será verdadera (T. 24), si suponemos que A, a, b, c, M, m, p, q son números absolutos y A, M tan grandes, que ámbos polinómios dados por factores tengan valores absolutos ó mayores que cero.

Mudando el signo de *a* en el primer polinómio á la izquierda de la ecuacion (a), con lo cual suponemos que A tiene un valor tan grande, que dicho polinómio retiene un valor absoluto, hallaremos (el mismo teorema.)

$$\left.\begin{aligned}(A-a+b-c)\,(M+m-p+q) = {} & A\,M-a\,M+b\,M-c\,M\\ & +A\,m-a\,m+b\,m-c\,m\\ & -A\,p+a\,p-b\,p+c\,p\\ & +A\,q-a\,q+b\,q-c\,q\end{aligned}\right\}\quad [b]$$

Esta nueva ecuacion no se diferencia de la ecuacion (a) sino en el signo de todos los términos á la derecha, que tienen a por factor, consecuencia muy sencilla del escolio 2 del teor. 24. Podremos escribir las dos ecuaciones (a) y (b) bajo la misma forma:

$$\begin{aligned}(A+(\pm a)+b-c)\,(M+m-p+q) = {} & A\,M+(\pm a)\,M+b\,M-c\,M\\ & +A\,m+(\pm a)m+b\,m-c\,m\\ & -A\,p-(\pm a)\,p-b\,p+c\,p\\ & +A\,q+(\pm a)\,q+b\,q-c\,q\end{aligned}$$

usaremos, pues, el signo +, que está en ($\pm$ a), para reproducir la ecuacion (a) y el signo —, que está en ($\pm$a), para reproducir la ecuacion (b). Poniendo ahora $\pm a = a'$, tendremos:

$$\begin{aligned}(A+a'+b-c)\,(M+m-p+q) = {} & A\,M+a'\,M+b\,M-c\,M\\ & +A\,m+a'\,m+b\,m-c\,m\\ & -A\,p-a'\,p-b\,p+c\,p\\ & +A\,q+a'\,q+b\,q-c\,q\end{aligned}$$

en donde a' es una cantidad algébrica susceptible de todos los valores positivos y negativos.

Mudando el signo de b á la izquierda de esta nueva ecuacion, se mudarán los signos de todos los términos á la derecha, que tienen b por factor, y usando los mismos razonamientos como arriba, podremos introducir la cantidad algébrica $b' = \pm b$ en lugar del número absoluto b, quedando siempre verdadera la ecuacion, supuesto que A retiene un valor bastante grande.

Así continuando del mismo modo, llegaremos á reemplazar todos los números absolutos a, b, c, m, p, q, cuantos haya, en uno y otro polinómio, por números algébricos a', b', c', m', p', q' &a, de modo que tengamos finalmente como verdadera y demostrada la ecuacion:

$$\left.\begin{aligned}(A+a'+b'-c')\,(M+m'-p'+q') = {} & AM+a'M+b'M-c'M \\ & +Am'+a'm'+b'm'-c'm' \\ & -Ap'-a'p'-b'p'+c'p' \\ & +Aq'+a'q'+b'q'-c'q'\end{aligned}\right\} \text{(c)}$$

De aquí se deduce como un caso particular

$$(A+x)\,(M+z) = A\,M+x\,M+A\,z+x\,z$$

en donde x y z son susceptibles de todo valor posible. Pondremos ahora

$$x=a'+b'-c' \quad ; \qquad z=m'-p'+q'$$

y tendremos:

$$\left.\begin{aligned}[A+(a'+b'-c')]\,[M+(m'-p'+q')] = {} & A\,M+(a'+b'-c')\,M \\ & +A\,(m'-p'+q')+(a'+b'-c')\,(m'-p'+q')\end{aligned}\right\} \text{(d)}$$

Si se compara la ecuacion (d) con la ecuacion (c), se observa:

1) El primer miembro de (d) es igual al primer miembro de (c).

2) El primer término A M á la derecha de (d) es igual al primer término A M á la derecha de (c).

3) El segundo término $(a'+b'-c')\,M$ del segundo miembro de (d) es igual á los tres últimos términos $a'M+b'M-c'M$ de de la primera línea horizontal á la derecha de (c). Porque suponiendo M un número entero, lo cual para nuestro fin es permitido, el producto $(a'+b'-c')\,M$ es $=(a'+b'-c')+(a'+b'-c')+(a'+b'-c')+\ldots\,M$ veces $=a'M+b'M-c'M$.

4) El tercer término $+A\,(m'-p'+q')$ del segundo miembro de (d) es igual á los tres términos $+A\,m'-A\,p'+A\,q'$ que están los últimos en la primera columna á la derecha de (c). Porque $+A\,(m'-p'+q')=(m'-p'+q')\,A$ [T. 27 corol. 1] $=m'A-p'A+q'A=A\,m'-A\,p'+A\,q'$ suponiendo igualmente que A sea un número entero.

Luego, siendo las ecuaciones (c) y (d) verdaderas y todas las partes dichas respectivamente iguales, es preciso que las demas partes de las mismas, sean tambien iguales, es decir, se encuentra:

$$\left.\begin{aligned}(a'+b'-c')\,(m'-p'+q') = {} & a'm'+b'm'-c'm' \\ & -a'p'-b'p'+c'p' \\ & +a'q'+b'q'-c'q'\end{aligned}\right\} \text{(e)}$$

con lo cual el teorema se halla completamente demostrado [cf. §. 13 N.° 6].

Corolario 1. Suponiendo en la demostracion del teorema 25 *a* y *b* números algébricos, dicho teorema respecto á los signos, será demostrado para los números algébricos, es decir, será tambien para números algébricos:

$$(+a).(+b)=+a\,b\ ;\qquad (+a).(-b)=-a\,b$$

$$(-a).(+b)=-a\,b\ ;\qquad (-a).(-b)=+a\,b$$

Corolario 2. Suponiendo $m'=p'$ el segundo polinómio se reduce al monómio $+q'$, y á la derecha de (e) desaparecen los seis términos de las dos primeras líneas horizontales, de modo que resulta:

$$(a'+b'-c').+q'=+a'\,q'+b'\,q'-c'\,q' \qquad (\alpha)$$

Si se supone en la ecuacion (e), $-q'$ en lugar de $+q'$ resulta del mismo modo:

$$(a'+b'-c').-q'=-a'\,q'-b'\,q'+c'\,q' \qquad (\beta)$$

Como se ve, en estos casos vale la misma regla, establecida ya en el teor. 22 para los números absolutos, y por tanto este teorema podrá enunciarse en forma general como se sigue:

Un polinómio cualquiera se multiplica por un número absoluto ó algébrico, positivo ó negativo, multiplicando cada uno de sus términos por el número y dando á los productos parciales así obtenidos los signos conforme á la regla de estos [establecida en el escol. 2.° del teor. 24]. Del mismo modo vale generalmente el teorema 23, mudando su enunciado como arriba.

Concluimos, que todas las reglas dadas en este capítulo II sobre las operaciones con números absolutos, valen tambien para los números positivos, negativos y algébricos, solo debe atenderse á los signos. Desde ahora todas las letras que entran en un cálculo ó en algun teorema designarán números algébricos como los mas generales.

Corolario 3. Aplicando las reglas de la multiplicacion á la formacion de algunos productos que ocurren frecuentemente, hallamos:

1.° *El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual á la suma de los cuadrados de cada una, mas el doble producto de la una por la otra.*

$$(a+b)^2=a^2+2\,a\,b+b^2 \qquad (\alpha)$$

2° *El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual á la suma de los cuadradados de cada una, ménos el doble producto de la una por la otra.*

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

3.° *El producto de la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas, es igual á la diferencia de los cuadrados de dichas cantidades.*

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2 \qquad (\gamma)$$

4° *El cuadrado de una suma es igual á la suma de los cuadrados de sus diferentes términos, mas la suma de todos los dobles productos de cada uno de ellos por los demas que le siguen.*

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,a\,d + 2\,b\,c + 2\,b\,d + 2\,c\,d \qquad (\delta)$$

5° *Semejantes reglas valen respecto á la tercera y cuarta potencia de una suma ó diferencia de dos cantidades:*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2 b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4\,a^3\,b + 6\,a^2 b^2 - 4\,a\,b^3 + b^4$$

ARTICULO IV.

Division de los polinómios.

§. 23.

Un polinómio y un número.

Teorema 29. Para dividir un polinómio por un número, se divide por él cada uno de sus términos.

$$\frac{a+b-c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} \qquad (29)$$

Dem. Si se multiplica el cociente $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$ por el divisor m, que está á la izquierda en la division indicada, se reproduce el dividendo $a+b-c$; pues

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}\right) m = \frac{a}{m}.m + \frac{b}{m}.m - \frac{c}{m}.m = a+b-c$$

La inversion de este teorema da el siguiente:

TEOREMA 30. Para sumar ó restar dos ó mas cocientes que tienen el mismo divisor, se formará la suma ó el resto de los dividendos y se pondrá por divisor, el divisor comun.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}; \quad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m} \\ \\ \frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m} \end{array}\right\} (30)$$

DEM. Multiplicando el primer miembro de cada una de estas ecuaciones por el divisor m del segundo miembro, se halla el dividendo que está en el mismo segundo miembro.

ESCOLIO. Un cociente misto, como $a+\frac{b}{c}$, puede recibir la forma de un cociente simple $\frac{ac+b}{c}$, poniendo $\frac{ac}{c}$ en lugar de a.

Así tambien la espresion $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ tomará la forma $\frac{ad+bc}{bd}$ multiplicando el dividendo y el divisor de cada cociente por el divisor del otro.

§ 24.

Dos polinómios.

TEOREMA 31. Dado un polinómio por dividendo y otro por divisor y siendo el primero realmente un múltiplo del segundo, se hallará un término del cociente, ordenando ambos polinómios del mismo modo y dividiendo el primer término del dividendo por el primer termino del divisor.

DEM. 1.° CASO. Los diversos términos de los polinómios se diferencian en *diferentes letras*.

Tenemos

$$(x+y+z)\ (m+n)=m\,x+m\,y+m\,z+n\,x+n\,y+n\,z$$

Considerando el tercer polinómio, que está á la derecha de la ecuacion como dividendo, y el primero $x+y+z$ como divisor, el segundo $m+n$ será cociente. El tercero y el primer polinómio están ordinados del mismo modo, teniendo las letras x, y, z, en uno y otro la posicion del alfabeto. Si dividimos el primer término $m\,x$ del dividendo por el primer término x del divisor, se encuentra $\frac{m\,x}{x}=m$, es decir, el primer término del cociente.

Lo mismo sucederá si el dividendo se ordena como sigue:

$$mx+nx+my+ny+mz+nz$$

Por el contrario, escribiendo

$$my+mz+mx+ny+nz+nx$$

de modo que la posicion de las letras x, y, z no sea la misma que en el divisor, el cociente $\frac{my}{x}$ no dará un término del polinómio buscado.

Dem. 2º Caso. Los diferentes términos de los polinómios se diferencian *en diferentes potencias de la misma letra.*

La multiplicacion

de 1)	x^3+2x^2+3x+5	
por 2)	x^2+2x+1	
da	$x^5+2x^4+3x^3+5x^2$	(α)
	$+2x^4+4x^3+6x^2+10x$	(β)
	$+x^3+2x^2+3x+5$	(γ)
3)	$x^5+4x^4+8x^3+13x^2+13x+5$	

Considerando el producto 3) como dividendo y el polinómio 1) como divisor, será el polinómio 2) cociente. El dividendo 3) y el divisor 1) están ordenados del mismo modo, por las potencias decrecientes de x. Luego, si se divide el primer término x^5 del dividendo por el primer término x^3 del divisor, se hallará $\frac{x^5}{x^3}=x^2$, es decir, el primer término del cociente x^2+2x+1. La razon de esto es, porque el primer término x^5 del producto 3) procede *solo* por la multiplicacion de los primeros términos x^3 y x^2 de los polinómios 1) y 2); pues la multiplicacion de otro cualquier término del polinómio 1) por cualquier término del polinómio 2) da una potencia menor que x^5.

Pueden tambien ordenarse los polinómios dados 3) y 1) por las *potencias crecientes* de x, en cuyo caso los términos que solo contienen números determinados, sin ninguna potencia de x, deben escribirse en primer lugar:

1) $5+3x+2x^2+x^3$

2) $1+2x+x^2$

3) $5+13x+13x^2+8x^3+4x^4+x^5$

El primer término 5 del dividendo 3) dividido por el primer término 5 del divisor 1) da $\frac{5}{5}=1$, es decir, el primer término 1 del cociente $1+2x+x^2$. La razon de esto es la misma; procede, pues, por la multiplicacion tambien el término 5 del producto 3) *sin reduccion* del primer término 5 del polinómio 1) y del primer término 1 del polinómio 2).

Pero si se ordenan los polinómios 3) y 1) de otra manera, por ejemplo

$$1) \qquad 2x^2+x^3+3x+5$$

$$3) \qquad 8x^3+13x^2+4x^4+x^5+5+13x$$

la division del primer término $8x^3$ del dividendo 3) por el primer término $2x^2$ del divisor 1), dará $\frac{8x^3}{2x^2}=4x$, lo que no se encuentra entre los términos del cociente x^2+2x+1. La razon es, porque el término $8x^3$ procede, como se ve en el cálculo de arriba, por *la reduccion* de varios productos parciales.

Escolio. Si se multiplica el divisor por el primer término del cociente y luego se resta este producto del dividendo, el resto así obtenido será un polinómio y múltiplo del divisor.

Dem. *En el* 1.° *caso* de arriba el divisor $x+y+z$ multiplicado por el primer término m del cociente $m+n$, da $mx+my+mz$, lo cual restado del dividendo dará el resto $nx+ny+nz$, un polinómio é igual á $(x+y+z)\,n$, lo que es un múltiplo del divisor $x+y+z$.

En el 2º caso, el dividendo 3) consta de la suma de tres polinómios (α), (β) y (γ), cada uno de los cuales es un múltiplo del divisor, es decir, un producto parcial de este por los términos diferentes x^2, $+2x$, y $+1$ del cociente 2). Restándose el producto que está formado por el divisor y el primer término del cociente, se resta el primer producto parcial (α); luego quedará la suma de (β) y (γ), es decir el producto del divisor por los otros términos del cociente:

$$(x^3+2x^2+3x+5)\ (2x+1)$$

lo cual es un polinómio y múltiplo del divisor.

Este teorema y su escolio bastarán para efectuar la division de un polinómio por otro.

Regla de dividir polinómios por otros polinómios.

Regla. Para hallar el cociente de un polinómio por otro polinómio:

1) se ordenan los dos polinómios dados de la misma manera,
2) se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor,
3) se multiplica el divisor por el cociente parcial así obtenido y este producto se resta del dividendo.

4) el resto encontrado se considera como dividendo, y este procedimiento se debe guardar hasta que se llegue á un resto cero.

Ejemplo I. Dividir

$$m\,y+m\,x+n\,z+m\,z+n\,x+n\,y$$

por $z+x+y$

Se ordenan los polinómios dados por el órden que tienen las letras x, y, z del divisor en el alfabeto y se dispone el cálculo como se ve á continuacion:

$$\begin{array}{l|l} m\,x+m\,y+m\,z+n\,x+n\,y+n\,z & x+y+z = \text{divisor} \\ \underline{-m\,x-m\,y-m\,z} & \overline{m+n \quad = \text{cociente}} \\ \text{1.º residuo} \quad +n\,x+n\,y+n\,z & \\ \qquad\qquad\quad \underline{-n\,x-n\,y-n\,z} & \\ \text{2º residuo} \qquad 0 & \end{array}$$

Se divide el primer término mx del dividendo por el primer término x del divisor; el cociente parcial será $\frac{m\,x}{x}=m$ y se pone como primer término del cociente total en el lugar indicado. Luego se formará el producto del divisor $x+y+z$ por el primer término encontrado m del cociente; este producto será $m\,x+m\,y+m\,z$ y se escribe debajo del dividendo, los términos semejantes bajo de los términos semejantes. Hecho esto, se restará dicho producto del dividendo, mudando los signos del sustraendo y sumando. El residuo $n\,x+n\,y+n\,z$, segun el escolio del teorema precedente será un múltiplo del divisor; luego divisible por el mismo. Se divide su primer término $n\,x$ por el primer término x del divisor, que dará $\frac{n\,x}{x}=n$, el segundo término del cociente total. El nuevo término n del cociente se multiplica por el divisor y dará el producto $n\,x+n\,y+n\,z$, que se escribe bajo del primer residuo, y restándole se encuentra el segundo residuo $=0$. Luego el cociente total será $m+n$.

Ejemplo II. Dividir.

$$13\,x^2+4\,x^4+x^5+5+13\,x+8\,x^3$$

por $2\,x^2+3\,x+x^3+5$

Ordenando ambos polinómios por las potencias decrecientes de x, el cálculo se dispone como sigue:

$$x^5+4x^4+6x^3+13x^2+13x+5 \;\big|\; x^3+2x^2+3x+5 = \text{divisor.}$$
$$\underline{x^5+2x^4+3x^3+5x^2} \qquad x^2+2x+1 \quad = \text{cociente}$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$

1. res. $+2x^4+5x^3+8x^2+13x$
$$+2x^4+4x^3+6x^2+10x$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$

2. res. $+x^3+2x^2+3x+5$
$$+x^3+2x^2+3x+5$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$

3 res. 0

Ejemplo III. Dividir:

$$5a^4x^4-7a^2x^6-3x^8+6a^5x^3-12a^3x^5+ax^7$$

por $\quad 5ax^2+3x^3+2a^2x$

Estos polinomios se ordenarán como por las potencias crecientes de x, así tambien por las potencias decrecientes de a.

$$6a^5x^3+5a^4x^4-12a^3x^5-7a^2x^6+ax^7-3x^8 \;\big|\; 2a^2x+5ax^2+3x^3$$
$$6a^5x^3+15a^4x^4+9a^3x^5 \qquad 3a^3x^2-5a^2x^3+2ax^4-x^5$$
$$- \quad - \quad -$$

1º res. $-10a^4x^4-21a^3x^5-7a^2x^6$
$$-10a^4x^4-25a^3x^5-15a^2x^6$$
$$+ \quad + \quad +$$

2º res. $+4a^3x^5+8a^2x^6+ax^7$
$$+4a^3x^5+10a^2x^6+6ax^7$$
$$- \quad - \quad -$$

3º res. $-2a^2x^6-5ax^7-3x^8$
$$-2a^2x^6-5ax^7-3x^8$$
$$+ \quad + \quad +$$
$$0$$

§. 25.

Demostracion general de la division.

Designando el dividendo por D, el divisor por d, los términos sucesivos del cociente por t_1, t_2, t_3 .... t_n, los residuos sucesivos por r_1, r_2, r_3 .... r_n, la operacion de dividir polinomios por otros puede representarse por

$$1)\frac{D}{d}=t_1+\frac{r_1}{d};\quad 2)\frac{r_1}{d}=t_2+\frac{r_2}{d};\quad 3)\frac{r_2}{d}=t_3+\frac{r_3}{d}\quad \&a.\dots\qquad (\alpha)$$

pues el dividendo D se divide por el divisor d, se encuentra el primer término t_1 del cociente y queda un residuo r_1 para dividirse por el divisor d, y esta primera operacion parcial se designa por la primera ecuacion (α). Del mismo modo, dividiendo realmente el residuo r_1 por d, se obtiene el segundo término t_2 del cociente y queda el residuo r_2 indicado para dividirse por el divisor d, lo cual constituye la segunda operacion parcial y está representado por la segunda ecuacion (α) &a.

Despues de haber formado n términos del cociente, la operacion puede representarse por

$$\frac{D}{d}=t_1+t_2+t_3+\dots+t_n+\frac{r_n}{d}\qquad (\beta)$$

pues el cociente exacto de D por d será igual á la suma de los cocientes parciales, aumentada por el último residuo r_n, que queda indicado para dividirse por el divisor d. La misma ecuacion (β) se deduce facilmente de las ecuaciones (α), poniendo el valor de $\frac{r_1}{d}$ de 2) en 1), y el de $\frac{r_2}{d}$ de 3) en él resultado &a.

Para formar los residuos succesivos, constantemente se multiplica el divisor por el último término encontrado del cociente, y el producto se resta del residuo precedente [ó del dividendo en la primera division parcial.] Luego los residuos tienen la forma

$$\begin{aligned}
r_1 &= D - d.t_1\\
r_2 &= r_1 - d.t_2\\
r_3 &= r_2 - d.t_3\\
&\vdots\\
r_{n-1} &= r_{n-2} - d.t_{n-1}\\
r_n &= r_{n-1} - d.t_n
\end{aligned}$$

La suma de todas estas ecuaciones es

$$r_1+r_2+r_3+\dots+r_{n-1}+r_n$$

$$=D+r_1+r_2+r_3+\dots+r_{n-2}+r_{n-1}-d\,(t_1+t_2+t_3+\dots+t_n)$$

y si restamos de los dos miembros de la ecuacion la suma $r_1+r_2+r_3+\dots+r_{n-1}$ que es comun, tendremos

$$r_n=D-d\,(t_1+t_2+t_3+\dots t_n)\qquad (\gamma)$$

Esta ecuacion representa la forma que tiene el residuo r_n por las operaciones sucesivas de la division, y realmente del dividendo se restan sucesivamente todos los productos parciales del divisor d por los cocientes parciales $t_1, t_2, \ldots \ldots t_n$.

Si sustituimos el valor de r_n en la ecuacion (β) se tiene

$$\frac{D}{d} = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n + \frac{D - d\,(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n)}{d} \quad (\delta)$$

y esta ecuacion contiene exactamente el resultado de n divisiones parciales, representado por las cantidades D, d, t_1, $t_2 \ldots$ que entran en el mismo.

Observemos:

1) No hemos supuesto en la demostracion que el dividendo D y el divisor d están ordenados del mismo modo. Esta calidad no se indica por ningun signo.

2) No hemos supuesto tambien que el dividendo D debe ser un múltiplo verdadero del divisor d.

Suponemos solamente que los términos sucesivos $t_1, t_2, t_3 \ldots$ se hallan, dividiendo el primer término de cada uno de los dividendos parciales por el primer término del divisor. Pero

3) La ecuacion (δ) es siempre verdadera y una igualdad idéntica, cualesquiera que sean los valores de $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$, verdaderos ó falsos, supuesto solamente que los mismos valores entran, como en el cociente, así tambien en los residuos. Pues si multiplicamos la ecuacion (δ) por d, tendremos

$$D = d\,(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n) + D - d\,(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots t_n)$$

es decir $D = D$.

4) El resto será cero, si el numerador que está á la derecha de (δ) es cero, ó bien si

$$D = d\,(t_1 + t_2 + t_3 + \ldots t_n)$$

es decir, si el dividendo D es verdaderamente un múltiplo del divisor d por un polinómio finito $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n$. Por inversion, el resto nunca será cero, si el dividendo D no es un múltiplo del divisor d. Luego en este caso la division se continuará sin fin, y el polinómio $t_1 + t_2 + t_3 \ldots + t_n$ será infinito.

Luego podremos concluir:

1º El modo de dividir un polinómio por otro, que hemos indicado arriba, dará siempre resultados verdaderos, aunque el dividendo y el divisor no están ordenados del mismo modo.

2º Así tambien el resultado será verdadero, cuando el dividendo no es un múltiplo del divisor.

3º Del mismo modo el resultado será verdadero, cuando en lugar de los verdaderos valores de los cocientes parciales $t_1, t_2, t_3 \ldots$

se toman falsos, supuesto que los mismos falsos valores entren en los residuos.

En el segundo caso el resto nunca será cero. En el primero y tercer caso es muy fácil que no se llegue á un resto que sea igual á cero, aunque el dividendo es un múltiplo del divisor; pero si la suma

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots t_n$$

es la misma que la que se busca, aunque los singulares términos sean otros, el resto será cero y la division llegará al fin.

En todo caso, cuando el resto no es cero, se debe añadir al cociente encontrado el mismo resto dividido por el ivisor.

Daremos un ejemplo de division, en la cual el dividendo no es un múltiplo del divisor.

§. 26.

Division infinita.

Ejecutar la division $p:(a-x)$.

$$p:(a-x) = \frac{p}{a} + \frac{p}{a} \cdot \frac{x}{a} + \frac{p}{a} \cdot \frac{x^2}{a^2} + \frac{p}{a} \cdot \frac{x^3}{a^3} + \ldots + \frac{p}{a} \cdot \frac{x^n}{a^n} + \frac{\frac{p}{a} \cdot \frac{x^{n+1}}{a^n}}{a-x}$$

$$p - \frac{p}{a} \cdot x$$
$$- \quad +$$

$$+\frac{p}{a} \cdot x$$
$$+\frac{p}{a} \cdot x - \frac{p}{a} \cdot \frac{x^2}{a}$$
$$- \quad +$$

$$+\frac{p}{a} \cdot \frac{x^2}{a}$$
$$+\frac{p}{a} \cdot \frac{x^2}{a} - \frac{p}{a} \cdot \frac{x^3}{a^2}$$
$$- \quad +$$

$$+\frac{p}{a} \cdot \frac{x^3}{a^2}$$
$$+\frac{p}{a} \cdot \frac{x^3}{a^2} - \frac{p}{a} \cdot \frac{x^4}{a^3}$$
$$- \quad +$$

$$+\frac{p}{a} \cdot \frac{x^4}{a^3} \qquad \&a.$$

Sin continuar la division mas adelante, se ve que cada termino del cociente se halla multiplicando el precedente por $\frac{x}{a}$. Despues de haber encontrado n+1 términos del cociente, el resto completo de la division será

$$+\frac{\frac{p}{a}\cdot\frac{x^{n+1}}{a^n}}{a-x}=+\frac{p}{a-x}\cdot\frac{x^{n+1}}{a^{n+1}}$$

Este se disminuye continuamente, si $x<a$; pero se aumenta sin fin, si $x>a$. En el primer caso el resto puede despreciarse, despues de haber formado un número bastante grande de términos del cociente, y escribiendo

$$\frac{p}{a-x}=\frac{p}{a}+\frac{p}{a}\cdot\frac{x}{a}+\frac{p}{a}\cdot\frac{x^2}{a^2}+\frac{p}{a}\cdot\frac{x^3}{a^3}+\ldots\ldots \qquad (m)$$

se quiere decir, que la suma de los términos á la derecha se aproxima tanto mas á la fraccion que está á la izquierda, cuanto mayor es el número de ellos. Sin embargo, puede formarse una infinidad de términos á la derecha, sin encontrar jamás completamente el valor exacto de $\frac{p}{a-x}$.

En el segundo caso, si $x>a$, el resto nunca puede despreciarse, y por consiguiente la ecuacion (m) empleada para esta condicion, será falsa.

Esplicacion. *Una continuacion de términos, como arriba en el cociente* (m), *que se derivan unos de otros segun una ley determinada, se llama una* serie. *Se distinguen las series en series* finitas é infinitas, *segun el número de los términos.*

Una serie *infinita* se llama *convergente*, cuando existe un *límite cierto*, á que se aproxima indefinidamente la suma de sus términos tanto mas, cuanto mayor es el número de ellos; cuyo límite se llama entónces *suma* de la serie.

Para la condicion $x<a$, la serie infinita (m) es convergente, siendo $\frac{p}{a-x}$ su límite y por consiguiente la suma de ella.

Cuando la suma de un número cualquiera de términos consecutivos de la serie no converge hácia algun límite fijo, se dice que la serie es *divergente*. Tal es la misma serie (m) para la condicion $x>a$.

Cuando procede una serie por division, es muy fácil formar un verdadero juicio sobre la convergencia ó la divergencia de la misma. Bastará observar el resto completo de la division: cuando él decrece indefinidamente hácia el límite cero, la serie será convergente, y de otra manera, en todo caso, la serie será divergente.

ARTICULO V.

Del cero y de los números infinitamente pequeños y grandes.

§. 27.

Teoremas sobre cero é infinito.

1.° Cero puede encontrarse en un cálculo de tres maneras distintas:

1) Como *resultado* no procederá de otro modo sino como el valor de una diferencia, cuyo sustraendo es igual al minuendo: $a-a=o$, $b-b=o$, $3x^2-3x^2=o$.

2) Una ú otra de las cantidades dadas para hacer un cálculo, podrá *ponerse igual á cero,* lo cual no es otra cosa que querer que una ú otra cantidad no deba *existir.*

3) Se usa cero como *límite* de una cantidad que por division ó sustraccion repetida toma valores cada vez menores, sin que desaparezca enteramente.

2° Un número susceptible de valores, que son menores que toda cantidad asignable, se dice *infinitamente pequeño.* El límite hácia el cual tiende tal número es cero.

3.° Un número susceptible de valores, que son mayores que toda cantidad asignable, se dice *infinitamente grande.* No hay límite cierto hácia el cual tiende tal número; sin embargo se dice su límite *el infinito* y se designa por el símbolo ∞.

Teoremas sobre cero é infinito.

1.° El valor de un número no padece alteracion, cuando cero se suma con él ó se resta del mismo. Es evidente.

2.° Un producto es cero, si uno de los factores es cero.

$$o.a=o\ ; \qquad a.o=o$$

Dem. 1ª $\quad o.a=(b-b)\,a=b\,a-b\,a=o$

$$a.o=a\,(b-b)=a\,b-a\,b=o$$

Dem. 2ª por medio de la definicion.

a) Si o es multiplicando. Tenemos

$$a=1+1+1+1 \ldots\ldots\ldots a \text{ veces; luego}$$
$$o.a=o+o+o+o \ldots\ldots\ldots a \text{ veces}=o.$$

Suponiendo que *a* sea una fraccion, cero, es decir, la nada, primeramente ha de dividirse, lo que dará nada y por consiguiente el mismo resultado.

β) Si o es multiplicador. Se forma o de la unidad entera y absoluta, poniendo la unidad *b* veces, como sumando, y *b* veces como sustraendo, o=b—b. Luego para formar el producto a.o, se pondrá *a*, *b* veces por sumando y *b* veces por sustraendo.

$$\left.\begin{array}{l} a.o=a+a+a+\ldots\ldots b \text{ veces} \\ \quad -a-a-a-\ldots\ldots b \text{ veces} \end{array}\right\} =o$$

3.° Un cociente es cero, si el dividendo es cero y el divisor un número distinto de cero.

$$\frac{o}{a}=o$$

Dem. 1ª La division es la inversion de la multiplicacion; dado el producto y uno de los factores, se busca el otro factor. Siendo por tanto el dividendo *o* un producto y *a* uno de los factores, es preciso ser el otro factor o, porque o=a.o.

Dem. 2ª $\frac{o}{a}=\frac{b-b}{a}=\frac{b}{a}-\frac{b}{a}=o$

4.° Un cociente tiene un valor *indeterminado*, si el dividendo y el divisor son cero.

$$\frac{o}{o}=a \;;\; \frac{o}{o}=b \;;\; \frac{o}{o}=c$$

Dem. Tenemos a.o=o, b.c=o, c.c=o y por consiguiente $a=\frac{o}{o}$, $b=\frac{o}{o}$, $c=\frac{o}{o}$.

El signo $\frac{o}{o}$ se dice *símbolo de indeterminacion*. Pero esta indeterminacion supone, que el modo, por el que el cociente $\frac{o}{o}$ se ha formado, sea incógnito; si dicho modo es conocido, la indeterminacion desparece. Si tenemos el producto a.o=o, el cociente $\frac{o}{o}$ será =a, y no será =b, ó =c. Así tambien para a=b tendremos

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{0}{0}$$

Pero se sabe, que

$$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)$$

y dividir a^2-b^2 por $a-b$ no es otra cosa que buscar el otro factor $a+b$. Por consiguiente, el resultado será $a+b=2a$. En tal caso, frecuentemente se halla el verdadero valor de una fraccion, dividiendo el numerador y el denominador por el factor comun. Así para $a=b$ es:

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=\frac{0}{0}=\frac{(a^2+b^2)\,(a^2-b^2)}{a-b}=(a^2+b^2)\,(a+b)=4\,a^3$$

5º Un cociente es infinitamente grande si el divisor es infinitamente pequeño y el dividendo distinto de cero.

$$\frac{a}{0}=\infty$$

Dem. Poniendo $a=\delta\,.\,\omega$, el factor ω se aumentará si δ se disminuye, y δ ha de ponerse tanto mas y sin limite ninguno por sumando, cuanto menor es su valor,

$$a=\frac{a}{10}\,.\,10=\frac{a}{100}\,.\,100=\frac{a}{1000}\,.\,1000 \quad \&a.$$

La ecuacion $\frac{a}{0}=\infty$ se enuncia tambien de esta manera: un cociente puede hacerse mayor que toda cantidad asignable, si el divisor se hace bastantemente pequeño.

6º Un cociente es infinitamente pequeño, si el divisor es infinitamente grande y el divisor distinto de infinito.

$$\frac{a}{\infty}=0$$

Demostracion la misma.

La ecuacion $\frac{a}{\infty}=0$, se enuncia tambien: un cociente puede hacerse menor que toda cantidad asignable, si el divisor se hace bastantemente grande.

Siendo $a=0\,.\,\infty$ y tambien $b=0\,.\,\infty$, $c=0\,.\,\infty$, se ve que la espresion $0\,.\,\infty$ es asimismo un símbolo de indeterminacion.

7º Un cociente es infinitamente grande, si el dividendo es infinitamente grande y el divisor distinto del infinito.

$$\frac{\infty}{a}=\infty$$

DEM. Como $\frac{1}{n}$ es un número distinto de cero, el producto $\infty \cdot \frac{1}{n} = \frac{\infty}{n}$ será un número infinitamente grande. La ecuacion $\frac{\infty}{n} = \infty$ se enuncia tambien: un cociente puede hacerse mayor que toda cantidad asignable, si el dividendo se hace bastantemente grande.

8º Una potencia, cuyo esponente es cero, equivale á la unidad.

$$a^0=1$$

DEM. Tenemos (teor. 21)

$$a^0=a^{m-m}=a^m : a^m=1$$

9º Una potencia, cuyo esponente es un número infinitamente grande, es 1) un número infinitamente grande, si la base es mayor que la unidad; 2) es un número infinitamente pequeño, si la base es menor que la unidad; y 3) equivale á la unidad, si la base es la unidad.

$$a^\infty=\infty \text{ para } a>1 \ ; \quad a^\infty=0 \text{ para } a<1;$$

$$a^\infty=1 \quad \text{para } a=1$$

DEM. Por division se hallará

$$\frac{a^n-1}{a-1}=a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}\ldots\ldots+a^3+a^2+a+1 \ (\alpha)$$

La division finalmente tiene un resto $=0$, y por consiguiente el segundo miembro de la ecuacion es el cociente completo y tiene n términos. Suponiendo $a>1$, cada uno de los términos del cociente, fuera del último, será >1. Porque si $a>1$, será tambien $a.a>1.a$ ó $a^2>a$, y $a^2.a>a.a$ ó $a^3>a^2$, y $a^3.a>a^2.a$ ó $a^4>a^3$ &a. en general

$$\ldots\ldots a^6>a^5>a^4>a^3>a^2>a>1$$

Luego, sustituyendo 1 en lugar de las diversas potencias que se encuentran á la derecha de (α), el resultado será menor que el de la division, y como la unidad entónces se encuentra allí n veces, siendo pues n términos, tendremos:

$$\frac{a^n-1}{a-1}>n \qquad \text{de donde}$$

$$a^n>1+n\,(a-1)$$

Si n crece indefinidamente, crecerá tambien $n(a-1)$ y podrá tener valores que son mayores que toda cantidad asignable. Luego $a^n = \infty$ para $n = \infty$.

Si $a=1$, será $a^{\infty} = 1^{\infty} = 1.1.1.1\ldots\ldots = 1$

Suponiendo $a < 1$, podrá ponerse $a = \frac{1}{a'}$, y será $a' > 1$; luego $a'^{\infty} = \infty$ y

$$a^{\infty} = \frac{1}{a'} \cdot \frac{1}{a'} \cdot \frac{1}{a'} \ldots\ldots = \frac{1}{a'^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Escolio. Para el valor $a=1$, la ecuacion (α) dará

$$\frac{0}{0} = 1+1+1+\ldots\ldots n \text{ veces} = n$$

Como el primer miembro de la misma ecuacion puede tomar las varias formas

$$\frac{a^n-1}{a-1};\ \frac{1}{a-1}.(a^n-1);\ \frac{a^n}{a-1} - \frac{1}{a-1};\ \frac{\frac{1}{a-1}}{\frac{1}{a^n-1}}$$

suponiendo $a=1$, ellas se convertirán en

$$\frac{0}{0};\ \infty.0;\quad \infty - \infty;\ \frac{\infty}{\infty}$$

Por consiguiente, todas serán símbolos de la indeterminacion, y para el caso supuesto, el valor actual de ellas será n.

ARTICULO VI.

Medida de los números.

§. 28.

Esplicaciones.

1.° *Un número entero se llama* divisible, *ó se dice simplemente que se divide por otro número, si la division es exacta, es decir, si la division sucede sin residuo y el cociente real es un* número entero.

Del mismo modo, *un polinómio se llama* divisible *por otro polinómio (ó monómio) si la division es exacta, es decir, si la division sucede sin residuo, y el cociente real es* un monómio ó polinómio finito.

Así

32 es divisible por 4, porque $32:4=8$, que es un número entero.

a^2-b^2 es divisible por $a+b$, porque $(a^2-b^2):(a+b)=a-b$ cuya espresion es un polinómio finito.

2.° *Los números que son divisibles por* 2, se llaman números pares, *y todos los que no son divisibles por* 2, *se llaman* números impares.

Números pares son 2, 4, 6, 8, 10, 12. . . .

Números impares son 3, 5, 7, 9, 11, 13. . . .

En general, si designamos por n un número entero, los números pares tendrán la forma $2n$, y los números impares la forma $2n+1$.

3.° *Un número entero (ó polinómio) que divide á otro sin resto, se dice* divisor ó medida *del otro.*

9 es divisor ó medida de 27

$a+b$ es divisor ó medida de a^4-b^4

porque la division de 27 por 9 y de a^4-b^4 por $a+b$ procede sin resto.

4.° *Un número entero (ó polinómio) que es divisible por otro, se llama* un múltiplo ó un dividuo *del otro.* Así en los ejemplos de arriba, 27 es un múltiplo de 9, y a^4-b^4 un múltiplo de $a+b$.

Nota. Un polinómio *se llama entero*, si no contiene quebrados ó cocientes ningunos; por la razon opuesta, un polinómio que contiene denominadores, *se llama fraccionario.* Así

$a^2+2ab+b^2$ es un polinómio entero;

$a^3+\frac{2}{5}ab^2+\frac{b}{a}$ es un polinómio fraccionario.

En todo este artículo, con el nombre de números solo entenderemos números enteros ó polinómios (y monómios) enteros.

5.° Todo número tiene por medida á la unidad y á sí mismo, es decir, cada número es divisible por la unidad y por sí mismo. Los números que no tienen por medida sino á la unidad y á sí mismos, *se llaman números primos absolutos ó factores simples.* Por el contrario, todos los números que tienen por medida tambien algun otro número, *se llaman números ó factores compuestos*, Los factores simples que son factores de los números compuestos, se llaman tambien *factores primos de los mismos.*

Son números primos absolutos: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. . . .

Son números compuestos: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15. . . .

Los factores primos de 210 son 2, 3, 5 y 7.

6.° Un número que divide á otros dos ó mas, *se llama comun divisor ó medida de estos.* Si dicho número es el máximo que los divide, *se llama máximo comun divisor, ó máxima comun medida de los mismos.*

4 es comun divisor de 36, 48, 72; y
12 es el máximo comun divisor de 36, 48, 72.

7.° Un número que es divisible por otros dos ó mas, *se llama comun múltiplo ó dividuo de estos;* y si dicho número es el mínimo, que es divisible por todos ellos, él *se llama mínimo comun múltiplo ó dividuo de los mismos.*

360 es comun múltiplo de 2, 3, 5, 6, 15; y
30 es el mínimo comun múltiplo de 2, 3, 5, 6, 15.

8.° Dos números *se llaman primos relativos ó primos entre sí,* si no tienen comun divisor, sino la unidad.

Son primos entre sí: 7 y 18; 8 y 35; 9 y 38.

§ 29.

Teoremas fundamentales sobre la medida de los números.

Teorema 1. Un número que divide á otros dos, divide tambien á la suma y diferencia de los mismos.

Si $\frac{a}{m}=\alpha$, $\frac{b}{m}=\beta$, y α y β son números enteros, será $(a \pm b):m$ un número entero.

Dem. Tenemos:

$$\frac{a \pm b}{m} = \frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \alpha \pm \beta$$

Como α y β son números enteros, serán tambien $\alpha+\beta$ y $\alpha-\beta$ números enteros. Luego el cociente de $a \pm b$ por m es un número entero, es decir, $a+b$ y $a-b$ son divisibles por m.

Teorema 2. Un número que divide á otro, divide tambien cualquier múltiplo del otro.

Si $\frac{a}{m}=\alpha$ es un número entero, será tambien $n\,a:m$ un número entero, suponiendo n entero.

Dem. Tenemos

$$\frac{n \, . \, a}{m} = n \, . \, \frac{a}{m} = n \, . \, \alpha$$

en donde $n \, . \, \alpha$ es un número entero.

TEOREMA 3. Un número que es divisible por otro número compuesto, es tambien divisible por cualquier factor del número compuesto.

Si $a:m=q$ es un número entero y ademas $m=\alpha.\beta$ un número compuesto, serán los cocientes $a:\alpha$ y $a:\beta$ números enteros.

DEM. Tenemos

$$\frac{a}{m}=\frac{a}{\alpha.\beta}=q \text{ ; luego } \frac{a}{\alpha}=\beta.q \text{ y } \frac{a}{\beta}=\alpha.q$$

Como α, β, q son números enteros, son tambien $\beta.q$ y $\alpha.q$ números enteros.

TEOREMA 4. Un número que es divisible por dos ó mas números primos absolutos ó relativos, es tambien divisible por el producto de los mismos.

Si $a:m=\alpha$, $a:m'=\beta$, en donde m y m' son números primos absolutos ó relativos, y ademas si α y β son números enteros, será el cociente $a:m\,m'$ un número entero.

DEM. Tenemos

$$a:m=\alpha, \text{ luego } a=m\alpha \text{ y } \frac{a}{m'}=\frac{m\,\alpha}{m'} \qquad (1)$$

Pero $\frac{a}{m'}=\beta$ es un número entero; luego será $\frac{m\,\alpha}{m'}$ entero es decir, m' divide sin resto al producto $m\,\alpha$. Pero no divide á m, porque m y m' son primos entre sí; luego m' dividirá á α y el cociente $\frac{\alpha}{m'}=q$ será un número entero.

Sustituyendo este valor $\frac{\alpha}{m'}=q$ en la ecuacion (1), hallaremos $\frac{a}{m'}=m.q$, luego $\frac{a}{m.m'}=q$ es un número entero.

Si tenemos tres divisores m, m', m'', que son primos entre sí, pondremos $m.m'=\mu$, y será $m.m'.m''=\mu.m''$ en donde μ y m'' son primos entre sí. Como a se divide por m y m', a se dividirá tambien por μ; y como a se divide por μ y m'', a se dividirá tambien por $\mu.m''$, es decir, por $m.m'.m''$.

Del igual modo demostraremos el teorema, si hay cuatro, cinco, seis.... en general un número indeterminado de divisores, m, m', m'', m''' ....

§. 30.

Divisibilidad de los números enteros por 2, 3, 5, 9, 11.

1º Un número es divisible por 2, si termina en cero ó cifra par.

DEM. Designando por N un número entero y por a, b, c, d.... las cifras que tienen los lugares de las unidades, decenas, centenas, millares.... será

$$N = \ldots 10000\,e + 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$$

$$N:2 = \ldots\ 5000\,e + 500\,d + 50\,c + 5\,b + \frac{a}{2}$$

Luego si a es cero ó un número par, N se dividirá por 2.

2º. Un número es divisible por 4, si las dos últimas cifras, considerándolas como un número, son divisibles por 4.

DEM. $$N = \ldots 10000\,e + 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$$

$$N:4 = \ldots\ 2500\,e + 250\,d + 25\,c + \frac{10b + a}{4}$$

Luego N será divisible por 4, si $10\,b + a$ es divisible por 4.

3º Un número es divisible por 8, si las tres últimas cifras, considerándolas como un número, son divisibles por 8.

DEM. $$N = \ldots 10000\,e + 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$$

$$N:8 = \ldots\ 1250\,e + 125\,d + \frac{100\,c + 10\,b + a}{8}$$

Luego N será divisible por 8, si $100\,c + 10\,b + a$ es divisible por 8.

4º Un número es divisible por 3 ó 9, si la suma de las cifras es divisible por 3 ó 9.

DEM. $$N = \ldots 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$$

$$= \ldots\ 999\,d + 99\,c + 9\,b + \ldots + d + c + b + a$$

$$N:3 = \ldots\ 333\,d + 33\,c + 3\,b + \frac{\ldots + d + c + b + a}{3}$$

$$N:9 = \ldots\ 111\,d + 11\,c + b + \frac{\ldots + d + c + b + a}{9}$$

Luego N será divisible por 3 ó 9, si la suma de las cifras $\ldots + d + c + b + a$ es divisible por 3 ó 9.

Corolario. Un número es divisible qor 6, si termina en cero ó cifra par, y si ademas la suma de las cifras es divisible por 3.

5º Un número es divisible por 5, si termina en cero ó 5.

$$\text{Dem. } N = \ldots 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$$

$$N:5 = \ldots\ 200\,d + 20\,c + 2\,b + \frac{a}{5}$$

Luego N será divisible por 5, si *a* es cero ó 5.

Corolario. Un número es divisible por 10, si termina en cero.

6º Un número es divisible por 11, si la suma de las cifras de los lugares impares, ménos la suma de las cifras de los lugares pares, es divisible por 11.

$$\begin{aligned}
\text{Dem. } N &= \ldots + 10000\,e + 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a \\
&= \ldots + 9999\,e + 1001\,d + 99\,c + 11\,b + a \\
&\qquad\quad + e \qquad - d \qquad + c \quad - b \\
&= \ldots + 9999\,e + 1001\,d + 99\,c + 11\,b \\
&\qquad + (\ldots\,e + c + a) - (\ldots + d + b) \\
N:11 &= \ldots + 909\,e + 91\,d + 9\,c + b \\
&\qquad + \frac{(\ldots + e + a) - (\ldots + d + b)}{11}
\end{aligned}$$

Las cifras a, c....están en los lugares impares, y las cifras b, d....en los lugares pares; luego......

§. 31.

Máximo comun divisor.

Regla I. *Para hallar el máximo comun divisor de dos ó mas números, todos los números dados se descomponen en sus factores primos, y se multiplican entre sí todas las mínimas potencias de los mismos, que son comunes á todos los números dados.*

Ejemplo I. Buscar el máximo comun divisor de 320, 400, 680, 3400. Tenemos:

$$320 = 2^6 . 5$$
$$400 = 2^4 . 5^2$$
$$680 = 2^3 . 5 . 17$$
$$3400 = 2^3 . 5^2 . 17$$

Las potencias de los factores primos, que son comunes á todos estos números, son 2^3 y 5^1; luego el máximo comun divisor es $2^3 . 5 = 40$.

Ejemplo II. Buscar el máximo comun divisor de

$$2\,a^2+4\,a\,b+2\,b^2\;;\quad 10\,a^2-10\,b^2\;;\quad 4\,a^4-4\,b^4$$

Tenemos

$$2\,a^2+4\,a\,b+2\,b^2=2\,(a+b)^2$$
$$10\,a^2-10\,b^2=2.5\,(a+b)\,(a-b)$$
$$4\,a^4-4\,b^4=2^2.(a^2+b^2)\,(a+b)\,(a-b)$$

No son comunes sino las primeras potencias de 2 y de $a+b$, luego $2\,(a+b)$ es el máximo comun divisor.

Dem. El máximo comun divisor necesariamente es 1) factor comun de todos los números dados, luego no contiene sino las mínimas potencias de los factores primos que son *comunes* á todos; 2) contiene *todos* los que son comunes; en el caso opuesto no seria el *máximo* comun divisor.

Esta regla I puede emplearse frecuentemente, es decir, cuando los factores primos de los números dados son conocidos (por el § precedente.) Pero la misma regla no basta para todos los casos posibles.

Regla II. *Para hallar el máximo comun divisor de dos números, se divide el mayor número por el menor, el menor por el resto encontrado, y así cada vez el divisor precedente por el último resto encontrado, hasta que se llegue á un resto cero: el último divisor será el máximo comun divisor buscado.*

Así el máximo comun divisor de 5249 y 1595 es 29, el que se hallará por el modo de proceder como se sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \overset{3}{\smile} & & \overset{3}{\smile} & & \overset{2}{\smile} & & \overset{3}{\smile} & & \overset{2}{\smile} \\
5249 & : & 1595 & : & 464 & : & 203 & : & 58 & : & 29 \\
4785 & & 1392 & & 406 & & 174 & & 58 & & \\
\hline
464 & & 203 & & 58 & & 29 & & 0 & &
\end{array}$$

En general, para los números a y b el máximo comun divisor se buscará de la misma manera:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \overset{\beta}{\smile} & & \overset{\gamma}{\smile} & & \overset{\delta}{\smile} & & \overset{\varepsilon}{\smile} \\
a & : & b & : & c & : & d & : & e \\
\beta b & & \gamma c & & \delta d & & \varepsilon e & & \\
\hline
c & & d & & e & & o & &
\end{array}$$

designando por c, d, e, o los restos y por β, γ, δ, ε los cocientes succesivos.

Dem. *Primeramente* el último divisor e es un *comun* divisor de a y b, porque tenemos

$$1)\quad d=\varepsilon e$$
$$2)\quad c=\delta d+e$$
$$3)\quad b=\gamma c+d$$
$$4)\quad a=\beta b+c$$

Por 1) e es un divisor de d, luego por 2) de c, luego por 3) de b, luego por 4) de a.

Lo segundo, e es tambien el *máximo comun* divisor de a y b. Porque otro comun divisor de a y b, por ejemplo k, segun 4), y el T. 1, deberia ser contenido en c, luego segun 3) en d, luego segun 2) en e, lo cual no es posible si $k>e$.

Nota 1. De la segunda parte de la demostracion se sigue igualmente, que un comun divisor cualquiera está contenido en el máximo comun divisor.

Nota 2. Si el último divisor que se encuentra por este modo de proceder es 1, los dos números propuestos serán *primos entre sí*, pues no tienen divisor comun sino la unidad.

Del mismo modo se tendrá el máximo comun divisor de dos polinomios.

Ejemplo I. Buscar el máximo comun divisor de

$$3a^3-2a^2-3ab^2+a+2b^2+b^2 \text{ y de } a^2-b^2$$

$$\begin{array}{l|l}
3a^3-2a^2-3ab^2+a+2b^2+b^2 & a^2-b^2= \text{divisor} \\
3a^3 \qquad\quad -3ab^2 & \overline{\qquad\qquad} \\
\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & 3a-2 \\
\quad -2a^2 \qquad\qquad +a+2b^2+b^2 & \\
\quad -2a^2 \qquad\qquad\quad +2b^2 & \\
\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \\
\qquad\qquad\quad +a \qquad +b &
\end{array}$$

$+a \quad +b$, resto, el que se divida al divisor:

$$a^2-b^2 : a+b=a-b \quad \text{sin resto.}$$

Luego el último divisor $a+b$ es el máximo comun divisor buscado.

Para evitar fracciones ó números demasiado grandes, frecuentemente conviene multiplicar ó dividir el divisor ó dividendo por un número que no es comun factor de uno y otro.

Ejemplo II. Buscar el máximo comun divisor de

$$10x^2+14x-12 \quad \text{y de} \quad 7x^2+22x+16$$

No se divide $10x^2$ por $7x^2$ de modo que el cociente sea entero; luego multiplicaremos el primer polinomio por 7, que no es factor del segundo, y tendremos

$$\begin{array}{r|l} 70x^2+98x-84 & 7x^2+22x+16 = \text{prim. divisor} \\ 70x^2+220x+160 & \overline{10} \\ \hline \end{array}$$

$-122x-244$, resto; el qne dividido por -122 es $=x+2$, luego

$$\begin{array}{r|l} 7x^2+22x+6 & x+2 = \text{segundo divisor} \\ 7x^2+14x & \overline{7x+8} \\ \hline +8x+16 & \\ +8x+16 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Luego el último divisor $x+2$ es el máximo comun divisor buscado.

Regla III. *Para hallar el máximo comun divisor de varios números, primeramente se buscará el de dos numeros propuestos; luego el del divisor comun así obtenido y un tercer número; despues el del nuevo divisor comun obtenido y un cuarto número &a: el último máximo comun divisor así determinado será el de todos los números.*

Para los números 588, 336, 112, 35, el máximo comun divisor será 7, segun el siguiente modo de proceder:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{588 \quad 336}_{84} \quad 112}_{28} \quad 35}_{7}$$

en donde el máximo comun divisor de 588 y 336 es 84, el de 84 y 112 es 28, el de 28 y 35 es 7.

En general, si a, b, c, d son los números dados y si el máximo comun divisor de a y b se designa por e, el de e y c por f, el de f y d por g, será g el máximo comun divisor de a, b, c, d:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{a \quad b}_{e} \quad c}_{f} \quad d}_{g}$$

Dem. *Primeramente* g es un *comun* divisor de a, b, c, d; porque segun la suposicion, g está contenido en d y f, y como f está contenido en e y c, estará g contenido en d, c y e; pero como e está contenido en a y b, g tambien estará contenido en d, c, b, y a.

Lo segundo, g es tambien el *máximo comun* divisor de a, b, c, d; porque, conforme á la Nota 1 de arriba, otro divisor comun, por ejemplo k, seria divisor de e, luego tambien de f, luego de g, lo cual no es posible si $k > g$.

§. 32.

Mínimo comun múltiplo.

Regla I. *Para hallar el mínimo comun múltiplo de dos ó mas números, todos los números dados se descomponen en sus factores primos, y se multiplican entre sí las supremas potencias de los mismos.*

Ejemplo I. Dados los números 28, 42, 63, 77, tenemos

$$28=2^2 7$$
$$42=2.3.7$$
$$63=3^2.7$$
$$77=7.11$$

Las supremas potencias de todos los factores primos son, $2^2, 3^2, 7^1, 11^1$; luego

$$2^2.3^2.7.11=2772$$

será el mínimo comun múltiplo de 28, 42, 63, 77.

Ejemplo II. Buscar el mínimo comun múltiplo de

$$a^2-4b^2\ ;\ a^2+4ab+4b^2;\quad 2a+4b$$

Tenemos

$$a^2-4b^2=(a+2b)(a-2b)$$
$$a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2$$
$$2a+4b=2(a+2b)$$

Las supremas potencias de todos los factores primos son

$$(a+2b)^2;\ a-2b;\ 2$$

luego el mínimo comun múltiplo será

$$2(a+2b)^2(a-2b)$$

Dem. El número así determinado es 1) un *múltiplo* de todos los números propuestos, pues contiene todos los factores primos de cada uno y estos en la suprema potencia que se encuentra, de modo que cada uno de los números dados está contenido en el producto así formado; 2 es el *mínimo* comun múltiplo; pues si se toma una poten cia de cualquier factor primo que sea menor que la suprema, uno ú otro de los números dados no seria contenido en el múltiplo formado.

Esta regla puede emplearse frecuentemente, es decir, si los factores primos son conocidos; pero la misma regla no es aplicable á todos los casos posibles.

REGLA II. *Para determinar el mínimo comun múltiplo de dos números, se buscará el máximo comun divisor de los mismos y dividiendo por él á uno de los números dados, se multiplicará el cociente encontrado por el otro número.*

Así para los números 1488 y 2064 el máximo comun divisor es 48, luego el mínimo comun múltiplo será

$$\frac{1488}{48}.2064=\frac{2064}{48}.1488=63984$$

En general, designando por m el máximo comun divisor de a y b, se tendrá el mínimo comun múltiplo

$$\frac{a}{m}.b \quad \text{ó} \quad \frac{b}{m}.a$$

DEM, Si ponemos

$$\frac{a}{m}=\alpha \quad y \quad \frac{b}{m}=\beta \qquad (a)$$

en donde α y β son números enteros, tendremos

$$a=m.\alpha \quad y \quad b=m.\beta \qquad (b)$$

Ademas si designamos cualquier múltiplo de a por v, tendremos en general

$$v=m.\alpha.\beta' \qquad (c)$$

pues $m.\alpha=a$ ha de ser factor de v y el otro factor de v será un número desconocido, pero entero β'. Si v debe ser tambien un múltiplo de b, tendremos del mismo modo

$$v=m.\beta.\alpha' \qquad (d)$$

porque $m.\beta=b$ ha de ser factor de v y el otro factor será un número entero desconocido α'. De las ecuaciones (c) y (d) se saca $m.\alpha.\beta'=m.\beta.\alpha'$, luego

$$\alpha\beta'=\beta\alpha' \quad \text{ó bien} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'} \qquad \text{de donde}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=k\,\alpha' \\ \beta=k\,\beta'\end{array}\right\}\mathrm{I} \quad \text{ó} \quad \left.\begin{array}{l}\alpha'=k\,\alpha \\ \beta'=k\,\beta\end{array}\right\}\mathrm{II}$$

si por k se designa un número entero é incógnito.

La suposicion (I) no es posible, porque segun ella α y β tendrian k por comun factor, lo cual no es posible, pues de las ecuaciones (b) se sigue que α y β son números primos entre sí, teniendo el máximo comun divisor m todos los factores, que son comunes á a y b. Luego queda solamente la segunda suposicion (II), y poniendo $\beta'=k\,\beta$ en la ecuacion (c), se deduce $v=m\ \alpha\ k\ \beta$ ó bien

$$v=\alpha\,\beta\,m.k \qquad (o)$$

en donde k es un número entero. Esta ecuacion da la forma general de todo múltiplo de a y b, y no hay otro. En la parte $\alpha\,\beta\,m$ están contenidos $\alpha\,m=a$ y $\beta\,m=b$; luego $\alpha\,\beta\,m$ es por sí mismo un múltiplo de a y b. La misma espresion $\alpha\,\beta\,m$ es tambien el mínimo comun múltiplo de a y b; porque el mínimo valor que v puede tener en (e), se hallará si el número k es el mínimo, es decir, si $k=1$.

Pero segun (a) y (b) es

$$\alpha\,\beta\,m=\frac{a}{m}.b=\frac{b}{m}.a$$

Luego estas espresiones representan el mínimo comun múltiplo de a y b.

Nota. De la ecuacion (e) se infiere tambien: si dos números a y b están contenidos en otro v, que no es el mínimo comun múltiplo de a y b, el mínimo comun múltiplo estará contenido en v.

Del mismo modo se buscará el mínimo comun múltiplo de dos polinómios.

Regla III. *Para hallar el mínimo comun múltiplo de varios números, primeramente se buscará el de dos números, luego el del múltiplo así obtenido y un tercer número, despues el del nuevo múltiplo así encontrado y un cuarto número &a: el último mínimo comun múltiplo así obtenido será el de todos los números.*

Así el mínimo comun múltiplo de 15, 27, 60, 72 será 1080, pues tenemos

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{15 \quad 27}_{135} \quad 60}_{540} \quad 72}_{1080}$$

en donde 135 es el mínimo comun múltiplo de 15 y 27; 540 el do 135 y 60; 1080 el de 540 y 72.

En general, para los números a, b, c, d tendremos el mínimo comun múltiplo z del siguiente modo:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{a \quad b}_{s} \quad c}_{t} \quad d}_{z}$$

designando aquí por s el mínimo comun múltiplo de a y b, por t el de s y c, y por z el de t y d.

DEM. *Primeramente*, z es un *múltiplo* de a, b, c y d. Porque conforme á la suposicion, z es múltiplo de t y d; y como t es múltiplo de s y c, será z múltiplo de s, c y d; y como s es múltiplo de a y b, será z múltiplo de a, b, c y d.

Lo segundo, z es el *mínimo* comun múltiplo de a, b, c y d. Supongamos que haya otro v, que sea menor. Como a y b estarian contenidos en v, segun la nota de arriba, tambien s deberia estar contenido en v; y como s y c estarian contenidos en v, estaria contenido tambien t en v; y como t y d, finalmente z estaria contenido en v. Pero no es posible si $v < z$.

§. 33.

Aplicaciones.

1º SIMPLIFICACION de los quebrados comunes.

REGLA. *Para simplificar un quebrado y para reducirlo á la forma la mas simple que puede tener, se dividirán sus términos por el máximo comun divisor de los mismos.*

EJEMPLO I. La fraccion $\frac{1513}{2492}$ puede simplificarse por 89, porque 89 es el máximo comun divisor del numerador 1513 y del denominador 2492. De donde tenemos

$$\frac{1513}{2492} = \frac{1513:89}{2492:89} = \frac{17}{28}$$

y este resultado á un tiempo, es la forma mas sencilla que la misma fraccion puede tener; pues el máximo comun divisor 89 tiene todos los factores que son comunes á 1513 y 2492.

Ejemplo II. Tenemos de igual modo

$$\frac{8x^3-2x^2-41x+35}{4x^3+12x^2-x-15}=\frac{4x-7}{2x+3}$$

porque el numerador y denominador de la primera fraccion tienen $2x^2+3x-5$ por máximo comun divisor, y simplificando por esta espresion, se hallará la segunda fraccion que equivale á la primera y á un tiempo, es su forma mas sencilla,

Ejemplo III. La fraccion

$$\frac{x^2-10x+21}{x^2-9x+14}$$

para $x=7$, se reduce á la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. ¿Cuál es el valor real de la misma para $x=7$?

Res. El máximo comun divisor del numerador y denominador es $x-7$; por esto tenemos

$$\frac{x^2-10x+21}{x^2-9x+14}=\frac{(x-3)\ (x-7)}{(x-2)\ (x-7)}=\frac{x-3}{x-2}$$

Sustituyendo $x=7$, la primera y la segunda espresion se hacen $=\frac{0}{0}$, y se ve que esto tiene lugar, porque el numerador y denominador tienen un factor comun $x-7$, que se hace $=0$. La tercera espresion da el resultado buscado $=\frac{4}{5}$.

2° Reduccion de quebrados á un mismo denominador.

Regla. *Para reducir varios quebrados que tienen denominadores distintos á un mismo denominador, se buscará el mínimo comun múltiplo de todos los denominadores, el que se dividirá por los denominadores sucesivos, y finalmente se multiplicarán los términos de las fracciones dadas por los cocientes así obtenidos.*

Ejemplo I. Reducir los quebrados

$$\frac{7}{10};\ \frac{3}{8};\ \frac{4}{15};\ \frac{5}{4};\ \frac{11}{12}$$

á un mismo denominador.

El mínimo comun múltiplo de los denominadores

10, 8, 15, 4, 12

es 120; luego dividiendo 120 por estos denominadores se tendrá

12, 15, 8, 30, 10

y multiplicando los términos de las fracciones dadas por estos cocientes, se hallará

$$\frac{7.12}{10.12};\ \frac{3.15}{8.15};\ \frac{4.8}{15.8};\ \frac{5.30}{4.30};\ \frac{11.10}{12.10}\quad \text{ó bien}$$

$$\frac{84}{120};\ \frac{45}{120};\ \frac{32}{120};\ \frac{150}{120};\ \frac{110}{120}$$

Como se ve, bastará multiplicar por dichos cocientes solo los numeradores de las fracciones dadas, dando á todos los productos así encontrados el mínimo comun múltiplo por denominador.

EJEMPLO II. Sumar las fracciones

$$\frac{x-8}{x^2-5x+6}\quad \text{y}\quad \frac{x-2}{x^2-9x+14}$$

El máximo comun divisor de los denominadores es $x-2$; dividiendo por este binomio á los denominadores se hallarán los otros factores de los mismos y se encontrará

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$
$$x^2-9x+14=(x-7)(x-2)$$

Luego el mínimo comun múltiplo de los denominadores es

$$(x-2)(x-3)(x-7)$$

Los cocientes de este por los denominadores son

$$x-7\quad \text{y}\quad x-3$$

Por consiguiente tendremos

$$\frac{(x-8)(x-7)}{(x-2)(x-3)(x-7)}+\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x-7)}$$

ó reduciendo

$$\frac{x^2-20x+62}{x^3-12x^2+41x-42}$$

ARTICULO VII.

De los quebrados:

A. DE LOS QUEBRADOS COMUNES.

§. 34.

Sumario de las reglas principales sobre los quebrados.

Un quebrado ó una fraccion no es sino una especie de cociente, es decir, un cociente que tiene por dividendo y divisor números enteros. Luego la teoría de las fracciones está contenida en el artículo I, que trata de los cocientes, y en el artículo precedente en el cual se ha dicho todo lo que se necesita para reducir los quebrados á una misma denominacion si no la tienen. Luego bastará poner aquí las reglas principales que pertenecen á las operaciones con los quebrados.

ESPLICACIONES. 1º *Un quebrado en que el numerador es menor que el denominador*, vale ménos que la unidad, y por esto *se llama quebrado propio*, como

$$\frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{7}{9},\ \frac{20}{37}$$

2º *Un quebrado en que el numerador es igual ó mayor que el denominador*, vale la unidad ó mas que la unidad, y por esto *se llama quebrado impropio*, como

$$\frac{4}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{4},\ \frac{18}{5}$$

3º *Un número que contiene enteros y ademas un quebrado propio, se llama número mixto*, como

$$4\tfrac{1}{2},\ 3\tfrac{2}{5},\ 6\tfrac{4}{9}$$

Calidades de los quebrados.

1) De dos quebrados que tienen igual denominador, es mayor el que tiene mayor numerador:

$$\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$$

2) De dos quebrados que tienen igual numerador, es mayor el que tiene menor denominador:

$$\frac{5}{8} > \frac{5}{9}$$

3) Un quebrado no varía de valor, multiplicando sus dos términos por un mismo número:

$$\frac{4}{3} = \frac{4.8}{3.8} = \frac{32}{24}$$

4) Un quebrado no varía de valor, dividiendo sus dos términos por un mismo número:

$$\frac{32}{24} = \frac{32:8}{24:8} = \frac{4}{3}$$

Corolario. Para reducir un quebrado á su espresion mas sencilla, se dividen sus dos términos por el máximo comun divisor de los mismos.

Ejemplo. Redúzcase el quebrado $\frac{1679}{1095}$ á su espresion mas sencilla.

Resol: El máximo comun divisor de los dos términos 1679 y 1095 del quebrado es 73; luego tenemos

$$\frac{1679}{1095} = \frac{1679:73}{1095:73} = \frac{23}{15}$$

y esta espresion $\frac{23}{15}$ es la forma mas sencilla del quebrado; porque el máximo comun divisor tiene todos los factores que pueden ser comunes á los dos términos 1679 y 1095; luego quitándolos por la division en los nuevos términos 23 y 15 no pueden encontrarse factores comunes.

Adicion de los quebrados.

Regla 1ª *Para sumar quebrados que tienen denominadores iguales, se suman los numeradores, y á la suma se le pone por denominador el denominador comun.*

$$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{3+4+1+5}{8} = \frac{13}{8}$$

Regla 2ª *Para sumar quebrados que no tienen denominadores iguales, se buscará primeramente el denominador comun, luego los* *quebrados se reducirán á él, y finalmente se sumarán segun la regla* 1.

Regla 3ª *Para reducir quebrados á un comun denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el cociente que se obtiene, dividiendo el mínimo comun múltiplo de todos los denominadores por el denominador respectivo* (§. 33.)

Sustraccion de los quebrados.

Regla 1. Para restar un quebrado de otro, cuando tienen denominadores iguales, se restan los numeradores, y á la resta se pone por denominador el denominador comun.

Regla 2. Si los quebrados no tienen un denominador comun, re reducen primeramente á él, y luego se restan como se ha dicho en la regla 1ª

Multiplicacion de los quebrados.

Regla 1ª Para multiplicar un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado, se multiplica el numerador por dicho número entero, dejando el mismo denominador; ó se divide el denominador por el entero, permaneciendo igual el numerador.

$$\frac{5}{7}\cdot 3=\frac{5.3}{7}=\frac{15}{7};\qquad \frac{8}{15}\cdot 3=\frac{8}{15:3}=\frac{8}{5}$$

Regla 2ª Para multiplicar un quebrado por otro quebrado, se multiplica el numerador por el numerador y el denominador por el denominador; ó se divide el numerador del primero por el denominador del segundo, y el denominador del primero por el numerador del segundo.

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{8}=\frac{5.7}{3.8}=\frac{35}{24};\qquad \frac{15}{14}\cdot\frac{7}{5}=\frac{15:5}{14:7}=\frac{3}{2}$$

Division de los quebrados.

Regla 1ª Para dividir un quebrado por un entero, se multiplica el denominador por el entero, dejando el mismo numerador; ó se divide el numerador por el entero, permaneciendo igual el denominador.

$$\frac{5}{7}:3=\frac{5}{7.3}=\frac{5}{21};\qquad \frac{8}{15}:4=\frac{8:4}{15}=\frac{2}{15}$$

Regla 2ª Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el divisor invertido.

$$3:\frac{5}{7}=3.\frac{7}{5}=\frac{21}{5}$$

Regla 3ª Para dividir un quebrado por otro quebrado, se multiplica el dividendo por el divisor invertido; ó se divide el numerador del primero por el numerador del segundo, y el denominador del primero por el denominador del segundo.

$$\frac{4}{3}:\frac{5}{7}=\frac{4}{3}.\frac{7}{5}=\frac{28}{15}; \quad \frac{25}{12}:\frac{5}{4}=\frac{25:5}{12:4}=\frac{5}{3}$$

B. de los quebrados decimales.

§. 35.

De los quebrados decimales en general.

Esplicaciones. 1.° *Un quebrado que tiene por denominador una potencia de* 10, *se llama quebrado decimal.*

Son quebrados decimales

$$\frac{3}{10}, \frac{7}{100}, \frac{134}{1000}, \frac{7543}{10000}$$

y en general, designando por A y n números enteros, la forma que tiene toda fraccion decimal, será

$$\frac{A}{10^n}$$

2º *Un quebrado decimal se llama propio, si no contiene enteros, ó si el denominador es mayor que el numerador; y se llama impropio, si contiene enteros, ó si el numerador es mayor que el denominador.*

$\frac{37}{100}$ es un quebrado decimal propio.

$\frac{1738}{100}=17\frac{38}{100}$ es un quebrado decimal impropio.

3.° *Un quebrado decimal puede representarse por una suma de otros quebrados decimales, cuyos denominadores son las potencias crecientes de* 10. Así

$$\frac{3075}{10000}=\frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{5}{10000} \qquad (\alpha)$$

De aquí se infiere que los quebrados decimales pueden espresarse de palabra ó por escrito, al modo que los números enteros. Porque una unidad de un término cualquiera á la derecha de (α) contiene diez unidades del término que inmediatamente le sigue

$$\frac{1}{10}=10.\frac{1}{100}\ ;\ \frac{1}{100}=10.\frac{1}{1000}\ ;\ \frac{1}{1000}=10.\frac{1}{10000}$$

lo mismo que observamos en un número entero cualquiera. Dado por ejemplo el número entero 5836, tenemos

$$5836=5.1000+8.100+3.10+6.1 \qquad (\beta)$$

A la derecha de la ecuacion (β), una unidad de un término cualquiera contiene diez unidades del término inmediato.

$$1.1000=10.100\ ;\ 1.100=10.10\ ;\ 1.10=10.1$$

Las potencias de 10, que son verdaderamente factores de los números 5, 8, 3 no se escriben, designándolas suficientemente por *el valor local de las cifras*. Luego, de semejante modo, los denominadores 10, 100, 1000, 10000, que están á la derecha de (α), podrán omitirse, dando á los numeradores 3, 0, 7, 5 *un valor local correspondiente*. Para hacerlo, estos se ponen como en los números enteros, unos en pos de otros, sin interposicion de signo alguno en el órden que tienen, designando el lugar de las unidades enteras por cero y una coma, que las separa de las décimas: j

$$\frac{3075}{10000}=0,3075$$

Si se quiere escribir la suma de los números 5836 y $\frac{3075}{10000}$, podremos efectuarlo del modo siguiente:

$$5836+\frac{3075}{10000}=5836,3075$$

El número 5836 que está delante de la coma, designará los enteros que tenemos, y el número 3075, que está despues de la coma, designará el quebrado decimal propio que ha de escribirse. En todo este nuevo número

5836,3075

una unidad de un lugar ú órden cualquiera contiene diez unidades del lugar ú órden inferior inmediato, pues tenemos, cinco mil, ocho centenas, tres decenas, seis unidades, tres décimas, ninguna centésima, siete milésimas, cinco diezmilésimas. Luego:

4.° *Para escribir los quebrados decimales, se señala el lugar de las unidades por una coma despues de él y se coloca la cifra que representa las* décimas *en el primer lugar á la derecha de las unidades ó de la coma, la que designa* centésimas *en el segundo, la que* milésimas *en el tercero* &a.

El cero sirve lo mismo que en los enteros, para designar la falta de una unidad de cualquier órden, de modo que 5 centésimas y 8 diezmilésimas, se escriben: 0,0508.

5.° *Los quebrados decimales pueden leerse como si fueran números enteros, espresando al fin el órden decimal á que corresponde la última cifra.*

El quebrado decimal 73,506 se lee: setenta y tres mil quinientas seis milésimas. Puede leerse tambien: setenta y tres enteros y quinientas seis milésimas; ó finalmente: setenta y tres enteros, cinco, cero, seis, enumerando solo las cifras que están á la derecha de la coma decimal.

§ 36.

Calidades principales de los quebrados decimales.

1.° Un quebrado decimal no varía de valor, poniendo ó quitando ceros á continuacion de las cifras significativas. Así tenemos

$$85{,}43=85{,}430000$$

2.° El valor de un quebrado decimal se hace 10, 100, 1000, 10000.....veces mayor, si la coma decimal se pone 1, 2, 3, 4.... lugares á la derecha:

$$8723{,}5=10\times 872{,}35=100\times 87{,}235=1000\times 8{,}7235$$

3.° El valor de un quebrado decimal se hace 10, 100, 1000, 10000.....veces menor, si la coma decimal se pone 1, 2, 3, 4.... lugares á la izquierda:

$$0{,}0025=\frac{1}{10}\times 0{,}025=\frac{1}{100}\times 0{,}25=\frac{1}{1000}\times 2{,}5$$

§. 37.

Adicion y sustraccion de los quebrados decimales.

REGLA I. *La adicion de los quebrados decimales se efectúa colocando los sumandos unos debajo de otros, de manera que las comas estén en columna, y sumando, como en los enteros, las unidades de un mismo órden, principiando por el inferior, y la coma se escribe en la suma bajo de las comas que están en los sumandos.*

Por ejemplo:

325,3084	=	325,3084
47,38	=	47,3800
13,523	=	13,5230
0,9513	=	0,9513
387,1627		387,1627

Para no equivocarse se ponen ceros en los lugares últimos de los sumandos si no tienen unidades.

DEM. En una misma columna no están sino fracciones de la misma denominacion, se suman los numeradores, dejando él mismo el denominador comun.

REGLA II. *La sustraccion de dos quebrados decimales se efectúa, colocando el sustraendo debajo del minuendo, de manera que las comas estén en columna, y restando, como en los enteros, las unidades de un mismo órden, principiando por el inferior y la coma se escribe en el resto bajo de las otras comas.*

Por ejemplo:

23,074	9,0000	18,2300
9,600	2,3857	7,5438
13,474	6,6143	10,6862

Para no equivocarse se ponen ceros en los lugares últimos del minuendo y sustraendo si no tienen unidades.

DEM. En una misma columna están fracciones de la misma denominacion, se resta el numerador del sustraendo del numerador del minuendo, dejando él mismo el denominador comun.

§, 38.

Multiplicacion de los quebrados decimales.

REGLA I. *Para multiplicar un quebrado decimal por* 10, 100, 1000... *en general por una potencia cualquiera de* 10, *se corre la coma uno, dos, tres... y en general tantos lugares hácia la derecha como ceros hay en la potencia de* 10.

Se deduce inmediatamente del § 36, 2.°

Si no hubiesen bastantes cifras á la derecha de la coma, se suplirán por ceros:

$$8{,}372 \times 10000 = 83720$$

REGLA II. *Para multiplicar un quebrado decimal por un entero ú otro quebrado decimal se prescinde de la coma, se hace la multiplicacion como si fuesen ambos factores números enteros, y luego se separan de derecha á izquierda por la coma decimal tantas cifras como decimales habia en ambos factores juntos.*

Por ejemplo:

1)	3,417 9 ——— 30,753	2)	12,493 0,07 ——— 0,87451
3)	5,79 8,3 ——— 1737 4632 ——— 48,757	4)	0,0687 0,34 ——— 2748 2061 ——— 0,023358

DEM. Designando dos quebrados decimales por

$$\frac{A}{10^m} \text{ y } \frac{B}{10^n}, \text{ tendremos } \frac{A}{10^m} \cdot \frac{B}{10^n} = \frac{A\,B}{10^{m+n}}$$

Luego se multiplican los numeradores A y B, que son los mismos quebrados decimales, si se prescinde de las comas, y se divide por 10^{m+m}, es decir, se separan de derecha á izquierda por la coma decimal m+n cifras, luego tantas decimales cuantos tienen los factores juntos.

Si ponemos n=o, tendremos $\frac{B}{10^n}=B$ que es entero,

y el resultado de arriba se convierte en el siguiente:

$$\frac{A}{10^m} \cdot B=\frac{A.B}{10^m}$$

§. 39.

Division de los quebrados decimales.

REGLA I. *Para dividir un quebrado decimal por* 10, 100, 1000.... *y en general por una potencia cualquiera de* 10, *se corre la coma uno, dos, tres.... y en general tantos lugares hácia la izquierda, como ceros están contenidos en la potencia de* 10.

Se infiere inmediatamente del § 36, 3.°

Si no hubiese bastantes cifras á la izquierda de la coma, se suplirán por ceros:

$$8{,}97:1000=0{,}00897$$

REGLA II. *Para dividir un quebrado decimal* por un entero que es menor que el dividendo, *se ejecuta la division como si el dividendo fuese tambien entero; pero tan luego como la primera cifra decimal forma parte de un dividendo parcial, se pone coma en el cociente, ántes de ejecutar la division siguiente.*

Por ejemplo:

```
328,7625:25=13,1505
25
——
 78
 75
 ——
  37 se pone la coma
  25
  ———
  126
  125
  ———
    125
    125
    ———
      0
```

Dem. 25 está contenido en 32 decenas diez veces, luego se escribe por cociente 1 en el lugar de las decenas. El resto siguiente, 78 unidades, contiene 25 tres veces, luego se escribe por cociente 3 en el lugar de las unidades. El resto siguiente 37 décimas no contiene 25, porque $\frac{37}{10} < 25$; luego se pone coma en el cociente. Si el resto 37 fuese entero, contendria 25 una vez; pero como significa $\frac{37}{10}$ el cociente será $\frac{1}{10}$, y se pone 1 en el cociente, en el lugar de las décimas. El resto siguiente 126, si fuese entero, contendria 25 cinco veces; pero como significa $\frac{126}{100}$, el cociente será $\frac{5}{100}$, luego se pone 5 en el cociente en el lugar de las centésimas &a.

Corolario. Añadiendo una coma decimal y ceros á la continuacion de un número entero, este toma la forma de un quebrado decimal. De donde se infiere que cada division de enteros por enteros puede efectuarse del mismo modo, y que cada division indicada de enteros por enteros se puede convertir en el cociente real.

Por ejemplo:

$$
\begin{array}{l}
49:15=49{,}0000:15=3{,}266\ldots \\
\quad 45 \\
\quad \overline{40} \\
\quad 30 \\
\quad \overline{100} \\
\quad 90 \\
\quad \overline{100} \\
\quad 90 \\
\quad \overline{100}
\end{array}
$$

Regla III. *Para dividir un quebrado decimal por* un entero que es mayor que el dividendo, *se pone en el cociente cero y coma, y despues de esta, tantos ceros ménos uno, como cifras decimales se necesite tomar abajo, para hallar el primer dividendo conveniente.*

Por ejemplo:

1) 3,27:48=0,068125

288

390
384

60
48

120
96

240
240

0

2) 0,0058:22=0,0002636...

44

140
132

80
66

140
132

80

Dem. La misma que la de la regla precedente.

Corolario. Del mismo modo puede efectuarse cada division de un entero por otro entero, si el dividendo es menor que el divisor.

8:125=8,000:125=0,064

750

500
500

0

Regla IV. *Para dividir un número entero ó un quebrado decimal por otro quebrado decimal, se multiplican ambos por tal potencia de 10, que el divisor se haga número entero, y luego se divide conforme á las dos reglas precedentes.*

Por ejemplo:

1) 13:0,46=1300:46=28,36...

92

380
368

120
92

280
276

40

2) $24{,}9:3{,}793=24900:3793=6{,}564\ldots$

```
22758
-----
 21420
 18965
 -----
  24550
  22758
  -----
   17920
   15172
   -----
    27480
```

Dem. Un cociente no cambia de valor, multiplicando el dividendo y el divisor por el mismo número.

§. 40.

Reduccion de quebrados comunes á decimales.

En virtud de los corolarios de la regla II y III del parágrafo precedente, todo quebrado comun puede convertirse en quebrado decimal. A este fin bastará realmente efectuar la division que el quebrado comun indica.

Por ejemplo:

1) $\frac{7}{8}=7{,}0:8=0{,}875$

```
64
--
 60
 56
 --
  40
  40
  --
   0
```

2) $\frac{9}{40}=9{,}0:40=0{,}225$

```
 80
---
100
 80
---
200
200
---
  0
```

3) $\frac{2}{3}=2{,}0:3=0{,}666\ldots$

```
18
--
 20
 18
 --
  20
  18
  --
   20
```

2) $\frac{18}{55}=18{,}0:55=0{,}32727\ldots$

```
165
---
 150
 110
 ---
  400
  385
  ---
   150
   110
   ---
    400
```

En el primero y segundo ejemplo el cociento es exacto, encontrándose un residuo $=0$. En el tercero y cuarto ejemplo el cociente no es exacto y la repeticion de los restos indica quo no lo seria por mucho que se prolongase la operacion.

Si la division es exacta, es decir, si se encuentra un resto cero, el cociente será un quebrado decimal *finito;* si la division no es exacta, es decir, si nunca se encuentra un resto cero, el cociente será un quebrado decimal *infinito.* Pero:

1º La division será exacta y el cociente un quebrado decimal finito, si el quebrado comun, *reducido á su forma mas sencilla,* no contiene en el denominador sino los factores primos 2 y 5.

Dem. Designando un quebrado comun, que está reducido á su forma mas simple, por $\frac{A}{B}$, serán A y B números primos entre sí. Si $B=2^m.5^n$ y $m>n$, tendremos

$$\frac{A}{B}=\frac{A.10^m}{2^m.5^n.10^m}=\frac{A.10^m:2^m.5^n}{10^m}=\frac{A.2^m5^m:2^m5^n}{10^m}$$

$$=\frac{A.5^{m-n}}{10^m}$$

El resultado es un quebrado decimal finito, porque el número de las cifras decimales es m é igual al esponente do la suprema potencia que se encuentra en el denominador B. Pero, si el denominador B tiene otro factor primo quo 2 ó 5, por ejemplo 3, la division nunca será exacta, porque este factor 3 nunca podrá quitarse, ni por A, que es primo relativo, ni por 10^m, que no contiene sino los factores 2 y 5.

Corolario. Por consiguiente los quebrados decimales que representan los quebrados comunes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{5}{32}$ serán finitos y tendrán respectivamente 1, 2, 3, 4, 5 decimales. En el segundo ejemplo de arriba $\frac{9}{40}=0,225$ tenemos 3 decimales; porquo 9 y 40 son primos entre sí y el denominador $40=2^3.5$ tieno 3 por máximo esponente. Del mismo modo $11:1250$ dará 4 decimales, porque $1250=5^4.2$, y realmente $11:1250=0,0088$.

2º La division nunca será exacta y el cociente un quebrado decimal infinito, si el quebrado comun *reducido á su forma mas sencilla,* contiene en el denominador factores que son distintos de 2 y 5.

Dem. Porque estos otros factores no están contenidos ni en el numerador A, ni en 10^m y por consiguiento nunca so quitarán, como hemos visto en la demostracion precedente.

Como el resto es menor que el divisor, á lo ménos de una unidad, es preciso que continuando la division inexacta, los restos se repitan; y repitiéndose los restos se repetirán tambien las cifras del cociente, formando así *períodos* de una, dos ó mas cifras, *tantas á lo mas, como unidades tiene el divisor.*

Esplicacion. Se llama fraccion decimal *periódica* aquella que contiene un número ilimitado de cifras, algunas de las cuales se repiten indefinidamente, como 0,575757... y 0,38276276....

El período se forma por las cifras que se repiten; en el primero de los ejemplos anteriores el período es 57, en el segundo 276.

Las fracciones periódicas se subdividen en *puras* y *mistas*. Se llama fraccion *periódica pura* aquella en que el período principia desde la coma, como 0,333... Se llama fraccion *periódica mista* aquella en que el período no principia desde la coma, como 0,36272727...

Se infiere:

El período tiene á lo mas tantas cifras como unidades ménos una tiene el divisor.

§. 41.

Reduccion de quebrados decimales á comunes.

1° Para reducir un quebrado decimal *finito* á quebrado comun, el quebrado decimal se escribe en forma de un quebrado comun, y luego se simplificará, si es posible.

Por ejemplo:

$$0{,}13=\frac{13}{100}\ ; \qquad 0{,}45=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}\ ; \qquad 19{,}375=19\,\frac{375}{1000}=19\,\frac{3}{8}$$

Corolario. El quebrado comun, reducido á su forma mas simple, no contendrá en el denominador sino los factores 2 y 5

2ª Para reducir un quebrado decimal *periódico puro* á quebrado ordinario, se pone por numerador el período, y por denominador tantos nueves como cifras tiene dicho período.

$$0{,}232323\ \ldots=\frac{23}{99}$$

Dem. Designando el quebrado comun que se busca, por q, de modo que tengamos.

$$q=0{,}232323\ldots$$

y poniendo la coma despues del primer período, hallaremos

$$\begin{array}{rl} 100q= & 23,232323\ldots \\ q= & 0,232323\ldots \\ \hline 99q= & 23 \\ q= & \dfrac{23}{99} \end{array}$$

En general, designando el período por B y el número de las cifras que contiene por n, tendremos

$$q=\frac{B}{10^n}+\frac{B}{10^{2n}}+\frac{B}{10^{3n}}+\frac{B}{10^{4n}}+\ldots$$

$$10^n.q=B+\frac{B}{10^n}+\frac{B}{10^{2n}}+\frac{B}{10^{3n}}+\frac{B}{10^{4n}}+\ldots$$

luego restando la primera ecuacion de la segunda, se tendrá

$$(10^n-1).q=B \qquad \text{de donde}$$

$$q=\frac{B}{10^n-1}$$

El numerador B es el período y el denominador 10^n-1 contiene tantos nueves, como cifras el período.

Corolario. 10^n-1 no contiene los factores primos 2 ó 5; luego la fraccion q, reducida á la forma mas sencilla, no contendrá en el denominador los factores 2 y 5. De donde:

Un quebrado decimal periódico puro se convierte en un quebrado comun, cuyo denominador no tiene los factores primos 2 y 5.

3° Para reducir un quebrado decimal *periódico misto* á quebrado comun, se pone por numerador, la diferencia entre la parte no periódica unida con el primer período y la parte no periódica, y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período, y despues de los nueves tantos ceros como cifras no periódicas haya.

$$0,9646346 3\ldots=\frac{96463-96}{99900}=\frac{96367}{99900}$$

Dem. Tenemos aquí

$$q=0,96463463\ldots.$$

y poniendo la primera vez la coma despues del primer período y la segunda vez ántes del mismo, tendremos:

$$100000q=96463,463\ldots$$
$$100q=\quad 96,463\ldots$$
$$99900q=96463-96\ldots$$
$$q=\frac{96463-96}{99900}$$

En general, si designamos por A la parte no periódica, por m el número de las cifras que tiene; ademas si designamos por B el período y por n el número de las cifras del mismo, tendremos

$$q=\frac{A}{10^m}+\frac{B}{10^{m+n}}+\frac{B}{10^{m+2n}}+\frac{B}{10^{m+3n}}+\ldots$$

$$10^{m+n}q=A.10^n+B+\frac{B}{10^n}+\frac{B}{10^{2n}}+\frac{B}{10^{3n}}+\ldots$$

$$10^m.q=A+\frac{B}{10^n}+\frac{B}{10^{2n}}+\frac{B}{10^{3n}}+\ldots$$

luego restando la última ecuacion de la penúltima, se halla

$$(10^n-1).10^m.q=A.10^n+B-A \qquad \text{de donde}$$

$$q=\frac{(A.10^n+B)-A}{(10^n-1).10^m} \qquad (\alpha)$$

El paréntesis $(A.10^n+B)$ es la parte no periódica unida con el primer período, A es la parte no periódica, (10^n-1) contiene tantos nueves, como cifras el período, y 10^m tantos ceros, como cifras la parte no periódica.

Corolario. La fraccion que está en (α) puede escribirse

$$q=\frac{A\,(10^n-1)+B}{(10^n-1).10^m}\ (\beta); \qquad q=\frac{A.10^n+(B-A)}{(10^n-1).10^m} \qquad (\gamma)$$

El factor (10^n-1) del denominador contiene todos los factores primos que son distintos de 2 y 5. No puede hacerse que todos estos se quiten cuando la fraccion se simplifica. Aunque sea divisible por (10^n-1) el primer término del numerador en (β), no lo es el segundo término B, siendo en general $B<10^n-1$, porque B contiene n cifras y (10^n-1) contiene n nueves. Solo si $B=10^n-1$, la fraccion (β) se simplificará por 10^n-1. Pero si $B=10^n-1$, el período B no contiene sino nueves, es decir, tenemos $B=9$ y $n=1$, y la fraccion decimal tendrá una forma como la siguiente:

$$q=0,369999\ldots$$

la cual se puede convertir en la forma de un quebrado finito

$$q=0,37$$

porque

$$0,36999\ldots=0,36+0,00999\ldots=0,36+\frac{1}{100}.0,9999\ldots$$

$$=0,36+\frac{1}{100}\cdot\frac{9}{9}=0,36+\frac{1}{100}=0,37$$

Luego en la fraccion (β) los factores distintos de 2 y 5 quo contiene el denominador, no todos se quitan, si el quebrado decimal es verdaderamente periódico misto.

Por otra parte, el otro factor 10^m del denominador contiene solo los factores 2 y 5. Y tambien estos no pueden quitarse todos, simplificando la fraccion, porque el numerador en (γ) no es divisible á un tiempo por 2 y 5, es decir por 10. Aunque sea divisible por 10 el primer término del numerador en (γ) no lo es el segundo (B—A). Pues si (B—A) fuera un múltiplo de 10, tendriamos B—A igual á un número que terminaria en cero, lo cual supone que la última cifra de B es la misma que la última de A. Pero en este caso el período realmente no principia por la primera cifra de B, sino por la última de A. Si por ejemplo A=576 y B=386, tendremos

$$q=576\mid 386\mid 386\ldots;\text{ pero realmente}$$
$$q=57\mid 638\mid 638\ldots$$

Luego en la fraccion (γ) los factores 2 y 5 quo contiene el denominador, no todos se quitan.

Por consiguiente:

Un quebrado decimal periódico misto, se convierte en un quebrado comun, cuyo denominador contiene con otros factores primos, tambien 2 ó 5 ó uno y otro de los mismos.

Corolario 2. Se sigue que tambien las inversiones de los corolarios de Nº 2º y 3º son verdaderas:

1º *Un quebrado comun se convierte en quebrado decimal periódico puro, si el denominador no contiene los factores primos 2 ó 5.*

2º *Un quebrado comun se convierte en quebrado decimal periódico misto, si el denominador contiene con otros factores primos, tambien 2 ó 5.*

§. 42.

Cálculo abreviado con decimales.

1° Muchas veces bastará dar el resultado, que se obtiene por las operaciones con quebrados decimales, exacto solamente hasta un órden decimal determinado. Si de este modo las demas decimales se omiten, el error que se comete se hará menor, aumentando la última cifra, que se quiere retener, de una unidad, si la cifra siguiente es ≥ 5, pero dejándola la misma, si la cifra siguiente es < 5.

Así reteniendo tres órdenes decimales, se escribe:
15,375 en lugar de 15,37482 . . . ; 27,382 en lugar de 27,382467 . . .

2° *Adicion Abreviada.* Para determinar la suma de varios sumandos exacta hasta un órden decimal determinado, bastará calcular un lugar mas de lo pedido, si no hay muchos sumandos, y dos lugares mas si hay un mayor número de sumandos.

Por ejemplo para tres órdenes decimales:

$$\begin{array}{r|l} 3{,}520 & 4913 \\ 5{,}281 & 9724 \\ 8{,}473 & 5862 \\ \hline 17{,}275 & 8\ldots \end{array}$$

luego la suma pedida=17,276

3° *Sustraccion abreviada.* Aquí bastará calcular un órden mas de lo pedido.

Por ejemplo, para cinco órdenes decimales:

$$\begin{array}{r} 4{,}925751683 \\ 0{,}3819247 \\ \hline 4{,}543827 \end{array}$$

luego la diferencia pedida=4,54383

4° *Multiplicacion abreviada.* El multiplicador se escribe en órden inverso y se ponen las unidades del mismo bajo del lugar decimal del multiplicando, que debe ser exacto en el producto pedido, supliendo por ceros los lugares decimales del multiplicando, si no tienen unidades correspondientes. Despues se multiplicará la última cifra del multiplicador con la cifra del multiplicando que está inmediatamente arriba y con todas las demas que están á izquierda de la misma. Se atiende tambien á las primeras cifras de la derecha para aumentar el producto parcial si se necesita. Hecho esto, se multiplicará la segunda cifra del multiplicador y despues la tercera, la cuarta . . . . cifra del multiplicador por las cifras del multiplicando correspondientes, que están inmediatamente arriba en la misma columna y con todas las demás que están á la izquierda, atendiendo á las primeras cifras que están á la derecha, para aumentar los productos parciales si se necesita. Los productos parciales se ponen unos bajo de otros, de modo que las primeras cifras á la derecha estén en columna. Por este modo de proceder cada uno de los productos parciales, y por consiguiente también la suma de los mismos recibe la denominación pedida. Porque las unidades del multiplicador en las operaciones sucesivas, cada vez se hacen diez veces menores, y las correspondientes del multiplicando diez veces mayores.

Por ejemplo, si se quiere determinar hasta el tercer órden, el producto de los quebrados decimales que se siguen:

```
123,456789 } escribimos:  123,456789
 34,5678   }                876543
                          ----------
                           3703704
                            493827
                             61728
                              7407
                               864
                                99
                          ----------
                          4267,629
```

luego el producto buscado=1267,629

5° *Division abreviada.* Se divide al ordinario hasta que el divisor no sea contenido enteras veces en el dividendo y se pone la coma decimal. Pero despues de esto, en lugar de tomar ceros á los restos, se separará sucesivamente una cifra despues de otra á la derecha del divisor, atendiendo á las mismas sólo en formar los productos parciales para aumentarlos si es menester.

Por ejemplo, si se quiere determinar el cociente de 34,938954 por 1,4658918 hasta 4 lugares decimales, tendremos:

```
349389540:14658918=23,8346
29317836
---------
 56211180
 43976754
---------
 12234426:1465891
 11727134
---------
   507292:146589
   439767
---------
    67525:14658
    58636
---------
     8889:1465
     8795
---------
       94
```

luego el cociente buscado=23,8346.

§. 43.

b

Series de cadena.

Esplicacion. *Una serie de quebrados, cuyos denominadores son las potencias crecientes de un mismo número, se llama serie de cadena.* Es por ejemplo tal serie:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{d}{n^4}+\ldots$$

El número, cuyas potencias constituyen los denominadores de los quebrados sucesivos, se llama *base* de la serie. Así, en el ejemplo propuesto, n es la base de la serie.

1º *Todo quebrado propio puede convertirse en una serie de cadena con una base cualquiera.*

Para efectuarlo, el numerador del quebrado se multiplica por la base, y el producto obtenido se divide por el denominador, luego el resto se multiplica de nuevo por la base y el resto se divide de nuevo por el denominador &a. Los cocientes parciales sucesivos serán los numeradores de los términos consecutivos de la serie que se busca.

Ejemplo. Para reducir el quebrado propio $\frac{3}{7}$ á una serie de cadena que tiene la base 11, se hace el cálculo como está á la derecha, el que se comprenderá sin esplicacion. Los cocientes 4, 7, 9 se repiten constantemente; luego la serie será

$$\frac{3}{7}=\frac{4}{11}+\frac{7}{11^2}+\frac{9}{11^3}+\frac{4}{11^4}+\frac{7}{11^5}+\frac{9}{11^6}+\ldots$$

3	
×11	
33:7	4
28	
5	
×11	
55:7	7
49	
6	
×11	
66:7	9
63	
3	
×11	
33:7	4
28	

Nota. Estas series se llaman series de cadena por su orígen; porque los restos se multiplican y dividen constantemente por los mismos números.

Las series correspondientes para $\frac{17}{48}$ y las bases 6, 7, 21 se hallarán del mismo modo:

$$\frac{17}{48}=\frac{2}{6}+\frac{0}{6^2}+\frac{4}{6^3}+\frac{3}{6^4} \qquad (\alpha)$$

$$\frac{17}{48}=\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{2}{7^3}+\frac{3}{7^4}+\frac{2}{7^5}+\frac{3}{7^6}+\ldots \qquad (\beta)$$

$$\frac{17}{48}=\frac{7}{21}+\frac{9}{21^2}+\frac{3}{21^3}+\frac{19}{21^4}+\frac{14}{21^5}+\frac{9}{21^6}+\frac{3}{21^7}+\ldots \qquad (\gamma)$$

Obsérvese:

a) La primera serie es *finita*, y la razon es, porque el denominador 48 del quebrado comun no contiene factores primos sino 2 y 3, que están contenidos en la base 6 de la serie; y como $48=2^4.3$, la serie contiene solamente 4 términos, siendo 4 la suprema potencia contenida en 48.

b) La segunda serie es *infinita y periódica pura*, porque el denominador 48 del quebrado comun no contiene un factor que sea comun á la base 7 de la serie.

c) La tercera serie es *infinita y periódica mista*, porque el denominador 48 del quebrado comun contiene el factor 3 que está contenido en la base 21, y ademas el factor 2 que no está contenido en la misma.

Los quebrados decimales no son sino casos particulares de estas series de cadena, es decir, son series de cadena con la base 10. Tambien el orígen es el mismo, pues convirtiendo un quebrado comun en quebrado decimal, se toman sucesivamente ceros á los restos, lo que no es otra cosa que multiplicar los restos sucesivos por 10, y se ponen los cocientes parciales en los lugares decimales sucesivos, es decir, se les da por denominadores las potencias crecientes de 10.

2.° *Una serie de cadena se reduce á quebrado comun del mismo modo que un quebrado decimal, atendiendo solamente que en lugar de 10 tenemos la base de la serie.* Por ejemplo

a) Si tenemos la *serie finita:*

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{4}{5^4}$$

tendremos

$$q=\frac{1.5^3+3.5^2+2.5^1+4}{5^4}=\frac{214}{625} \qquad (a)$$

b) Si tenemos la serie *periódica pura:*

$$q=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{1}{3^5}+\dots$$

será

$$3^2.q=1.3+2+\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\dots$$

y restando la primera ecuacion de la segunda, será:

$$(3^2-1)\,q=1.3+2$$

$$q=\frac{1.3+2}{3^2-1}=\frac{5}{8} \qquad (b)$$

El numerador es el período, pues la serie dada se escribe tambien

$$q=\frac{1.3+2}{3^2}+\frac{1.3+2}{3^4}+\frac{1.3+2}{3^6}+\dots$$

en donde 1.3+2 es el período reducido. El denominador en (b) es una diferencia, es decir, la base 3 elevada á la potencia cuyo esponente 2 es igual al número de los términos periódicos, y de esta potencia se resta la unidad.

Puede tambien convertirse una serie periódica pura á quebrado comun por las reglas siguientes:

α) *Primeramente:* cada serie periódica pura, en la cual el período contiene n términos, puede convertirse en serie periódica pura, cuyo período tiene solamente un término y cuya base es la n^{sima} potencia de la primera base. Así la serie

$$q=\frac{4}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{4}{5^4}+\frac{3}{5^5}+\frac{2}{5^6}+\ldots \text{ se reduce á}$$

$$q=\frac{4.5^2+3.5+2}{5^3}+\frac{4.5^2+3.5+2}{5^6}+\ldots \text{ ó bien}$$

$$q=\frac{117}{125}+\frac{117}{125^2}+\frac{117}{125^3}+\ldots$$

β) *Lo segundo:* la suma de tal serie reducida es siempre igual al período, dividido por la base ménos la unidad. Así será en el ejemplo propuesto

$$q=\frac{117}{125-1}=\frac{117}{124}$$

Porque si tenemos en general

$$q=\frac{A}{B}+\frac{A}{B^2}+\frac{A}{B^3}+\frac{A}{B^4}+\ldots$$

será tambien

$$q=\frac{A}{B}\left(1+\frac{1}{B}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{B^3}+\ldots\right)$$

Pero, por el § 26 se tiene por division

$$\frac{1}{1-x}=1+x^1+x^2+x^3+x^4+\ldots [x<1]$$

luego sustituyendo $\frac{1}{B}$ en lugar de x será

$$1+\frac{1}{B}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{B^3}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{B}}=\frac{B}{B-1}$$

por lo cual el valor buscado de q se tiene

$$q=\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{B-1}=\frac{A}{B-1}$$

c) Si tenemos la serie *periódica mista*

$$q=\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{5}{7^3}+\frac{3}{7^4}+\frac{5}{7^5}+\cdots$$

haremos enteros los términos hasta el segundo período y despues hasta el primero, multiplicando respectivamente por 7^3 y 7.

$$7^3.q=2.7^2+3.7+5+\frac{3}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\cdots$$
$$7.q=\qquad 2+\frac{3}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{3}{7^3}+\cdots$$

$$(7^3-7).q=(2.7^2+3.7+5)-2 \quad \text{de donde}$$

$$q=\frac{(2.7^2+3.7+5)-2}{(7^2-1).7}=\frac{122}{48.7}=\frac{61}{168}$$

El paréntesis del numerador contiene la parte no periódica unida con el primer período; el segundo término 2 del numerador contiene la parte no periódica; la cantidad (7^2-1) del denominador contiene la potencia de la base, cuyo esponente es igual al número de los términos periódicos; y el último factor 7 del denominador contiene tantos 7, cuantos términos hay no periódicos. Luego encontramos aquí la misma ley como en las fracciones decimales.

Podremos tambien efectuar la reduccion de la serie propuesta de la manera siguiente:

$$q=\frac{2}{7}+\frac{3.7+5}{7^3}+\frac{3.7+5}{7^5}+\cdots$$

$$=\frac{2}{7}+\frac{26}{7.49}+\frac{26}{7.49^2}+\frac{26}{7.49^3}+\cdots$$

$$=\frac{2}{7}+\frac{26}{7.49}.\left(1+\frac{1}{49}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{49^3}+\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{7}+\frac{26}{7.49}.\frac{1}{1-\frac{1}{49}}=\frac{2}{7}+\frac{26}{7.(49-1)}=\frac{2.48+26}{7.48}$$

$$=\frac{122}{7.48}=\frac{61}{168}$$

ARTICULO VIII.

Fracciones continuas.

§. 44.

Esplicaciones.

1° Se llama *fraccion continua* una fraccion compuesta, cuyo denominador contiene por términos un número entero y otra fraccion, cuyo denominador del mismo modo contiene por términos un número entero y otra fraccion &a.

Así la forma general de una fraccion continua es:

$$\cfrac{\alpha}{a+\cfrac{\beta}{b+\cfrac{\gamma}{c+\cfrac{\delta}{d+\cfrac{\varepsilon}{e+\dots}}}}}$$

siendo α, β, γ.... a, b, c, d.... números enteros cualesquiera.

2° Los quebrados $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$.... que son partes de la fraccion continua, y se añaden al denominador del quebrado parcial que precede, se llaman *fracciones integrantes ó términos* de la fraccion continua. Los denominadores a, b, c... de los mismos se dicen *cocientes incompletos.*

3.° El número de las fracciones integrantes ó términos de una fraccion continua puede ser finito ó infinito, y segun esto, la fraccion continua se llama *ó finita ó infinita.*

4.° Las fracciones continuas mas importantes son aquellas, cuyas fracciones integrantes contienen todas por numerador la unidad. La forma general de estas fracciones continuas es:

$$\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\dots}}}}$$

Trataremos aquí solamente de fracciones continuas que tienen dicha forma.

5.° Llámase *reducida ó fraccion convergente* la fraccion ordinaria equivalente á una porcion cualquiera de la fraccion continua, tomada empezando desde su orígen. Así en

$$x_1=\frac{1}{a}\,; \qquad x_2=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}\,; \qquad x_3=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$$

los valores de x_1, x_2, x_3 son las tres primeras *reducidas ó convergentes* de la fraccion continua que está en Nº 4º

6. Cuando se añade un número entero á una fraccion continua, esta se llama *mista*, siendo fraccion continua *propia* en el caso opuesto. Así en Nº 4º tenemos una fraccion continua propia; será mista la siguiente:

$$A+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cdots}}}$$

§. 45.

Reduccion de una fraccion continua finita á quebrado comun y de un quebrado comun á fraccion continua.

1.º Para reducir una fraccion continua finita á quebrado comun, redúzcase la última fraccion integrante con el denominador de la penúltima á quebrado comun, y por este divídase la unidad que es el numerador de la penúltima integrante; el resultado es una fraccion continua que contiene un término ménos que ántes, y repitiendo el mismo procedimiento, se llegará finalmente al quebrado comun buscado. Así tenemos

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{21}{5}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{5}{21}}} \qquad (a)$$

$$=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{68}{21}}}=\cfrac{1}{2+\frac{21}{68}} \qquad (b)$$

$$=\cfrac{1}{\frac{157}{68}}=\frac{68}{157} \qquad (c)$$

Luego $\frac{68}{157}$ es el quebrado comun que equivale á la fraccion continua dada.

2º Para convertir un quebrado comun en fraccion continua, se dividirán el numerador y el denominador por el numerador; el nuevo denominador represéntese en forma de la suma de un número entero y quebrado propio; el resultado será una fraccion continua con dos términos, y repitiendo cada vez el mismo procedimiento con el último término, se llegará finalmente á una fraccion continua, cuyo último término tiene por numerador la unidad y por denominador un entero, y esta fraccion continua será la que se busca. Así tenemos

$$\frac{115}{151}=\frac{1}{\frac{151}{115}}=\cfrac{1}{1+\frac{36}{115}} \qquad (a)$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{115}{36}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\frac{7}{36}}} \qquad (b)$$

$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{36}{7}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\frac{1}{7}}}} \qquad (c)$$

Corolario. De los números dados 115 y 151, que constituyen los términos del quebrado comun, se divide el mayor por el menor, el menor por el resto, y así cada vez el último divisor por el último resto. Es decir, tenemos el mismo procedimiento que se observa en buscar el máximo comun divisor de 115 y 151. Los cocientes sucesivos de las divisiones parciales son los *cocientes incompletos* de la fraccion continua que se busca [cf. § 31]:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \overset{1}{\smile} & & \overset{3}{\smile} & & \overset{5}{\smile} & & \overset{7}{\smile} \\
151 & : & 115 & : & 36 & : & 7 & : & 1 \\
115 & & 108 & & 35 & & 7 & & \\
\hline
36 & & 7 & & 1 & & 0 & &
\end{array}$$

Luego $\quad \dfrac{115}{151}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}}}}$

Este procedimiento se aplicará con utilidad cuando los términos del quebrado comun son grandes. Así, dado el quebrado $\frac{1728}{5631}$ para convertirlo en fraccion continua hallamos:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \overset{3}{\smile} & & \overset{3}{\smile} & & \overset{1}{\smile} & & \overset{6}{\smile} & & \overset{2}{\smile} & & \overset{4}{\smile} \quad \overset{2}{\smile} \\
5631 & : & 1728 & : & 447 & : & 387 & : & 60 & : & 27 & : & 6 : 3 \\
5184 & & 1341 & & 387 & & 360 & & 54 & & 24 & & 6 \\
\hline
447 & & 387 & & 60 & & 27 & & 6 & & 3 & & 0
\end{array}$$

Luego será

$$\frac{1728}{5631}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

§. 46.

Determinacion de las convergentes ó reducidas.

Para determinar una reducida cualquiera, se multiplicarán por el cociente incompleto correspondiente, los dos terminos de la reducida precedente, y á los dos términos de la fraccion así resultante, se añadirán los dos términos respectivos de la reducida anterior.

Si $\frac{A}{A'}, \frac{B}{B'}, \frac{C'}{C} \dots \frac{P}{P'}, \frac{Q}{Q'}, \frac{R}{R'} \dots$ son las reducidas consecutivas de la fraccion continua

$$X=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\dots+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\dots}}}}}}}$$

será en general

$$\frac{R}{R'}=\frac{Q\,.\,r+P}{Q'\,.\,r+P'} \qquad (1)$$

Dem. La reduccion actual de 1, 2, 3 .... términos de la fraccion continua nos suministra

$$\frac{A}{A'}=\frac{1}{a}$$

$$\frac{B}{B'}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b}}=\frac{b}{a\,b+1}$$

Como

$$\frac{C}{C'}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}}$$

se obtiene la tercera reducida, poniendo $b+\frac{1}{c}$ en lugar de b, que está en la reducida precedente.

Luego

$$\frac{C}{C'}=\frac{b+\frac{1}{c}}{a\left(b+\frac{1}{c}\right)+1}=\frac{b\,c+1}{a\,(b\,c+1)+c}=\frac{b\,c+1}{(a\,b+1)\,c+a}$$

$$=\frac{B\,.\,c+A}{B'\,.\,c+A'}$$

Ademas tenemos:

$$\frac{D}{D'}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}}$$

de donde se obtiene la cuarta reducida poniendo $c+\frac{1}{d}$ en lugar de c que está en la reducida precedente. Luego

$$\frac{D}{D'}=\frac{B\,(c+\frac{1}{d})+A}{B'\,(c+\frac{1}{d})+A'}=\frac{B\,c\,d+B+A\,d}{B'\,c\,d+B'+A'd}$$

$$=\frac{(B.c+A)\,d+B}{(B'.c+A')d+B'}=\frac{C\,.d+B}{C'.d+B'}$$

Luego la tercera reducida $\frac{C}{C'}$ y la cuarta $\frac{D}{D'}$ se forman segun la regla espuesta. Tambien la segunda reducida observa la misma ley, cuando suponemos delante de la primera una reducida $=\frac{0}{1}$, cuyo valor sin duda es verdadero; pues, por esta suposicion y aplicando la misma ley, se obtiene

$$\frac{1\,b+0}{a.\,b+1}=\frac{b}{a\,b+1}$$

Supongamos ahora que dicha ley sea verdadera para la reducida $\frac{R}{R'}$, de modo que sea

$$\frac{R}{R'}=\frac{Q\,.r+P}{Q'.r+P'} \qquad (a)$$

Se formará de esta reducida la siguiente $\frac{S}{S'}$, sustituyendo $r+\frac{1}{s}$ en lugar de r, de donde seria

$$\frac{S}{S'}=\frac{Q\,(r+\frac{1}{s})+P}{Q'\,(r+\frac{1}{s})+P'}=\frac{Q\,r\,s+Q+P\,s}{Q'\,r\,s+Q'+P's}$$

$$=\frac{(Q\,.r+P)\,s+Q}{(Q'.r+P')\,s+Q'}$$

es decir, tendriamos:

$$\frac{S}{S'}=\frac{R\,.s+Q}{R'.s+Q'} \qquad (b)$$

Esta ecuacion contiene la misma ley que la ecuacion (a), y se sigue:

Cuando la ley espuesta vale para una reducida, la misma ley será verdadera para la reducida siguiente.

Pero hemos visto, que dicha ley vale para la reducida tercera, luego será verdadera tambien para la cuarta, y como vale para la cuarta será verdadera tambien para la quinta, y así tambien para la sexta, la séptima.... para cualquiera reducida. Luego la ecuacion (a) ó (1) es verdadera para cualquiera reducida, que tiene otras delante de sí.

Corolario. Se infiere, que los numeradores y los denominadores de las reducidas consecutivas se hacen cada vez mayores.

Si tenemos, por ejemplo, la fraccion continua

$$X=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}}$$

será

$$\frac{A}{A'}=\frac{1}{2}\,;\quad \frac{B}{B'}=\frac{1.3+0}{2.3+1}=\frac{3}{7}\,;\quad \frac{C}{C'}=\frac{3.4+1}{7.4+2}=\frac{13}{30}$$

$$\frac{D}{D'}=\frac{13.5+3}{30.5+7}=\frac{68}{157}\qquad \frac{E}{E'}=\frac{68.6+13}{157.6+30}=\frac{421}{972}$$

Por consiguiente,

para los cocientes incompletos $2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

tenemos las reducidas $\frac{1}{2},\ \frac{3}{7},\ \frac{13}{30},\ \frac{68}{157},\ \frac{421}{972}$

La última reducida, á un tiempo, es el valor exacto de la fraccion continua dada, ó el quebrado comun que equivale á la misma; y por esto se saca otro método de reducir una fraccion continua á quebrado comun, y que es distinto de el que hemos visto en el parágrafo precedente.

§. 47.

Propiedades de las reducidas.

Teorema 1. Los numeradores de las diferencias entre dos reducidas consecutivas alternadamente son $+1$ y -1, segun ocupe la reducida, que sirve de sustraendo, lugar par ó lugar impar.

Dem. Se sigue de las tres primeras reducidas:

$$1)\quad \frac{A}{A'}-\frac{B}{B'}=\frac{AB'-A'B}{A'B'}=\frac{(ab+1)-ab}{A'B'}=\frac{+1}{A'B'}$$

$$2)\quad \frac{B}{B'}-\frac{C}{C'}=\frac{BC'-B'C}{B'C'}=\frac{B(B'c+A')-B'(Bc+A)}{B'C'}$$

$$=\frac{A' B - A B'}{B' C'} = \frac{-(A B' - A' B)}{B' C'} = \frac{-1}{B' C'}$$

Luego la diferencia entre la primera y segunda reducida tiene el numerador $+1$, y la de la segunda y tercera tiene el numerador -1. Pero la misma ley es general; porque sean

$$\frac{P}{P'},\ \frac{Q}{Q'},\ \frac{R}{R'}$$

tres reducidas consecutivas, y segun § 46

$$\frac{R}{R'} = \frac{Q\,r + P}{Q'\,r + P'}$$

y tendremos

$$\frac{P}{P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{P Q' - P' Q}{P' Q'}$$

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{R}{R'} = \frac{Q R' - Q' R}{Q' R'} = \frac{Q\,(Q' r + P') - Q'\,(Q r + P)}{Q' R'}$$

$$= \frac{P' Q - P Q'}{Q' R'} = \frac{-(P Q' - P' Q)}{Q' R'}$$

Se ve que los numeradores de dos diferencias consecutivas son iguales y de signo contrario. Pero el primero de dichos numeradores es $+1$, luego el segundo será -1, el tercero $+1$, el cuarto -1 &a, y tenemos en general el numerador $=+1$, cuando la reducida que sirve de sustraendo, es de órden par, pero tenemos el numerador $=-1$, cuando la misma es de órden impar.

Corolario. El denominador de la diferencia de dos reducidas consecutivas, es el producto de los denominadores de las mismas.

Teorema 2. Las reducidas son alternadamente mayores y menores que el valor exacto de la fraccion continua; y son menores las de órden par y mayores las de órden impar.

Dem. Designando el valor exacto de la fraccion continua por $\frac{X}{X'}$, y los restos que se omiten, cuando se forman las reducidas consecutivas, por ρ', ρ'', ρ''' . . . ρ, tenemos

$$\frac{X}{X'} = \frac{1}{a+\rho'} = \frac{1}{a + \frac{1}{b+\rho''}} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c+\rho'''}}}$$

Pero es evidente que $\frac{1}{a} > \frac{1}{a+\rho'}$, luego

$$1)\quad \frac{A}{A'} > \frac{X}{X'}$$

y ademas es $a+\frac{1}{b}>a+\frac{1}{b+\rho''}$, y por cansiguiente, cuando se divide por estas espresiones la unidad, se saca

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}}<\frac{1}{a+\frac{1}{b+\rho''}} \qquad \text{de donde}$$

$$2) \qquad \frac{B}{B'}<\frac{X}{X'}$$

Luego nuestro teorema es verdadero para las dos primeras reducidas. Pero tenemos en general

$$\frac{R}{R'}=\frac{Qr+P}{Q'r+P'}$$

y de esta espresion se formará el valor exacto de la fraccion continua, sustituyendo $r+\rho$ en lugar de r, ó bien, cuando se pone $r+\rho=y$, sustituyendo y en lugar de r; de donde

$$\frac{X}{X'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}$$

Si ahora tomamos la diferencia entre $\frac{X}{X'}$ y la reducida $\frac{Q}{Q'}$, tendremos

$$\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{Qy+P}{Q'y+P'}-\frac{Q}{Q'}=\frac{PQ'-QP'}{Q'(Q'y+P')}=\pm\frac{1}{Q'(Q'y+P')}$$

pues $PQ'-QP'$ es el numerador de la diferencia $\frac{P}{P'}-\frac{Q}{Q'}$, y por consiguiente vale $+1$ ó -1 [T. 1], segun el sustraendo $\frac{Q}{Q'}$ sea de órden par ó de órden impar. Así pues, $\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}$ será >0 ó <0, es decir, la reducida $\frac{Q}{Q'}$ será $<\frac{X}{X'}$ ó $>\frac{X}{X'}$, segun sea esta reducida de órden par ó de órden impar.

Corolario 1. De aquí se sigue que *el valor de la fraccion continua total está comprendida entre dos reducidas consecutivas de cualquier órden.*

Corolario 2. Luego será tambien $\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}<\frac{Q}{Q'}-\frac{R}{R'}$ ó bien

$$\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{Q'R'} \qquad (a)$$

es decir, si tomamos una reducida cualquiera $\frac{Q}{Q'}$ por valor de la fraccion continua, el error cometido será menor que la fraccion $\frac{1}{Q'R'}$, de modo que tengamos la proposicion siguiente:

El error cometido, tomando una reducida cualquiera por valor de la fraccion total continua, es menor que la unidad dividida por el producto del denominador de la misma reducida, multiplicado por el de la siguiente.

Corolario 3. Como tenemos $R'=Q'r+P'$, y r á lo ménos equivale á la unidad, R' equivale á lo ménos á $Q'+P'$ y tenemos por (a) *áfortiori.*

$$\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{Q'(Q'+P')} \qquad \text{(b)}$$

Es decir:

El mismo error será menor que la unidad dividida por el producto del denominador de la reducida, multiplicado por la suma del mismo denominador con el denominador de la reducida precedente.

Corolario 4. Omitiendo en (b) la cantidad P', será *áfortiori*

$$\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}<\frac{1}{Q'^2} \qquad \text{(c)}$$

Luego:

El mismo error es menor que la unidad dividida por el cuadrado del denominador de la reducida.

Corolario 5, En la ecuacion que hemos encontrado

$$\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}=\pm\frac{1}{Q'(Q'y+P')}$$

la cantidad y representa $r+\rho=r+\frac{1}{s+\ldots}$, que es menor que $r+1$, de modo que $Q'y+P'<Q'(r+1)+P'=R'+Q'$; luego, respecto al valor absoluto, será

$$\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}>\frac{1}{Q'(Q'+R')} \qquad \text{(d)}$$

y resulta que;

El mismo error es mayor que la unidad dividida por el producto del denominador de la reducida, multiplicado por la suma del mismo denominador con el denominador de la reducida siguiente.

Corolario 6. Luego el mismo error se tiene siempre entre los límites

$$\frac{1}{Q'(Q'+R')} < \frac{X}{X'} - \frac{Q}{Q'} < \frac{1}{Q'.R'} \qquad (e)$$

PROBLEMA 1. La razon geométrica de la circunferencia del círculo al diámetro $\pi=3,1415926536$, se debe espresar por números menores.

RESOL. Convertiremos la fraccion decimal propia

$$a=0,1415926536$$

en fraccion continua, y tendremos:

$$\begin{array}{lccccc} & \overset{7}{\smile} & \overset{15}{\smile} & \overset{1}{\smile} & \overset{292}{\smile} & \\ & 10000000000:1415926536 & : 88514248 & : 88212816 & : 301432 & \\ \textit{res.} & 88514248 & 88212816 & 301432 & 194572 & 106760 \end{array}$$

Luego será

$$\alpha = \frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292+\ldots}}}}$$

y para los cocientes incompletos 7 15 1 292 tendremos las reducidas $\frac{1}{7}$; $\frac{15}{106}$, $\frac{16}{113}$; $\frac{4687}{33102}$

y como $\pi=3+\alpha$, tendremos

$$\pi=\frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}$$

El último valor da π exacto hasta 9 decimales.

La razon de Arquimedes es $\pi=\frac{22}{7}$, y escede á la verdadera, pues la primera reducida $\frac{1}{7}>\alpha$, pero la escede en ménos de $\frac{1}{7.106}=\frac{1}{742}$, y en mas de $\frac{1}{7(7+106)}=\frac{1}{791}$.

La razon de Mecio es $\pi=\frac{355}{113}$, y escede tambien á la verdadera, pues la tercera reducida $\frac{16}{113}$ es tambien $>\alpha$; pero su error es menor que $\frac{1}{113.33102}$ es decir menor que $\frac{1}{3740526}$

La última razon $\pi=\frac{103993}{33102}$ es menor que la verdadera, pero el error es menor que $\frac{1}{33102^2}=\frac{1}{1095742404}$, luego será *a fortiori* $<\frac{1}{1000000000}$, es decir $<0,000000001$.

PLOBLEMA 2. Determinar el valor de la fraccion continua

$$x=\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{8+}\frac{1}{6+}\frac{1}{4+}\frac{1}{3+}\cdots$$

de manera que el error sea menor que 0,000001.

RESOL. Sea $\frac{N}{N'}$ la reducida, que da el valor de la fraccion continúa con dicha aproximacion, y será segun el corolario 4 del teorema 2.

$$x-\frac{N}{N'}<\frac{1}{N'^2}$$

luego, cuando $N'^2>1000000$ ó $N'>1000$, la reducida $\frac{N}{N'}$ tendrá la aproximacion que se busca. Por consiguiente, en formar las reducidas consecutivas, debemos adelantarnos hasta quo tengamos una reducida $\frac{N}{N'}$, cuyo denominador N' sea >1000.

Pero, para los

cocientes incompletos	3	5	8	6	4	tenemos
las reducidas	$\frac{1}{3}$;	$\frac{5}{16}$;	$\frac{41}{131}$;	$\frac{251}{802}$;	$\frac{1045}{3339}$	

la última reducida tiene un denominador quo es >1000; luego esta satisface á la cuestion propuesta.

TEOREMA 3. Una reducida de cualquier órden, se aproxima mas al valor do la fraccion continua total, que cualquiera otra do las precedentes.

DEM. Por la demostracion del teorema precedente tenemos la diferencia entre una reducida cualquiera y el valor total do la fraccion continua:

$$\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}=\pm\frac{1}{Q'(Q'y+P')}\qquad(\alpha)$$

en donde $y=r+\rho=r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{t\ldots}}$. Del mismo modo será

$$\frac{X}{X'}-\frac{R}{R'}=\pm\frac{1}{R'(R'y'+Q')}\qquad(\beta)$$

en donde $y'=s+\frac{1}{t\ldots}$ Luego tenemos entre y é y' la relacion $y=r+\frac{1}{y'}$, y poniendo este valor de y en la ecuacion (α), se hallará

$$\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}=\pm\frac{1}{Q'\left[Q'\left(r+\frac{1}{y'}\right)+P'\right]}=\pm\frac{y'}{Q'\left[(Q'r+P')\,y'+Q'\right]}$$

es decir

$$\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}=\pm\frac{y'}{Q'\left[R'y'+Q'\right]} \qquad (\gamma)$$

Si comparamos los segundos miembros de las ecuaciones (β) y (γ), veremos que siendo $y'>1$ y $Q'<R'$, el numerador de (γ) es mayor que el numerador de (β), y el denominador de (γ) es menor que el denominador de (β); luego por un doble motivo será, respecto al valor absoluto,

$$\frac{X}{X'}-\frac{R}{R'}<\frac{X}{X'}-\frac{Q}{Q'}$$

lo que dice nuestro teorema.

Corolario. Por consiguiente, las diferentes reducidas consecutivas convergen cada vez mas hácia el valor de la fraccion continua total. Por esta propiedad se les da el nombre de *fracciones convergentes.*

Teorema 4. Las fracciones convergentes son fracciones irreducibles.

Dem. Sean $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$ dos reducidas consecutivas cualesquiera, y tendremos por medio del teorema 1:

$$PQ'-QP'=\pm 1$$

Si P y P′ tuvieran algun factor comun, dividiria este factor al primer miembro $PQ'-QP'$, y por consiguiente al segundo ± 1, lo que no es posible. Luego una convergente cualquiera $\frac{P}{P'}$ es irreducible.

Teorema 5. Una fraccion convergente se aproxima mas á la fraccion continua total que cualquiera otra fraccion cuyos términos sean menores que los suyos.

Dem. Supongamoos que $\frac{r}{r'}$ sea una fraccion que está comprendida entre las dos reducidas consecutivas $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$, y que se aproxima mas al valor exacto de la fraccion continua que $\frac{Q}{Q'}$, y tendremos la distancia absoluta entre $\frac{P}{P'}$ y $\frac{r}{r'}$ menor que la distancia entre $\frac{P}{P'}$ y $\frac{Q}{Q'}$, es decir, respecto al valor absoluto tenemos

$$\frac{P}{P'}-\frac{r}{r'}<\frac{P}{P'}-\frac{Q}{Q'}$$

ó bien

$$\frac{P\,r'-r\,P'}{P'\,r'}<\frac{1}{P'\,Q'}$$

Como P, P', r. r' son numeros enteros, será tambien P r'—r P' un número entero ó cero. No puede ser =0; pues por esta suposicion tendriamos P r'=r P' ó $\frac{r}{r'}=\frac{P}{P'}$ es decir la fraccion $\frac{r}{r'}$ seria una reducida, lo que no suponemos. Luego P r'—r P' es un número entero y equivale á lo ménos á la unidad; por consiguiente será tambien

$$\frac{1}{P'r'}<\frac{1}{P'Q'} \qquad \text{luego} \qquad r'>Q'$$

es decir, la fraccion $\frac{r}{r'}$ que se aproxima mas á la fraccion continua total que la reducida $\frac{Q}{Q'}$, tiene un denominador, que es mayor que el denominador de la reducida $\frac{Q}{Q'}$, y por esto, serán tambien sus términos mayores que los términos de dicha reducida.

ARTICULO IX.

Proporciones.

§. 48.

Esplicaciones.

1° Cuando comparamos una cantidad con otra, se puede buscar 1) *de cuanto* esceda una cantidad á la otra, es decir, se busca la *diferencia* de las dos cantidades; 2) *cuantas veces* una cantidad sea mayor que la otra, es decir, se busca el *cociente* de la primera cantidad por la otra.

La *diferencia*, en el primer caso, se llama *razon aritmética*, y el *cociente*, en el segundo, se dice *razon geométrica*.

2° La igualdad de dos razones se llama *proporcion*. Luego tendremos dos especies de proporciones, segun que las razones iguales sean aritméticas ó geométricas.

Una proporcion aritmética es la igualdad de dos razones aritméticas ó diferencias; por ejemplo

$$a-\alpha=b-\beta\,;\quad 15-10=9-4$$

lo que se pronuncia: "*a* es á *α* como *b* es á *β*."

Una proporcion geométrica es la igualdad de dos razones geométricas ó de dos cocientes; por ejemplo:

$$a:\alpha=b:\beta\,;\quad 18:6=12:4$$

lo que se pronuncia de la misma manera: "*a* es á *α* como *b* es á *β*."

3° Los números *a*, *α*, *b*, *β* se llaman términos de la proporcion, *a* y *β* términos *estremos*, *α* y *b* términos *medios*, *a* y *b antecedentes*, *α* y *β consecuentes*.

Cuando los términos medios de una proporcion son desiguales, la proporcion se llama *discreta*, cuando son iguales se llama *continua*.

Las proporciones $\left.\begin{array}{l} a-\alpha=b-\beta \\ a:\alpha=b:\beta \end{array}\right\}$ son discretas, y

las proporciones $\left.\begin{array}{l} a-\alpha=\alpha-\beta \\ a:\alpha=\alpha:\beta \end{array}\right\}$ son continuas.

En la proporcion continua, el término medio se llama *media proporcional*, y se llama *media aritmética* en la proporcion aritmética, y *media geométrica* en la proporcion geométrica.

4° Se llama *serie de razones iguales ó proporcion continuada*, la igualdad de varias razones de la misma especie, como

$$a-\alpha=b-\beta=c-\gamma=d-\delta=\ldots.$$
$$a:\alpha=b:\beta=c:\gamma=d:\delta=\ldots.$$

La última se escribe tambien

$$a:b:c:d=\alpha:\beta:\gamma:\delta$$

§. 49.

Teoremas sobre las proporciones aritméticas.

Teorema 1 En toda proporcion aritmética, la suma de los términos estremos es igual á la suma de los términos medios.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Cuando es} & a-\alpha=b-\beta \text{ será} \\ \text{tambien} & a+\beta=b+\alpha \end{array}\right\} \quad (1)$$

Dem. Cuando con la ecuacion

$$\begin{array}{ll} a-\alpha=b-\beta & \text{se suma} \\ \alpha+\beta=\alpha+\beta & \text{se obtiene} \\ \hline a+\beta=b+\alpha & \text{[Axiom. 7]} \end{array}$$

Teorema 2. La media proporcional aritmética de dos números es la media suma de los mismos.

Cuando es $a-\alpha=\alpha-b$ será $\left.\begin{array}{l}\\ \alpha=\frac{1}{2}(a+b)\end{array}\right\}$ (2)

Dem. La proporcion $a-\alpha=\alpha-b$ por el teor. 1, nos suministra $a+b=\alpha+\alpha=2\alpha$, luego dividiendo por 2 se tendrá $\alpha=\frac{1}{2}(a+b)$.

Corolario. Con el nombre de *la media aritmética* de varias cantidades, se entiende el cociente de la suma de estas dividida por el número de las mismas. Así, cuando tenemos los números a, b, c, d...., y la multitud de los mismos se representa por n, la media aritmética será

$$M=\frac{a+b+c+d+\ldots.}{n}$$

§. 50.

Teoremas sobre las proporciones geométricas.

Teorema 1. En toda proporcion geométrica, el producto de los términos estremos es igual al producto de los términos medios.

Si $a:\alpha=b:\beta$ será $\left.\begin{array}{l}\\ a\,.\,\beta=b\,.\,\alpha\end{array}\right\}$ (1)

Dem. La proporcion dada se escribe tambien

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$$

y cuando multiplicamos esta ecuacion por el producto de los dos denominadores, tendremos (Axiom. 9):

$$\frac{a\,\alpha\,\beta}{\alpha}=\frac{b\,\alpha\,\beta}{\beta} \quad \text{ó bien} \quad a\,\beta=b\,\alpha$$

Corolario 1. Por medio de este teorema se ve facilmente, si una proporcion es verdadera ó falsa.

Corolario 2. En una proporcion geométrica continua, la media proporcional geométrica es igual á la raiz cuadrada del producto de los términos estremos.

Pues de la proporcion $a : \alpha = \alpha : b$ se saca

$$\alpha^2 = a\,b \quad \text{luego}$$

$$\alpha = \sqrt{a\,b}$$

Se infiere por inversion. *la raiz cuadrada del producto de dos números es la media proporcional geométrica de los mismos.*

Teorema 2. Si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos, se puede formar con ellas una proporcion geométrica verdadera, poniendo por términos estremos las que hacen un producto, y por términos medios las que forman el otro.

Así cuando $a\beta = b\alpha$ será

$$\left.\begin{array}{l} a\beta = b\,\alpha \\ a : b = \alpha : \beta \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Dem. Pues por inversion, la proporcion $a : b = \alpha : \beta$, empleando el teorema precedente, da la ecuacion $a\,\beta = b\,\alpha$.

Teorema 3. Una proporcion geométrica quedará verdadera, mudando de lugar 1) los términos medios ó los estremos; 2) poniendo los medios por estremos y estos por medios; 3) cambiando de lugar las razones.

La misma proporcion, por tanto, tendrá las diferentes formas:

$$\left.\begin{array}{ll} a : b = \alpha : \beta & \alpha : a = \beta : b \\ a : \alpha = b : \beta & \alpha : \beta = a : b \\ & \\ \beta : b = \alpha : a & b : a = \beta : \alpha \\ \beta : \alpha = b : a & b : \beta = a : \alpha \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Las primeras cuatro proporciones se hallan por 1), las últimas cuatro por 2), y ademas la sexta es aquella que se enuncia por 3).

Dem. En todas estas proporciones, el producto de los términos estremos es igual al producto de los términos medios; pues tenemos siempre $a\beta = b\alpha$ ó $b\,\alpha = a\beta$.

Nota. Para no equivocarse en cambiar los términos de una proporcion, se debe tener cuidado, que el producto de los estremos sea siempre igual al producto de los medios.

Teorema 4. Una proporcion geométrica dará otras verdaderas, multiplicando ó dividiendo el primero y el segundo, el tercero y el cuarto término, los antecedentes ó finalmente los consecuentes por un mismo número.

Si $\quad a:b=\alpha:\beta \quad$ será tambien

$$\left.\begin{array}{ll} am:bm=\alpha n:\beta n & \\ an:bn=\alpha m:\beta n & \dfrac{a}{m}:\dfrac{b}{m}=\alpha n:\beta n \\ \dfrac{a}{m}:\dfrac{b}{m}=\dfrac{\alpha}{n}:\dfrac{\beta}{n} & \\ & \dfrac{a}{m}:bn=\dfrac{\alpha}{m}:\beta n \\ \dfrac{a}{m}:\dfrac{b}{n}=\dfrac{\alpha}{m}:\dfrac{\beta}{n} & \end{array}\right| \qquad (4)$$

Dem. Las proporciones nuevas serán verdaderas, cuando el producto de los estremos es igual al producto de los medios. Pero 1) en las dos primeras proporciones, dichos productos son $a\beta mn$ y $b\alpha mn$, que son iguales; pues por la proporcion dada tenemos $a\beta=b\alpha$, luego cuando esta ecuacion se multiplica por $m\,n$, será tambien $a\beta mn=b\alpha mn$. Ademas 2) en las dos proporciones que se siguen, dichos productos son $\dfrac{a\beta}{mn}$ y $\dfrac{b\alpha}{mn}$, que son tambien iguales; pues los productos iguales $a\beta=b\alpha$, solo se dividen por cantidades iguales. Finalmente 3) en las dos últimas proporciones, dichos productos son $a\beta.\dfrac{n}{m}$ y $b\alpha.\dfrac{n}{m}$, que son iguales; pues los productos iguales $a\beta=b\alpha$ solo se multiplican por la misma fraccion $\dfrac{n}{m}$.

Teorema 5. Una proporcion geométrica dará otra verdadera, elevando todos sus términos á la misma potencia.

Si $\quad a:b=m:n \quad$ será

$$\left.\begin{array}{l} a:b=m:n \\ a^p:b^p=m^p:n^p \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Dem. Otra forma de la proporcion dada es $\dfrac{a}{b}=\dfrac{m}{n}$; y cuando cada una de estas fracciones iguales se pone p veces como factor, tendremos tambien

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\ldots p \text{ veces}=\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}\ldots p \text{ veces}$$

es decir

$$\frac{a^p}{b^p}=\frac{m^p}{n^p}$$

lo que es en otra forma $a^p:b^p:=m^p:n^p$.

TEOREMA 6. Una proporcion geométrica dará otra verdadera, estrayendo la raiz del mismo grado á todos sus términos.

Si $a : b = m : n$ será

$$\left.\begin{array}{l} a : b = m : n \\ \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{m} : \sqrt[p]{n} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

DEM. Pues cuando la proporcion

$$\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{m} : \sqrt[p]{n}$$

se eleva á la p^{sima} potencia, se sigue

$$(\sqrt[p]{a})^p : (\sqrt[p]{b})^p = (\sqrt[p]{m})^p : (\sqrt[p]{n})^p$$

Pero conforme á la definicion de las raices [§ 6], esta proporcion no es otra que

$$a : b = m : n$$

que es la proporcion dada. Luego, siendo verdaderos el resultado y las operaciones del cálculo que hemos acabado, debe ser verdadero tambien el principio, es decir, la proporcion que debia demostrarse.

COROLARIO. Luego de la proporcion $a : b = m : n$ se sigue tambien que

$$\sqrt[p]{a^q} : \sqrt[p]{b^q} = \sqrt[p]{m^q} : \sqrt[p]{n^q}$$

TEOREMA 7. En toda proporcion geométrica, la suma (ó la diferencia) de los dos primeros términos es á la suma (ó diferencia) de los dos últimos términos, como el primero de los antecedentes (ó consecuentes) es al segundo de los antecedentes (ó consecuentes).

Si $a : b = \alpha : \beta$ será

$$\left.\begin{array}{l} a : b = \alpha : \beta \\ a \pm b : \alpha \pm \beta = a : \alpha = b : \beta \end{array}\right\} \qquad (7)$$

tomando ambas veces ó el signo $+$, ó el signo $-$.

DEM. La proporcion dada en otra forma es

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{de donde}$$

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{\alpha}{\beta} \pm 1$$

luego $$\frac{a \pm b}{b} = \frac{\alpha \pm \beta}{\beta}$$

y cambiando la posicion de los términos, se saca

$$a \pm b : \alpha \pm \beta = b : \beta = a : \alpha$$

Corolario. De las dos proporciones

$$a+b:\alpha+\beta=a:\alpha$$
$$a-b:\alpha-\beta=a:\alpha$$

se deduce inmediatamente

$$\left.\begin{array}{l} a+b:\alpha+\beta=a-b:\alpha-\beta \quad \text{ó bien} \\ a+b:a-b=\alpha+\beta:\alpha-\beta \end{array}\right\} \qquad (8)$$

La última proporcion se enuncia:

La suma de los dos primeros términos de una proporcion geométrica, es á la diferencia de los mismos, como la suma de los dos últimos es á la diferencia de estos.

Teorema 8. En toda proporcion geométrica, la suma (ó la diferencia) de los antecedentes es á la suma (ó á la diferencia) de los consecuentes, como el primer término es al segundo, ó el tercero es al cuarto.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad a:b=\alpha:\beta \quad \text{será} \\ a\pm\alpha:b\pm\beta=a:b=\alpha:\beta \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Dem. La proporcion dada, por trasposicion de los medios, nos suministra

$$a:\alpha=b:\beta \qquad \text{ó bien } \frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}$$

de donde

$$\frac{a}{\alpha}\pm 1=\frac{b}{\beta}\pm 1$$
$$\frac{a\pm\alpha}{\alpha}=\frac{b\pm\beta}{\beta}$$

y cambiando la posicion de los términos se saca

$$a\pm\alpha:b\pm\beta=\alpha:\beta=a:b$$

Corolario. De las dos proporciones

$$a+\alpha:b+\beta=a:b$$
$$a-\alpha:b-\beta=a:b$$

se deduce

$$\left.\begin{array}{l} a+\alpha:b+\beta=a-\alpha:b-\beta \quad \text{ó bien} \\ a+\alpha:a-\alpha=b+\beta:b-\beta \end{array}\right\} \qquad (10)$$

es decir:

La suma de los antecedentes es á la diferencia de los mismas, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.

Teorema 9. En una serie de razones geométricas, es la suma de los antecedentes á la suma de los consecuentes, como un antecedente á su consecuente.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad a:b=a':b'=a'':b''=a''':b''' \quad \text{será} \\ (a+a'+a''+a'''):(b+b'+b''+b''')=a:b \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Dem. El valor comun de las razones iguales sea q, y tendremos

$$\frac{a}{b}=q\,,\quad \frac{a'}{b'}=q\,,\quad \frac{a''}{b''}=q\,,\quad \frac{a'''}{b'''}=q$$

luego $\quad a=bq,\quad a'=b'q\,,\quad a''=b''q\,,\quad a'''=b'''q$

y cuando sumamos todas estas ecuaciones, será

$$(a+a'+a''+a''')=(b+b'+b''+b''')\,q$$

y por consiguiente

$$\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''}=(q)=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\&a.$$

Nota. Luego, escribiendo la serie de razones como se sigue

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''}\qquad \text{ó bien}$$

$$a:a':a'':a'''=b:b':b'':b'''$$

de estas igualdades se deduce inmediatamente (12)

$$\frac{a+a'+a''+a'''}{b+b'+b''+b'''}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\ldots.$$

Corolario. Cuando tenemos una serie de razones

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots.=q \qquad (\alpha)$$

los numeradores y los denominadores de los quebrados consecutivos pueden multiplicarse por números cualesquiera, de modo que tengamos

$$\frac{a\,n}{b\,n}=\frac{a'n'}{b'n'}=\frac{a''n''}{b''n''}=\ldots.=q$$

de donde se saca

$$a\,n=b\,n.q\,;\quad a'n'=b'n'.q\,;\quad a''n''=b''n''.q;\ldots.$$

y por adicion

$$(a\,n+a'n'+a''n''+\ldots.)=(b\,n+b'n'+b''n''+\ldots)\,q$$

Luego de (α) se infiere en general

$$\frac{a\,n+a'n'+a''n''+\ldots.}{b\,n+b'n'+b''n''+\ldots.}=(q)=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\ldots. \qquad (13)$$

Teorema 10. De una serie de proporciones se puede formar una nueva proporcion verdadera, multiplicando entre sí los términos que tienen un mismo lugar.

$$\text{Si}\qquad \left.\begin{array}{l} a : b = p : q \\ a' : b' = p' : q' \\ a'' : b'' = p'' : q'' \\ \hline a\,a'a'' : b\,b'b'' = p\,p'p'' : q\,q'q'' \end{array}\quad \text{será} \right\} \qquad (14)$$

Dem. Las proporciones dadas, en otra forma son

$$\frac{a}{b}=\frac{p}{q}\,;\quad \frac{a}{b'}=\frac{p'}{q'}\,;\quad \frac{a''}{b''}=\frac{p''}{q''}$$

y cuando multiplicamos entre sí estas ecuaciones, tendremos

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}\cdot\frac{a''}{b''}=\frac{p}{q}\cdot\frac{p'}{q'}\cdot\frac{p''}{q''}\quad \text{ó bien}\quad \frac{a\,a'a''}{b\,b'b''}=\frac{p\,p'p''}{q\,q'q''}$$

que es la proporcion que debe demostrarse.

Corolario. Si las proporciones dadas son continuas, el resultado de la multiplicacion será tambien una proporcion continua. Pues, de

$$\begin{array}{l} a : p = p\ q \\ a' : p' = p'\ q' \\ a'' : p'' = p''q'' \quad \text{se deduce} \\ \hline a\,a'a'' : p\,p'p'' = p\,p'\,p'' : q\,q'q'' \end{array}$$

Teorema 11. Cuando en una proporcion geométrica, los antecedentes son iguales, serán iguales tambien los consecuentes.

$$\text{Si}\qquad \left.\begin{array}{l} a : b = a : \beta \quad \text{será} \\ \quad b = \beta \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Dem. De la proporcion $a:b=a:\beta$ se deduce $a\beta=a\,b$, luego, cuando se divide por a, será $\beta=b$.

Teorema 12. Cuando en una proporcion geométrica, tres términos son iguales á tres términos de otra proporcion, y los términos respectivamente tienen en una y otra proporcion la misma posicion, serán tambien iguales los cuartos términos.

$$\text{Si}\qquad \left.\begin{array}{l} a : b = \alpha : \beta \\ a : b = \alpha : \beta' \quad \text{será} \\ \hline \quad \beta = \beta' \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Dem. Siendo iguales las primeras razones de las proporciones dadas, serán iguales las segundas; luego

$$\alpha : \beta = a : \beta'$$

luego por el teor. 11, será $\beta=\beta'$.

APLICACIONES DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS.

§. 51.

Esplicaciones.

Dos cantidades (de diferente especie) *están en razon directa* ó *son directamente proporcionales*, cuando haciéndose una de estas 2, 3, 4 . . . . n veces mayor, se hace tambien la otra 2, 3, 4 . . . . n veces mayor.

Dos cantidades (de diferente especie) *están en razon inversa*, ó *son inversamente proporcionales*, cuando haciéndose una de estas 2, 3, 4 . . . . n veces mayor, se hace por el contrario la otra 2, 3, 4 . . . . n veces menor.

Son directamente proporcionales, por ejemplo:
- el *precio* de una mercancía y el *peso* de la misma (con escepcion de las piedras preciosas, del vidrio &a.)
- la *obra* y el *número de los obreros*,
- el *camino* y la *velocidad* y el *tiempo* que se necesitan para hacerlo,
- los *intereses* y el *capital* que los produce.

Son inversamente proporcionales:
- el *número de los obreros* y *el tiempo* que se necesita para acabar la obra,
- la *velocidad* y el *tiempo* que se necesita para hacer un camino determinado,
- el *número de los consumidores* y el *tiempo*, para el que los víveres bastan.

§. 52.

A. Proporciones simples.

Ejemplo I. Si 3 libras costaron 5 pesos, ¿cuál será el precio de 7 libras?

Res. Cuanto mas libras, tanto mas plata; luego proporcion directa:

3 libras : 7 libras = 5 pesos : x pesos

ó bien, cuando las denominaciones se omiten

$$3 : 7 = 5 : x$$

$$x = \frac{5 \cdot 7}{3} = 11\frac{2}{3}$$

luego 7 libras costarán $11\frac{2}{3}$ pesos.

Ejemplo II. Una locomotora recorre en 4 horas una línea de 32 leguas, ¿cuántas horas tardará en recorrer una distancia de 120 leguas?

Res. Cuanto mas camino, tanto mas horas se necesitan; luego proporcion directa:

$$32 \text{ leguas} : 120 \text{ leguas} = 4 \text{ horas} : x \text{ horas}$$
$$32 : 120 = 4 : x$$
$$x = \frac{4 . 120}{32} = 15 \text{ horas.}$$

Ejemplo III. 8 hombres tardan 10 dias en hacer una fosa, ¿cuánto tiempo tardarian 15 hombres en la misma obra?

Res. Cuanto mas hombres, tanto ménos tiempo; luego una proporcion inversa:

$$8 \text{ hombres} : 15 \text{ hombres} = x \text{ dias} : 10 \text{ dias}$$
$$8 : 15 = x : 10$$
$$x = \frac{8 . 10}{15} = 5 \tfrac{1}{3} \text{ dias.}$$

Ejemplo IV. Una locomotora, cuya velocidad es de 40 kilómetros por hora, recorre en 10 horas una línea, ¿cuántas horas tardaria en recorrer la misma distancia si la velocidad fuese de 50 kilómetros?

Res. Cuanto mayor es la velocidad, tanto menor el tiempo que se necesita; luego proporcion inversa:

$$40 \text{ kil.} : 50 \text{ kil.} = x \text{ horas} : 10 \text{ horas}$$
$$40 : 50 = x : 10$$
$$x = \frac{40 . 10}{50} = 8 \text{ horas.}$$

§. 53.

B. Proporciones compuestas.

Dos cantidades están con otras *en razon compuesta*, cuando en un respecto se tienen como dos de las otras, en otro respecto como otras dos de las mismas &a.

Teorema 13. Cuando

A es á A′ en un respecto como......B:B′
A es á A′ en otro respecto como......C:C′
A es á A′ en un tercer respecto como..D:D

será $A : A' = B . C . D : B' . C' . D'$

ó tambien $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \cdot \frac{C}{C'} \cdot \frac{D}{D'}$

Dem. Supongamos que la cantidad A va pasando del estado A al estado A' por medio de varios estados intermedios a, b, de manera que cambiándose A en a, se mude solamente B en B', quedando C y D los mismos; y que pasando A del estado a al estado b, se mude solamente C en C′, quedando B′ y D los mismos &a. Tendremos de este modo las relaciones

$$A : a = B : B'$$
$$a : b = C : C'$$
$$b : A' = D : D' \quad \text{luego por multiplicac.}$$

$$A : A' = B.C.D : B'.C'.D'$$

Ejemplo I. Si 20 hombres tardan 50 dias en acabar una fosa, que tiene 80 metros de largo, 3 metros de ancho y 2 metros de altura; ¿cuántos hombres se necesitan, en semejantes circunstancias, para hacer dentro de 40 dias, una fosa de 40 metros de largo, 4 metros de ancho y 3 metros de altura?

Resol. Acabaron

20 hombres una fosa de 80, 3, 2 metros en 50 dias; serán necesarios

a hombres	para	una	fosa	de	40, 3. 2	metros	en 50	dias,
b hombres	„	„	„		40, 4, 2	„	50	„
c hombres	„	„	„		40, 4, 3	„	50	„
x hombres	„	„	„		40, 4, 3	„	40	„

En los renglones consecutivos mudamos sucesivamente una condicion despues de la otra, hasta que el último contenga todas las del problema.

El número de los hombres que se necesita, es directamente proporcional, al largo, al ancho y á la profundidad de la fosa; pero es inversamente proporcional al tiempo, en el cual la obra debe ejecutarse. Luego tendremos las proporciones:

$$20 : a = 80 : 40$$
$$a : b = 3 : 4$$
$$b : c = 2 : 3$$
$$c : x = 40 : 50 \quad \text{y por multipl.}$$

$$20 : x = 80.3.2.40 : 40.4.3.50$$

$$x = \frac{40.4.3.50}{80.3.2.40}\,20$$

$$x = 25 \text{ hombres.}$$

Luego, por este ejemplo, nuestro teorema 13 queda demostrado, y será de una grande utilidad plantear un semejante problema de la manera que acabamos de ver. Sin embargo, puede hacerse el cálculo con brevedad, empleando el teor. 13 y ordenando las cantidades dadas como se sigue:

x hombres,	40 largo,	4 ancho,	3 altura,	40 dias
20 „	80 „	3 „	2 „	50 „

se forma inmediatamente la ecuacion

$$\frac{x}{20}=\frac{40}{80}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{50}{40}$$

escribiendo las cantidades que pertenecen á x, como numeradores, cuando son directamente proporcionales con x (el largo, ancho, la altura), y como denominadores, cuando son inversamente proporcionales (los dias). Las otras cantidades se escribirán respectivamente como denominadores ó numeradores,

Ejemplo II. Se uniformaron 2000 soldados con 50 piezas de paño de 80 metros de largo y 1,2 metros de ancho; ¿cuántas piezas se necesitarán para uniformar 3600 soldados, teniendo aquellas 90 metros de largo y 1,5 metros de ancho?

Resol. Tenemos

x piezas,	3600 soldados,	90 largo,	1,5 ancho
50 „	2000 „	80 „	1,2 „

Cuanto mas soldados, tanto mas piezas, luego proporcion directa; pero cuanto mas de largo y de ancho, tanto ménos de piezas, luego proporcion inversa. Por consiguiente 3600 será numerador, y 90 y 1,5 serán denominadores, de modo que tengamos

$$\frac{x}{50}=\frac{3600}{2000}\cdot\frac{80}{90}\cdot\frac{1.2}{1,5}$$

$$x = 64 \text{ piezas.}$$

Ejemplo III. Para llevar los metales y las piedras del fondo de una mina se necesitan 18 caballos, siendo la profundidad del pozo 162 metros. Se busca el número de caballos que se necesita para otra mina, que tiene una profundidad de 180 metros, y cuya produccion es á la produccion de la primera como 3:2. Ademas, siendo los últimos caballos de una raza inferior, su efecto (es decir lo que prestan en un mismo tiempo) es solamente $\frac{3}{4}$ del efecto de los primeros, y ademas no trabajan sino 8 horas cada dia, miéntras que los primeros trabajan 9 horas.

Se supone que el número de caballos es directamente proporcional á la profundidad del pozo.

Resol. Tenemos las cantidades

x caballos,	180 prof,	3 prod,	$\frac{3}{4}$ efecto,	8 horas:
18 „	162 „	2 „	1 „	9 „

$$\frac{x}{18}=\frac{180}{162}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}\cdot\frac{9}{8}$$

$$x = 45 \text{ caballos}$$

Interes simple. El cálculo del *interes simple* es una aplicacion de las proporciones compuestas. Se llama *interes* el *rédito* ó la remuneracion que produce un capital prestado. *Interes simple* es el producido solo por el capital, y *compuesto* el producido por el capital é intereses devengados y que se van acumulando al capital primitivo. El interes simple que producen 100 pesos en la unidad de tiempo, que generalmente es un año, se llama *tanto* por ciento.

En los problemas de interes simple, se supone que este es proporcional al capital y al tiempo que dura el empréstito.

Problema 1. ¿Qué interes producen 15000 pesos al 5 por 100 en 3 meses?

Resol.

x interes,	15000 capital,	$\frac{1}{4}$ año
5 „	100 „	1 „

$$\frac{x}{5}=\frac{15000}{100}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1}$$

$$x = 187\tfrac{1}{2} \text{ pesos.}$$

Problema II. ¿Qué capital se necesita para producir en $\frac{1}{2}$ año 300 pesos al 6 por 100?

Resol.

x capital,	$\frac{1}{2}$ año,	300 interes
100 „	1 „	6 „

$$\frac{x}{100}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{300}{6}$$

$$x = 10000$$

Problema III. 144000 pesos produjeron en 40 dias 880 pesos; ¿cuál ha sido el tanto por 100?

Resol.

x interes,	100 capital,	1 año
880 „	144000 „	$\frac{40}{360}$ „

$$\frac{x}{880}=\frac{100}{144000}\cdot\frac{1}{40:360}$$

$$x = 5\tfrac{1}{2}$$

PROBLEMA IV. ¿En qué tiempo 3600 pesos producen 162 al 6 por 100?

RESOL. x años, 3600 capital, 162 interes
1 „ 100 „ 6 „

$$x = \frac{100}{3600} \cdot \frac{162}{6} = \tfrac{3}{4} \text{ año.}$$

REGLA CONJUNTA. Se llama *regla conjunta* la que enseña á determinar la relacion que existe entre dos cantidades [medidas, monedas &a.] por medio de la relacion que estas tienen con otras cantidades intermedias,

Es tambien la regla conjunta una aplicacion de las proporciones compuestas.

PROBLEMA. Se sabe que

1 pié francés : 1 pié inglés = 16:15
1 pié inglés : 1 pié austriac. = 27:28
1 pié austriac. : 1 metro = 6:19

Se busca la relacion que existe entre un pié francés y un metro.

RESOL. Se ordenan las proporciones, como arriba, de manera que la denominacion que es la última en la proporcion precedente sea la primera en la proporcion que se sigue. Despues se multiplicarán todas las proporciones dadas, y se omiten las denominaciones que se encuentran dos veces. Luego será

1 pie francés : metro = 16.27.6:15.28.19
= 216:665

ó bien, un metro tiene $\frac{665}{216}$ = 3,078 piés franceses.

El mismo problema se puede poner y resolver en la forma, como se sigue:

Son 15 piés franceses = 16 piés ingleses
28 piés ingleses = 17 piés austriacos
19 piés austriacos = 6 metros; luego por multipl.

15.28.19 piés franc. = 16.17.6 metros

$$1 \text{ metro} = \frac{15.28.19}{16.17.6} = 3{,}078 \text{ piés franc.}$$

§. 54.

C. Partes proporcionales.

I. REGLA DE COMPAÑIA. La *regla de compañía* tiene por objeto partir una cantidad entera y dada en varias partes desiguales, que forman las unas con las otras razones determinadas.

Problema I. Tres comerciantes A, B y C reunieron sus capitales para una empresa comun, contribuyendo el primero con 3200, el segundo con 4500 y el tercero con 6700 pesos. Ganaron 4320 pesos, y se busca la ganancia que toca á cada uno.

Resol. Sean x, y, z las partes de ganancia de A, B, C, y será $x+y+z=4320$, y ademas debe ser

$$x:y:z=3200:4500:6700=32:45:67$$

de donde se saca por el teorema 9 Nota:

$$x+y+z:32+45+67=x:32=y:45=z:67$$

Siendo $x+y+z=4320$, $32+45+67=144$, los valores desconocidos de x, y, z se determinarán por las proporciones

$$4320:144=x:32$$
$$4320:144=y:45$$
$$4320:144=z:67 \quad \text{de donde}$$

$$x=\frac{32.4320}{144}=960 \text{ pesos}; \quad y=\frac{45.4320}{144}=1350 \text{ pesos.}$$

$$z=\frac{67.4320}{144}=2010 \text{ pesos.}$$

Problema II. Tres comerciantes hicieron compañía; el primero puso 6000 pesos por 6 meses, el segundo 16000 por 3 meses, y el tercero 8000 pesos por 9 meses. La ganancia era de 650 pesos. ¿Qué conviene á cada uno?

Resol. La ganancia de cada uno es directamente proporcional al capital prestado y al tiempo del empréstito, y por consiguiente al producto de los mismos. Luego, llamando x, y, z á las partes de la ganancia que se deben distribuir, tendremos

$$x:y:z=6000.6:16000.3:8000.9$$
$$x:y:z=3:4:6 \quad \text{de donde}$$

$$\frac{x+y+z}{3+4+6}=\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6} \quad \text{ó bien}$$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{6}=\frac{650}{13}=50; \quad \text{luego}$$

$$x=3.50=150, \quad y=4.50=200, \quad z=6.50=300 \text{ pesos.}$$

Problema III. ¿Cuál será la solucion del problema precedente, contándose para el primero 5, para el segundo 6 y para el último $4\frac{1}{2}$ por 100?

Resol. Tendremos de semejante modo

$$x:y:z=6000.6.5:16000.3.6:8000.9.4\tfrac{1}{2}$$
$$x:y:z=15:24:26 \quad \text{de donde}$$

$$\frac{x+y+z}{15+24+26}=\frac{x}{15}=\frac{y}{24}=\frac{z}{26}$$ ó bien

$$\frac{x}{15}=\frac{y}{24}=\frac{z}{26}=\frac{650}{65}=10;$$ luego

$x=150,\quad y=240,\quad z=260$ pesos.

II. Regla de aligacion. Esta regla no es sino un caso particular de la regla precedente y tiene por objeto calcular las cantidades respectivas de una mezcla, dada la razon de las diferentes sustancias que deben mezclarse y la cantidad de la mezcla.

Problema. Para la fabricacion de la pólvora se mezclan 3 libras de carbon y 2 libras de azufre para 16 libras de nitro. ¿Cuántas libras de cada una de estas sustancias se necesitan para fabricar 6300 libras de pólvora?

Resol. Sean x, y, z las libras de carbon, azufre y nitro que se necesitan, y tendremos

$$x+y+z=6300$$
$$x:y:z=3:2:16$$ de donde

$$\frac{x+y+z}{3+2+16}=\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{16},$$ luego

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{16}=\frac{6300}{21}=300,$$ y será

$x=3.300=900,\quad y=2.300=600,\quad z=16.300=4800$ libras.

CAPITULO III.

POTENCIAS, RAICES Y LOGARITMOS.

ARTICULO I.

Potencias con esponentes enteros.

§. 55.

Multiplicacion y division de potencias que tienen la misma base.

Esplicaciones. Con el nombre de *potencia con esponente entero* se entiende un producto de factores iguales. El factor igual se llama *base* y el número que indica, cuántas veces el factor igual está repetido en el producto, se llama *esponente* [§ 5]. Así una potencia con esponente entero será la siguiente

$$a.a.a....n \text{ veces} = a^n.$$

El esponente determina el *grado* de la potencia. El esponente 1 no se escribe, de modo que a es idéntico con a^1.

Teorema 1. Las potencias de la misma base se multiplican entre sí, sumando sus esponentes y dando la suma obtenida por esponente á la base comun, la que se escribe una sola vez [Cf. T. 10 § 17].

$$a^m.a^n = a^{m+n} \quad (1)$$

Dem. Tenemos

$$\begin{aligned} a^m.a^n &= a.a.a....m \text{ veces}.a.a....n \text{ veces} \\ &= a.a.a....(m+n) \text{ veces} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

Corolario. Luego se tiene por inversion

$$a^{m+n} = a^m.a^n$$

Es decir, una potencia que tiene por esponente una suma, puede descomponerse en un producto de potencias con la misma base, cuyos esponentes son los sumandos de la suma dada.

TEOREMA 2. Las potencias se dividen por otras de la misma base, restando los esponentes respectivos, el menor del mayor, y dando el resto obtenido como esponente á la base comun, la que se escribe una sola vez, y

α) sin divisor, cuando el esponente del dividendo es mayor que el del divisor.

β) como divisor de la unidad, cuando el esponente del dividendo es menor que el del divisor.

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad [\text{condic. } m>n]$$
$$a^m : a^n = 1 : a^{n-m} \quad [\text{condic. } m<n] \qquad (2)$$

DEM. Tenemos

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a.a.a....m \text{ veces}}{a.a.a....n \text{ veces}}$$

Si $m>n$, los n factores del denominador se quitarán por n factores del numerador, en el cual quedarán $m-n$ factores, luego $a^m:a^n=a^{m-n}$. Pero si $m<n$, los m factores del numerador se quitarán por m factores del denominador, en el cual quedarán $n-m$ factores, y como el numerador retiene la unidad, será $a^m:a^n=1:a^{n-m}$.

COROLARIO. Luego se tiene por inversion

$$a^{m-n} = a^m : a^n$$

es decir, una potencia que tiene por esponente una diferencia, puede descomponerse en un cociente de dos potencias con la misma base, y el esponente del dividendo será el minuendo, y el esponente del divisor el sustraendo de la diferencia dada de esponentes.

§. 56.

Multiplicacion y division de potencias que tienen esponentes iguales.

TEOREMA 3. Las potencias que tienen los mismos esponentes, quedarán multiplicadas entre sí, si el producto de las bases se eleva á la potencia del esponente comun.

$$a^m . b^m = (ab)^m \qquad (3)$$

DEM. Tenemos

$$a^m . b^m = a\,a\,a.. \quad m \text{ veces} . \; b\,b\,b....m \text{ veces}$$
$$= ab . ab . ab ....m \text{ veces}$$
$$= (ab)^m.$$

COROLARIO Un producto quedará elevado á una potencia, elevando á dicha potencia cada uno de los factores.

$$(a\,b)^m = a^m . b^m \qquad (4)$$

Dem. Se tiene por inversion del teorema precedente:

$$(ab)^m = ab.ab.ab \ldots m \text{ veces}$$
$$= aaa \ldots m \text{ veces} . bbb \ldots m \text{ veces}$$
$$= a^m . b^m$$

Teorema 4. Una potencia quedará dividida por otra que tiene el mismo esponente, si el cociente de las bases se eleva á la potencia del esponente comun.

$$a^m : b^m = (a:b)^m \qquad (5)$$

Dem. Se tiene

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{a.a.a \ldots m \text{ veces}}{b.b.b \ldots m \text{ veces}}$$
$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots m \text{ veces}$$
$$= \left(\frac{a}{b}\right)^m = (a:b)^m$$

Corolario. Un cociente quedará elevado á una potencia, elevando á dicha potencia separadamente el dividendo y el divisor del cociente.

$$(a:b)^m = a^m : b^m$$

Se tiene por inversion del teorema.

§. 57.

Potencias de potencias.

Teorema 5. Una potencia quedará elevada á otra potencia, multiplicando los esponentes.

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

Dem. Tenemos

$$(a^x)^y = a^x . a^x . a^x \ldots y \text{ veces}$$
$$= a^{x+x+x+\ldots} \qquad [T. 1]$$
$$= a^{xy}$$

Corolario 1. Como $a^{xy} = a^{yx}$, se tiene tambien

$$(a^x)^y = (a^y)^x$$

es decir: cuando un número tiene que elevarse á diversas potencios sucesivas, el órden de efectuar dichas potencias puede cambiarse como se quiera.

Corolario 2. Se tiene por inversion del teorema:

$$a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$$

es decir: un número se eleva á una potencia, cuyo esponente es un producto, elevando dicho número sucesivamente á las potencias que indican los factores del producto.

§. 58.

Potencias que tienen por base ó esponente la unidad ó cero.

1º Cualquiera potencia de la unidad, es la unidad.

$$1^m = 1$$

Pues tenemos $1^m = 1.1.1.1.\ldots = 1.$

2º La primera potencia de cualquier número, es el número mismo.

$$a^1 = a$$

Se tiene $a^1 = a^{3-2} = aaa : aa = a$

3º Cualquier potencia de cero, es cero.

$$0^m = 0$$

Pues $0^m = 0.0.0.\ldots = 0$

4º Cualquier número finito elevado á la potencia cero, es igual á la unidad.

$$a^0 = 1$$

Pues $a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$

Teorema 6. Todos los teoremas establecidos sobre las potencias, valen tambien si el esponente es cero.

Dem. [T. 1.] $a^m . a^0 = a^m . 1 = a^m = a^{m+0}$

[T. 2.] $a^m : a^0 = a^m : 1 = a^m = a^{m-0}$

$$a^0 : a^m = 1 : a^m = \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{m-0}}$$

[T. 3.] $a^0 . b^0 = 1 . 1 = 1 = (a . b)^0$

[T. 4.] $a^0 : b^0 = 1 : 1 = 1 = (a : b)^0$

[T. 5.] $(a^0)^y = 1^y = 1 = a^0 = a^{0 \cdot y}$

$$(a^x)^0 = 1^0 = a^0 = a^{x \cdot 0}$$

§. 59.

Potencias con esponentes algebráicos.

Esplicacion. Elevar un número á una potencia con esponente positivo ó negativo, es multiplicar ó dividir la unidad por la misma potencia con esponente absoluto.

$$a^{+n} = 1 . a^n ; \qquad a^{-n} = 1 : a^n$$

Pues tenemos [T. 1 y 2 corol.]:

$$a^{N+n} = a^N . a^n ; \qquad a^{N-n} = a^N : a^n$$

Luego *aumentar* el esponente N de *n* unidades, es *multiplicar* a^N por a^n ó multiplicar *n* veces por *a*; y *disminuir* el esponente N de *n* unidades, es *dividir* a^N por a^n ó dividir *n* veces por *a*. Haciendo $N=o$, lo cual es idéntico á hacer abstraccion del número absoluto N, se tiene

$$a^{o+n}=a^o \cdot a^n\,; \qquad a^{o-n}=a^o : a^n \quad \text{ó bien}$$
$$a^{+n}=1 \cdot a^n\,; \qquad a^{-n}=1 : a^n$$

Las potencias con esponentes positivos y negativos (y así tambien con el esponente cero) no están contenidas en la definicion que hemos dado de las potencias. Mas tarde veremos una definicion general de las potencias que contiene tambien estas formas del esponente. Ahora podremos considerarlas como nuevas formas de escribir la unidad, el producto de la unidad por una potencia y el cociente de la unidad por una potencia, de modo que sea

$$a^o=1\,; \quad a^{+n}=1 \cdot a^n\,; \quad a^{-n}=1 : a^n$$

y este modo de escribir es una consecuencia necesaria de la teoría de las potencias con esponentes absolutos.

Teorema 7. Todos los teoremas establecidos para potencias con esponentes absolutos, valen tambien para potencias con esponentes positivos, negativos y algébricos.

Dem. A) *Para esponentes positivos.* Tenemos $a^{+n}=1 \cdot a^n=a^n$, es decir, una potencia con esponente positivo es igual á la misma potencia con esponente absoluto; luego todos los teoremas que valen para esponentes absolutos tendrán lugar tambien para esponentes positivos.

B) *Para esponentes negativos.*

$$[T.\ 1]\quad a^m \cdot a^{-n}=a^m \cdot \frac{1}{a^n}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n}=\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-m-n}$$

$$[T.\ 2]\quad a^m : a^{-n}=a^m : \frac{1}{a^n}=a^m \cdot a^n=a^{m+n}$$

$$a^{-m} : a^n=\frac{1}{a^m} : a^n=\frac{1}{a^m \cdot a^n}=\frac{1}{a^{m+n}}=a^{-m-n}$$

$$a^{-m} : a^{-n}=\frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n}=\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$

$$[T.\ 3]\quad a^{-m} \cdot b^{-m}=\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m}=\frac{1}{(ab)^m}=(ab)^{-m}$$

$$[T.\ 4]\quad a^{-m} : b^{-m}=\frac{1}{a^m} : \frac{1}{b^m}=\frac{1}{(a:b)^m}=(a:b)^{-m}$$

$$[T. 5]\ (a^{-x})^{y} = \left(\frac{1}{a^{x}}\right)^{y} = \frac{1}{a^{xy}} = a^{-xy}$$

$$(a^{x})^{-y} = \frac{1}{(a^{x})^{y}} = \frac{1}{a^{xy}} = a^{-xy}$$

$$(a^{-x})^{-y} = \left(\frac{1}{a^{x}}\right)^{-y} = \frac{1}{a^{-xy}} = a^{xy}$$

C) *Para esponentes algébricos.* Designando un número algébrico por m', de modo que sea $m' = \pm m$, los teoremas serán verdaderos para el número algébrico m', pues son verdaderos para $+m$ y $-m$. Los mismos teoremas serán tambien verdaderos, si m' tiene signos propios; pues tenemos $+m' = \pm m$ y $-m' = \mp m$; y los teoremas valen para tales esponentes.

§. 60.

Signos de las potencias.

Teorema 8. Cualquiera potencia que tiene una base positiva, es positiva; una potencia que tiene una base negativa, será positiva, cuando el esponente es un número par; pero será negativa, cuando el esponente es un número impar.

Dem. A) $(+a)^{+n} = (+a) = +a.+a.+a.... = +a^{n}$

$$(+a)^{-n} = \frac{1}{(+a)^{n}} = \frac{1}{+a^{n}} = +\frac{1}{a} = +a^{-n}$$

B) $(-a)^{+2n} = [(-a)^{2}]^{n} = (+a^{2})^{n} = +a^{2n}$

$$(-a)^{-2n} = \frac{1}{(-a)^{2n}} = \frac{1}{+a^{2n}} = +a^{-2n}$$

C) $(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n}.-a = +a^{2n}.-a = -a^{2n+1}$

$(-a)^{-2n-1} = (-a)^{-2n}:-a = +a^{-2n}:-a = -a^{-2n-1}$

§. 61.

Potencias del binómio.

1º La multiplicacion sucesiva del binómio $a+b$ por sí mismo, nos da sus potencias consecutivas:

$$(a+b)^{1} = a + b$$
$$(a+b)^{2} = a^{2} + 2\,a\,b + b^{2}$$
$$(a+b)^{3} = a^{3} + 3\,a^{2}b + 3\,a\,b^{2} + b^{3}$$
$$(a+b)^{4} = a^{4} + 4\,a^{3}b + 6\,a^{2}b^{2} + 4\,a\,b^{3} + b^{4}$$
$$(a+b)^{5} = a^{5} + 5\,a^{4}b + 10a^{3}b^{2} + 10a^{2}b^{3} + 5\,a\,b^{4} + b^{5}$$

Con esto se ve:

1° El desarrollo de cada una de estas potencias contiene tantos términos, cuantas unidades tiene el esponente del binómio, mas uno.

2° El primer término del desarrollo tiene solamente el primer término del binómio, elevado á la misma potencia que el binómio. De igual modo, el último término del desarrollo contiene solamente el último término del binómio, elevado tambien á dicha potencia.

3° Los otros términos del desarrollo contienen los dos términos del binómio por factores, y se observa que en los têrminos consecutivos del segundo miembro tenemos *las potencias decrecientes* de a y las *potencias crecientes* de b, de modo que la suma de los esponentes en cada término, sea la misma é igual al esponente del binómio.

Respecto á *los coeficientes* se observa:

4° El primero y el último coeficiente son siempre la unidad, el segundo y el penúltimo iguales al esponente del binómio.

5° Cuando se suman dos coeficientes consecutivos de cualquiera potencia, el resultado es siempre el coeficiente, que está debajo del último de dichos coeficientes, en el desarrollo de la potencia siguiente. Así tenemos *una tabla de los coeficientes* para el desarrollo de las potencias del binómio:

I	pot.	1	1									
II	,,	1	2	1								
III	,,	1	3	3	1							
IV	,,	1	4	6	4	1						
V	,,	1	5	10	10	5	1					
VI	,,	1	6	15	20	15	6	1				
VII	,,	1	7	21	35	35	21	7	1			
VIII	,,	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
IX	,,	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
X	,,	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

6.° Se sigue tambien, por medio de esta tabla, que dos coeficientes, que tienen una misma distancia del primero y último, son iguales; luego cada una se encuentra dos veces en el mismo desarrollo, con escepcion del término medio en las potencias del binómio que tiene por esponente un número par.

Tenemos estas reglas solo por induccion, sin saber si valen en general para toda potencia del binómio. Pero cuando suponemos que, segun dichas reglas, las n^{sima} potencia de $a+b$ sea

$$(a+b)^n = a^n + k_1 a^{n-1} b + k_2 a^{n-2} b^2 + \dots + k_{n-1} a b^{n-1} + k_n b^n \qquad (\alpha)$$

designando por k_1, k_2, $k_3 \dots k_n$ los coeficientes del desarrollo, es fácil demostrar que el desarrollo de la potencia $n+1$ ha de tener la misma forma. En efecto, multiplicando (α) por $a+b$, tendremos:

$$(a+b)^{n+1}$$
$$=a^{n+1}+k_1a^n b+k_2 a^{n-1} b^2+\dots+k_n a b^n$$
$$+ a^n b \; +k_1a^{n-1} b^2+\dots+k_{n-1} a b^n+k_n b^{n+1}$$
y sumando los terminos semejantes
$$(a+b)^{n+1}$$
$$=a^{n+1}+K_1a^n b+K_2a^{n-1} b^2+\dots+K_n a b^n+K_{n+1} b^{n+1} \qquad (\beta)$$
en donde es
$$K_1=k_1+1 ;\quad K_2=k_2+k_1 ;\quad K_3=k_3+k_2\dots ;\quad K_{n+1}=k_n \qquad (\gamma)$$

Las tres primeras reglas que hemos espuesto, se observan como en la ecuacion (α), así en la ecuacion (β); luego concluiremos: *cuando dichas reglas se observan en una potencia cualquiera de $a+b$, las mismas se observarán tambien en la potencia superior inmediata de $a+b$.* Pero, como hemos visto, se observan en la segunda potencia de $a+b$; luego se aplicarán tambien á la tercera, y como valen para la tercera potencia, así tendrán lugar tambien para la cuarta, luego tambien para la quinta, para la sexta, la séptima &a. es decir, para toda potencia de $a+b$.

Ademas, las ecuaciones (γ) nos enseñan, que un coeficiente cualquiera es igual á la suma de dos coeficientes consecutivos de la potencia precedente, como está espuesta en la regla 5ª y se supone en la tabla de los coeficientes. El primer coeficiente permanece igual á la unidad para toda potencia del binómio; y como $K_{n+1}=k_n$, tambien el último coeficiente quedará siempre el mismo $=1$; pues para la 1ª y 2ª potencia tenemos $k_n=1$.

Luego las reglas que hemos encontrado, valen para cualquier potencia del binómio.

Así será por ejemplo la 7ª potencia de $a+b$ la siguiente:
$$(a+b)^7$$
$$=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$

§. 62.

Fórmula general de las potencias del binómio.

Por el parágrafo precedente se puede desarrollar cualquiera potencia del binómio, cuando el esponente es un número determinado; pero no se puede, cuando el esponente es un número indeterminado, por ejemplo, cuando se busca $(a+b)^n$.

Los coeficientes de la 4ª potencia, segun la tabla de los coeficientes, son
$$1,\quad 4,\quad 6,\quad 4,\quad 1 \qquad (\delta)$$
y cuando dividimos cada uno de estos por el que precede, tendremos los cocientes

$$1, \quad \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}$$

Los numeradores son los números enteros decrecientes desde 4 hasta 1, y los denominadores los números crecientes desde 1 hasta 4, en donde 4 es el esponente del binómio.

Por medio de estos cocientes, los coeficientes de la 4ª potencia, que están en (δ), pueden escribirse en la forma siguiente:

$$1, \quad \frac{4}{1}, \frac{4.3}{1.2}, \frac{4.3.2}{1.2.3}, \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$$

Se ve pronto la ley que los coeficientes observan. Aun los coeficientes de la 5ª potencia

1, 5, 10, 10, 5, 1

pueden escribirse de semejante manera:

$$1, \quad \frac{5}{1}, \frac{5.4}{1.2}, \frac{5.4.3}{1.2.3}, \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}, \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}$$

Luego concluiremos *por induccion*, que los coeficientes de la n^{sima} potencia no pueden dejar de ser los siguientes:

$$1 ; \frac{n}{1} ; \frac{n(n-1)}{1.2} ; \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} ; \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \text{ \&a.} \quad (n)$$

Al numerador del coeficiente que precede, sucesivamente se añade, como nuevo factor, el número entero inferior inmediato, al denominador el número entero superior inmediato, siendo el segundo coeficiente $\frac{n}{1}$, en donde el numerador es igual al esponente del binómio y el denominador igual á la unidad. No tendremos de esta manera, sino $n+1$ coeficientes, que bastan para los $n+1$ términos del desarrollo; pues el coeficiente del lugar $n+2$, tendria en el numerador el factor $n-n=o$, con lo cual este término, con todos los siguientes, desaparece.

Cuando los coeficientes encontrados en (n) son verdaderamente los de la n^{sima} potencia, es decir, cuando representan los de cualquiera potencia del binómio, los mismos han de producir los coeficientes de la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª.... potencia, poniendo $n=1, 2, 3, 4$....

En efecto, poniendo $n=1$, tendremos

$$1, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1(1-1)}{1.2}, \frac{1(1-1)(1-2)}{1.2.3} \quad \text{\&a.}$$

es decir, tenemos 1, 1 como los coeficientes de la primera potencia, siendo todos los siguientes iguales á cero. Este resultado es el verdadero; luego las espresiones (a) contienen verdaderamente los coeficientes de la 1ª potencia para n=1.

Para n=2, tendremos

$$1,\quad \frac{2}{1},\quad \frac{2\,(2-1)}{1\,.\,2};\quad \frac{2\,(2-1)\,(2-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\quad \&a.$$

El último coeficiente, con todos los que se siguen, es cero; luego despues de la reduccion tenemos solamente los números 1, 2, 1, que realmente son los coeficientes de la 2ª potencia.

Otra prueba demostrará que las espresiones (a) satisfacen tambien á la 3ª potencia y ademas hemos visto que bastan para la 4ª y 5ª potencia, poniendo n=4, 5.

Es preciso que averiguemos, si las mismas fórmulas (a) son verdaderas para cualquiera potencia del binomio.

Supongamos que dichas fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ \dfrac{n}{1},\ \dfrac{n\,(n-1)}{1\,.\,2};\ \dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3};\ \dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \\ \ldots\ldots\dfrac{n\,(n-1)\ldots(n-p+3)\,(n-p+2)}{1.2.3\ldots(p-2)\,(p-1)}\ \text{para el lugar } p \end{array}\right\}\quad (a)$$

sean los coeficientes verdaderos de la n^{sima} *potencia, y demostraremos que serán tambien los coeficientes verdaderos de la potencia* n+1, *poniendo en las mismas* n+1 *en lugar de n.*

En efecto, por las ecuaciones (γ) del parágrafo precedente, sabemos que siendo el primer coeficiente siempre igual á la unidad, el segundo de la potencia n+1, ha de ser igual á la suma del primero y segundo coeficiente de la potencia *n* &a. Pero sumando dos coeficientes consecutivos que están en (a), tendremos

$$\frac{n}{1}+1=\frac{n+1}{1}$$

$$\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}+\frac{n}{1}=\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\frac{n}{1}=\frac{(n+1)\,n}{1\,.\,2}$$

$$\frac{n(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}=\left(\frac{n-2}{3}+1\right).\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

&a. &a. &a.

$$\frac{n\,(n-1)\ldots(n-p+3)\,(n-p+2)}{1.2.3\ldots(p-2)\,(p-1)}+\frac{n\,(n-1)\ldots(n-p+3)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-2)}$$

$$=\left(\frac{n-p+2}{p-1}+1\right)\frac{n(n-1)\ldots(n-p+3)}{1\,.\,2\,.\,3\ \ldots(p-2)}=\frac{(n+1)\,n(n-1)\ldots(n-p+3)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-2)\,(p-1)}$$

Luego, supuesto que (a) contiene los coeficientes verdaderos de la potencia *n*, los coeficientes verdaderos de la potencia n+1, serán los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ \frac{n+1}{1};\ \frac{(n+1)n}{1.2};\ \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3};\ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} \\ \ldots\ldots\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+3)}{1.2.3\ldots(p-2)(p-1)} \end{array}\right\}(b)$$

Pero estos se hallan inmediatamente de las fórmulas (a), poniendo en las mismas n+1 en lugar de n.

Luego queda demostrado: *Si (a) contiene los verdaderos coeficientes de la potencia n, contendrá tambien los de la potencia n+1, poniendo n+1 en lugar de n.*

Puede enunciarse la misma consecuencia de esta manera: *Si (a) contiene los verdaderos coeficientes de una potencia, cualquiera que sea, contendrá tambien los de la potencia superior inmediata, poniendo en lugar de n el esponente respectivo.*

Pero sabemos, que (a) contiene los coeficientes verdaderos de la 1ª potencia para $n=1$; luego contendrá tambien los de la 2ª potencia para $n=2$, y por consiguiente tambien los de la 3ª potencia para $n=3$, luego tambien los de la 4ª para $n=4$ &a. hasta el infinito.

Por consiguiente, en (a) tenemos verdaderamente los coeficientes generales del binomio, que pertenecen á la n^{sima} potencia del mismo.

El desarrollo completo de la n^{sima} potencia del binomio $a+b$ tendrá la forma:

$$(a+b)^n$$
$$=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots$$

y cuando se pone $-b$ en lugar de b.

$$(a-b)^n$$
$$=a^n-\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3+\ldots$$

en donde todos los términos del orden par, que tienen b con esponente impar, son negativos.

Finalmente poniendo $a=1$, $b=\pm x$, tendremos la forma mas sencilla de las mismas series:

$$(1\pm x)^n=1\pm\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2\pm\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Sábese que no tenemos mas que n+1 términos, haciéndose todos los siguentes iguales á cero.

El teorema que acabamos de demostrar, se llama *el teorema de Newton,* por el nombre de su inventor, el mas célebre de todos los matemáticos, inventor tambien del cálculo infinitesimal, de las leyes de la atraccion universal é infinitas verdades físicas.

ARTICULO II.

Raices con indices enteros.

§. 63.

Esplicaciones.

1.° En el cálculo con potencias, se distinguen como cantidades diferentes: la base, el esponente y el valor de la potencia. La operacion aritmética, que se llama *formacion de potencias*, da *el valor de la potencia* y supone que la base y el esponente sean conocidos.

Si, por el contrario, *la base* es incógnita, pero el valor de potencia y el esponente son conocidos, el cálculo se convierte en *la formacion ó estraccion de la raiz*, de modo que *raiz* se llame la base desconocida.

Finalmente, si *el esponente* es incógnito y las otras cantidades, valor de potencia y la base conocidas, el cálculo se convierte en *la formacion del logaritmo*, de modo que *logaritmo* se llame el esponente desconocido.

Por esto, el cálculo con potencias tiene *dos inversiones:* el cálculo con raices y el cálculo con logaritmos.

2° La raiz del grado n de un número a, es un número r, que elevado á la potencia n, reproduce el número a Esta definicion se escribe en forma aritmética:

$$\left.\begin{array}{l}(\sqrt[n]{a}\,)^n = a\,; \quad \text{ó bien} \\ \sqrt[n]{a} = r, \quad \text{luego} \quad a = r^n\end{array}\right\} \quad [I]$$

Se llama r raiz [real], n índice de la raiz, a cantidad subradical, $\sqrt[n]{a}$ cantidad radical ó tambien raiz [indicada].

3° Se infiere que

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad [II]$$

Es decir: la n^{sima} raiz de una n^{sima} potencia, es la base de la potencia. Porque la raiz que se busca, elevada á la n^{sima} potencia, debe ser igual á a^n; pero solo el número a, elevado á la n^{sima} potencia da a^n.

4° *Números racionales é irracionales.* Cuando se eleva un quebrado á una potencia cualquiera, el resultado será siempre un quebrado, nunca un número entero. Porque si suponemos que

$\frac{a}{b}$ sea un quebrado, reducido á su forma mas simple, de modo que a y b sean primos entre sí, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ será tambien un quebrado; pues en la suposicion opuesta b^n seria factor de a^n, lo que no es posible.

Por inversion resulta que: *una raiz cualquiera de un número entero nunca es un quebrado.* Porque si lo fuese, dicho quebrado elevado á la potencia que indica el índice de la raiz, produciria un número entero, lo que segun lo anterior nunca sucede.

Por otra parte: *la raiz de un número entero frecuentemente no es un número entero.* Siendo por ejemplo

$$4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 \quad \text{será}$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{7} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$$

pero tenemos $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{9} = 3$ como números enteros consecutivos; luego $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ no serán enteros. Segun lo que precede, tampoco serán quebrados.

De semejante modo tenemos $\sqrt[3]{8} = 2$ y $\sqrt[3]{27} = 3$, luego las raices cúbicas de todos los números enteros desde 3 hasta 26 no son enteros y tampoco quebrados.

Por consiguiente hay muchas cantidades radicales que no son ni números enteros ni quebrados y se trata de estas en el § siguiente.

§. 64.

De las cantidades irracionales é inconmensurables.

1° Esplicacion. *Las cantidades radicales, cuyo valor no puede representarse exactamente, ni por un entero ni por un quebrado, se llaman cantidades ó números irracionales.* Por oposicion, todas las demas cantidades, cuyo valor puede representarse exactamente por un número entero ó por un quebrado, se llaman *cantidades ó números racionales.*

Lámanse así, porque las cantidades de la última especie *tienen una comun medida con la unidad* y por esto la *razon geométrica de las mismas* á la unidad entera, puede representarse por términos que son números enteros finitos. Así, por ejemplo,

17 es racional, pues 17 y 1 tienen la comun medida 1, y la razon 17 : 1 contiene como términos números enteros finitos. Asimismo

$\frac{9}{35}$ es racional, pues $\frac{9}{35}$ y 1 tienen la comun medida $\frac{1}{35}$ y la razon $\frac{9}{35}:1$ se puede representar por la razon $9:35$, que contiene tambien como términos números enteros finitos.

Por inversion, cuando la razon geométrica de un número á la unidad puede representarse por números enteros y finitos, dicho número será racional, es decir, será un entero ó quebrado. Pues, si $N:1=a:b$, será $N=\frac{a}{b}$, luego el número N será un quebrado, cuando *a* y *b* son números enteros y finitos, y será un número entero, cuando ademas *b* es igual á la unidad ó factor de *a*.

Se deduce que un número irracional no tiene una comun medida con la unidad, y por esto su razon geométrica á la unidad no puede representarse por términos enteros finitos.

2° Sin embargo, todo número irracional puede representarse *con cualquiera aproximacion* por medio de quebrados, cuyos términos crecen indefinidamente con el grado de la aproximacion.

En efecto, sea

$$2,\ 2+\frac{1}{n},\ 2+\frac{2}{n},\ldots 2+\frac{m}{n},\ 2+\frac{m+1}{n},\ldots 2+\frac{n-1}{n},\ 3$$

una serie de quebrados con el denominador *n*, interpolada entre dos números consecutivos 2 y 3. Como es $4<7<9$, será $2<\sqrt{7}<3$, luego, $\sqrt{7}$ tendrá un lugar determinado en la serie anterior, por ejemplo entre los quebrados mistos consecutivos $2+\frac{m}{n}$ y $2+\frac{m+1}{n}$, siendo siempre distinta de ellos. Luego será

$$2+\frac{m}{n}<\sqrt{7}<2+\frac{m+1}{n}$$

y restándose $2+\frac{m}{n}$ de cada uno de los miembros de esta desigualdad, se tendrá

$$0<\sqrt{7}-\left(2+\frac{m}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

Cuando *n* crece indefinidamente, el quebrado $\frac{1}{n}$ tiende hácia el límite cero, que está tambien en el primer miembro de la desigualdad; luego tenemos con una aproximacion tan grande como se quiera:

$$\sqrt{7}=2+\frac{m}{n} \qquad (\alpha)$$

en donde $2+\frac{m}{n}$ es un quebrado (misto), cuyo denominador *n* con el grado de aproximacion crece hácia el infinito. Aun *m* crece indefinidamente; pues $\sqrt{7}$ tiene un lugar fijo en la serie anterior, y como el número n de todos los términos puede ser mayor que todo número finito asignable, así el número m de los términos entre 2 y $\sqrt{7}$ tendrá la misma propiedad, aunque siempre sea $<n$. Es objeto de la estraccion de la raiz, determinar el número m verdadero que conviene á un denominador n determinado.

Las mismas razones se aplicarán á toda cantidad irracional, y será con una aproximacion tan grande como se quiera

$$\sqrt[p]{N} = N' + \frac{m}{n} = \frac{m'}{n}$$

en donde N′ es el máximo entero contenido en la raiz, $m'=N'n+m$, y m y n con el grado de la aproximacion tienden hácia el infinito.

3° A pesar de esto, la igualdad anterior (α), nunca será *perfecta*, tan grande que sea n ó tan pequeña que sea el quebrado propio $\frac{1}{n}$ y por consiguiente este quebrado nunca será una medida comun entre la unidad y la raiz.

Dos cantidades que no tienen medida comun, se llaman *cantidades inconmensurables;* se llaman *conmensurables* en el caso opuesto.

Cantidades que son inconmensurables *con la unidad por ser raices*, especialmente toman el nombre *de cantidades irracionales*; y todas las cantidades que son inconmensurables *con la unidad por otra razon* (por ser logaritmos, funciones goniométricas) se dicen *cantidades transcendentes.*

Toda cantidad que es inconmensurable con otra, puede espresarse con cualquiera aproximacion por medio de partes bastante pequeñas de la otra. Si A y B son dos cantidades inconmensurables, partiendo B en n partes iguales, una de estas partes estará contenida m veces en A y quedará un resto r, que es $<\frac{B}{n}$, de modo que sea

$$A = \frac{m}{n} B + r$$

en donde r puede ser menor que toda cantidad asignable y por consiguiente despreciarse.

4° Pueden representarse exactamente algunas cantidades irracionales por medio de la geometría, á saber, las raices cuadradas. Tírese, por ejemplo, [fig. 1] una recta AB igual á la unidad, prolónguese esta de n unidades hàcia C; despues construyendo un semicírculo sobre el diámetro AC, levántese una perpendicular en B sobre AC hasta el punto D de interseccion con el semicírculo. Representará BD la media proporcional geométrica entre AB y BC, y será

$$BD=\sqrt{AB.BC}=\sqrt{1.n}=\sqrt{n}$$

Luego BD representa exactamente el número $\sqrt{n}$, que generalmente es irracional. Suponiendo por ejemplo que n sea $=5$, será

$$BD=\sqrt{5}$$

Sábese ademas, que

$$AB:AD=AD:AC$$
$$BC:DC=DC:AC$$

luego, para nuestra suposicion n=5, será

$$AD=\sqrt{1.6}=\sqrt{6}\,; \quad DC=\sqrt{5.6}=\sqrt{30}$$

Aunque AB y BC sean conmensurables entre sí y con la unidad, no lo son respecto á AD, BD y CD; y este caso de no ser conmensurables las líneas, áreas &a, en la geometría es el mas frecuente.

5º Suponiendo que A sea un número inconmensurable con la unidad y representando A por una fraccion con términos indefinidamente grandes

$$A=\frac{m}{n}$$

una parte $\frac{1}{n}$ de la unidad se llama *parte virtual* de la cantidad A, aunque en realidad nunca pueda asignarse como cantidad determinada. Una cantidad inconmensurable será mayor ó menor que otra cantidad, cuando tiene un número mayor ó menor de *partes virtuales de la misma especie*, es decir, que se obtienen por division de la unidad por el mismo número n. Así, en la geometría, una línea inconmensurable será mayor que otra línea, cuando en la primera se concibe un número mayor de puntos que en la última, dispuestos segun la misma manera de distribucion, pudiendo ser la distancia entre dos puntos consecutivos menor que toda distancia asignable.

6º Aplícanse todas las definiciones generales de las operaciones aritméticas á las cantidades inconmensurables, considerándolas como teniendo partes virtuales de la unidad. Especialmente

1] *Sumar* un número irracional a con otro [racional ó irracional] b, es hallar un número nuevo s, que tenga *todas las partes virtuales* que contienen a y b.

2] *Multiplicar* un número [racional ó irracional] a por otro irracional b, es formar un nuevo número p que es á a como la multitud de las partes virtuales de b es á la multitud de las partes virtuales de la unidad.

Las demas definiciones no hacen ninguna dificultad.

7º *Todos los teoremas ya demostrados para cantidades racionales, va-*

len tambien para cantidades irracionales. Pues tenemos $\frac{m}{n} < A < \frac{m+1}{n}$ y todos los teoremas tienen lugar como para $\frac{m}{n}$, así para $\frac{m+1}{n}$, tan grande que sean m y n; luego no pueden dejar de valer los mismos teoremas para A, siendo en el límite $\frac{m}{n} = \frac{m+1}{n} = A$.

§. 65.

Multiplicacion y division de cantidades radicales que tienen un mismo índice.

Teorema 9. Cantidades radicales que tienen un mismo índice, quedarán multiplicadas entre sí, estrayendo la misma raiz al producto de las cantidades subradicales.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad [9]$$

Dem. Segun la ecuacion II podremos $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ elevar á la n^{sima} potencia, y despues estraer la n^{sima} raiz, sin mudar el valor del todo; luego será

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n}$$

$$= \sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n} \qquad \text{[T. 3 corol.]}$$

$$= \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \text{[definicion]}$$

Corolario 1. Para estraer la raiz á un producto, se podrá estraer la misma raiz á cada uno de los factores.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Se tiene por inversion del teorema.

Corolario 2. Para simplificar las cantidades radicales, se deben estraer las raices á los factores de las cantidades subradicales, si es posible. Por ejemplo:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = 4\sqrt{3}; \quad \sqrt{180} = \sqrt{9.4.5} = 3.2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}; \quad \sqrt[3]{ax^3 - bx^3} = \sqrt[3]{x^3[a-b]} = x\sqrt[3]{a-b}$$

$$\sqrt{\frac{24}{25}} = \sqrt{\frac{4.6}{5.5}} = \frac{2}{5}\sqrt{6}; \sqrt[3]{\frac{54a^3}{125}} = \sqrt[3]{\frac{27.2a^3}{125}} = \frac{3}{5}a\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt{32}+\sqrt{50}=\sqrt{16.2}+\sqrt{25.2}=4\sqrt{2}+5\sqrt{2}=9\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{320}=\sqrt[3]{8.5}+\sqrt[3]{8.8.5}=2\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{5}=6\sqrt[3]{5}$$

Corolario 3. Para quitar un número irracional del denominador de una fraccion, se aplicarán las reglas siguientes:

Regla I. *Cuando el denominador es un monómio, los dos términos de la fraccion se multiplicarán por tal potencia del divisor irracional, que la raiz indicada pueda estraerse.*

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}.\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b};\quad \frac{3\sqrt{x}-2x}{\sqrt{x}}=\frac{3x-2x\sqrt{x}}{x}=3-2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2};\quad \frac{1+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{16}}{2}=2+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}.\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\tfrac{1}{5}\sqrt[3]{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\tfrac{1}{5}\sqrt[3]{25};\quad \frac{8}{\sqrt[4]{4}}=\frac{8\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{8\sqrt[4]{4}}{2}=4\sqrt[4]{4}$$

$$\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}=\frac{\sqrt{a+b}.\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}.\sqrt{a-b}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$$

Regla II. *Si el denominador es una suma ó diferencia, que tiene términos afectados del signo radical cuadrado, el numerador y denominador de la fraccion se multiplicarán respectivamente por la diferencia ó suma de los mismos términos.*

$$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}=5+2\sqrt{6}$$

$$\frac{3\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}-3}=\frac{(3\sqrt{5}-2)(2\sqrt{5}+3)}{(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3)}=\frac{30-4\sqrt{5}+9\sqrt{5}-6}{20-9}=\frac{24+5\sqrt{5}}{11}$$

Teorema 10. Una cantidad radical quedará dividida por otra que tiene el mismo índice, estrayendo la misma raiz al cociente de las cantidades subradicales.

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b} \qquad [10]$$

DEM. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b})^n}$ segun II.

$$=\sqrt[n]{(\sqrt[n]{a})^n:(\sqrt[n]{b})^n} \qquad \text{[T. 4 corol.]}$$

$$=\sqrt[n]{a:b} \qquad \text{[definicion]}$$

COROLARIO. Para estraer la raiz á un cociente, se podrá estraer la misma raiz al dividendo y divisor del cociente.

$$\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$$

Se saca por inversion del teorema.

Tenemos por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{\sqrt{4.6}}{\sqrt{25}}=\tfrac{2}{5}\sqrt{6};\quad \sqrt[3]{\frac{54}{125}}=\frac{\sqrt[3]{27.2}}{\sqrt[3]{125}}=\tfrac{3}{5}\sqrt[3]{2}$$

§. 66.

Relaciones entre las potencias y raices.

TEOREMA 11. Una cantidad radical no cambia de valor, multiplicando ó dividiendo el índice y el esponente de la cantidad subradical por un mismo número entero.

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[x]{a^y}&=\sqrt[xn]{a^{yn}}\\ \sqrt[x]{a^y}&=\sqrt[x:m]{a^{y:m}}\end{aligned}\right\} \quad [11]$$

Se supone m comun divisor de x é y.

DEM. 1ª PARTE. Tenemos

$$(\sqrt[x]{a^y})^x=a^y \qquad \text{[definicion]}$$

luego $(\sqrt[x]{a^y})^{xn}=a^{yn}$ [T. 5]

y estrayendo la raiz del grado xn, se tendrá

$$\sqrt[x]{a^y}=\sqrt[xn]{a^{yn}}$$

DEM. 2ª PARTE. Si m es comun divisor de x é y, los cocientes $x:m$ é $y:m$ serán números enteros; luego podremos hacer aplicacion de la primera parte, y será

$$\sqrt[x:m]{a^{y:m}}=\sqrt[(x:m)m]{a^{(y:m)m}}=\sqrt[x]{a^y}$$

COROLARIO 1. Cuando el índice es divisible por el esponente, se quitará el esponente; y cuando el esponente es divisible por el índice, se quitará el signo radical. En uno y otro caso la espresion tendrá la forma mas sencilla que puede tener respecto al índice y esponente. Por ejemplo:

$$\sqrt[27]{a^9} = \sqrt[27:9]{a^{9:9}} = \sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a}$$

$$\sqrt[3]{a^{15}} = \sqrt[3:3]{a^{15:3}} = \sqrt[1]{a^5} = a^5$$

Corolario 2. Para reducir á un mismo índice cantidades radicales, que tienen índices diferentes, se buscará el mínimo comun múltiplo de los índices, y se multiplicarán los índices y esponentes de las cantidades radicales por el cociente respectivo que se obtiene, dividiendo dicho comun múltiplo por el índice de la cantidad radical respectiva. Así

$$\sqrt[3]{a^5},\ \sqrt[4]{a^3},\ \sqrt[2]{a} \text{ son iguales á } \sqrt[3.4]{a^{5.4}}\ \sqrt[4.3]{a^{3.3}},\ \sqrt[2.6]{a^{1.6}}$$

$$\text{ó bien á } \sqrt[12]{a^{20}},\ \sqrt[12]{a^9},\ \sqrt[12]{a^6}$$

Se usa este corolario para la multiplicacion y division de cantidades radicales que no tienen un mismo índice.

Teorema 12. Cuando un número tiene que elevarse á una potencia y despues se debe estraer la raiz al resultado, el órden de las dos operaciones se puede tambien invertir sin alterar el valor del resultado.

$$\sqrt[x]{a^y} = (\sqrt[x]{a})^y \qquad [12]$$

Dem.

$$\sqrt[x]{a^y} = \sqrt[x]{a.a.a.\ldots y \text{ veces}}$$

$$= \sqrt[x]{a}.\ \sqrt[x]{a}.\ \sqrt[x]{a}.\ldots\ y \text{ veces}$$

$$= (\sqrt[x]{a})^y$$

Tendremos por ejemplo:

$$\sqrt[4]{16^5} = (\sqrt[4]{16})^5 = 2^5; \quad \sqrt[3]{54^2} = (\sqrt[3]{27.2})^2 = (3\sqrt[3]{2})^2 = 9\sqrt[3]{4}$$

§. 67.

Raices de raices.

Teorema 13. Para estraer la raiz á otra raiz, se multiplicarán los índices de las raices.

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a} \qquad [13]$$

DEM. Tenemos

$$\left(\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}\right)^x = \sqrt[y]{a}$$

$$\left(\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}\right)^{xy} = (\sqrt[y]{a})^y = a$$

luego, estrayendo la raiz del grado xy, se tiene

$$\sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[xy]{a}$$

COROLARIO 1. Tenemos tambien

$$\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[yx]{a} = \sqrt[xy]{a}$$

luego $$\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}$$

es decir: Cuando se deben estraer sucesivamente dos raices á un mismo número, el órden de estraer dichas raices puede variarse como se quiera, sin que el resultado cambie de valor.

COROLARIO 2. Se saca por inversion del teorema:

$$\sqrt[xy]{a} = \sqrt[x]{\sqrt[y]{a}} = \sqrt[y]{\sqrt[x]{a}}$$

es decir: Cuando el índice es un producto, primeramente se puede estraer la raiz, que indica uno de los factores de dicho producto, y despues la raiz que indica el otro factor. Así es por ejemplo:

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

ARTICULO III.

Potencias y raices con esponentes é índices fraccionarios.

§. 68.

Potencias con esponentes fraccionarios en general.

Esplicaciones.

1º Tenemos las igualdades

$a^{N+n} = a^N \cdot a^n$ [T. 1 corol.]

$a^{N-n} = a^N : a^n$ [T. 2 corol.]

$$a^{N.n} = (a^N)^n \qquad [T. 5]$$

$$a^{N:n} = \sqrt[n]{a^N} \qquad [T. 11.]$$

es decir:

a) La adicion de los esponentes designa una multiplicacion.
b) La sustraccion de los esponentes designa una division.
c) La multiplicacion de los esponentes designa una formacion de potencias.
d) La division de los esponentes designa una estraccion de raiz.

En cualquier caso, una operacion aritmética con los esponentes, designa la operacion superior inmediata en la otra parte de la ecuacion, siendo

la multiplicacion la operacion superior inmediata *de la adicion*
la division ....*de la sustraccion*
la formacion de potencia ....*de la multiplicac.*
la estraccion de raiz......................... *de la division.*

2° Las potencias con el esponente cero y con esponentes positivos y negativos no están contenidas en la definicion que hemos dado de las potencias. Pero como tenemos una definicion general de la multiplicacion, así podremos poner aquí una definicion general de la formacion de potencias, la cual contenga todos los casos de potencia que hemos visto, y tambien potencias con esponentes fraccionarios. A este fin haremos aplicacion de las propiedades de las potencias que hemos encontrado en el N° 1°

Definicion general de las potencias. Elevar un número a *á una potencia* n, *es: formar del número* a *por la operacion superior inmediata un nuevo número* p *del mismo modo que el esponente* n *está formado de la unidad entera y absoluta.*

Por esta definicion tenemos:

1) $a^3 = a.a.a$; pues $3 = 1 + 1 + 1$

Para formar 3 de la unidad entera y absoluta, se pone primeramente la unidad absolutamente y despues se *suman* con ella otras dos unidades

$$3 = 1+1+1$$

Luego se pondrá absolutamente la cantidad *a*, y como la operacion superior inmediata de la adicion es la multiplicacion, se pondrá el signo de la multiplicacion en lugar del signo de la adicion, y *a* en lugar de 1, de modo que sea

$$a^3 = a.a.a$$

Tenemos:

2) $a^0 = \frac{a}{a} = 1$; pues $0 = 1 - 1$

Para formar cero de la unidad, es preciso restar la unidad de la unidad dada $0 = 1 - 1$; poniendo *a* en lugar de 1, y el signo de la division en lugar del signo de la sustraccion, se tiene $a^{\circ}=\frac{a}{a}=1.$

Tenemos ademas:

3) $a^{+3}=1.a.a.a$; pues $+3=0+1+1+1$

El signo $+$ del esponente supone un sumando, y no hay otro sumando que cero, cuya suma con 3 sea igual á $+3$, luego $+3=0+3=0+1+1+1$. Luego formaremos la potencia buscada, sustituyendo en el segundo miembro de la ecuacion

$$+3=(1-1)+1+1+1$$

a en lugar de 1, el signo de division en lugar del signo de sustraccion y el signo de multiplicacion en lugar del signo de adicion. Con esto se tiene

$$a^{+3}=\frac{a}{a}.a.a.a=1.aaa=1.a^3$$

Del mismo modo es:

4) $a^{-3}=1:a:a:a$; pues $-3=0-1-1-1$

Siendo por las mismas razones

$$-3=(1-1)-1-1-1$$

será $$a^{-3}=\frac{a}{a}:a:a:a=1:a.a.a=1:a^3$$

Será de semejante modo

5) $a^{3.4}=(a^3)^4$; pues $3.4=(1+1+1)\times 4$

Como $3.4=(1+1+1)+(1+1+1)+\ldots$ 4 veces; será

$$a^{3.4}=a.a.a\times a.a.a\times\ldots \text{ 4 veces}$$
$$=a^3.a^3.a^3.a^3=(a^3)^4$$

Ademas tenemos:

6) $a^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[4]{a})^3$; pues $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

Para formar $\frac{3}{4}$, la unidad se *descompone* en 4 partes iguales, cuya suma es la unidad; despues se *suman* tres de estas partes. Luego como

$$1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\text{, por la definicion}$$

será $$a=\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{a}$$

es decir *a* se descompone en 4 partes iguales, cuyo *producto* es *a*; pero tal parte es $\sqrt[4]{a}$. Ademas como

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

será $$a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{a}=(\sqrt[4]{a})^3$$

Finalmente

7) $a^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{(\sqrt[4]{a})^3}$; pues $-\frac{3}{4}=0-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$

y poniendo 1 en lugar de 0 [segun Nº 2], $\sqrt[4]{a}$ en lugar de $\frac{1}{4}$ y el signo de division en lugar del signo de sustraccion, se tiene

$$a^{-\frac{3}{4}} = 1 : \sqrt[4]{a} : \sqrt[4]{a} : \sqrt[4]{a} = 1 : (\sqrt[4]{a})^3$$

3º En virtud de esta definicion general de las potencias, tenemos

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad [I]$$

1) *Una potencia con esponente fraccionario designa una cantidad radical, que tiene por índice el denominador, y por esponente el numerador del esponente fraccionario; siendo la cantidad subradical la misma que la base de la potencia dada.*

Tenemos ademas

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^m} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \qquad [II]$$

2) *Una potencia con esponente fraccionario negativo es la unidad dividida por la misma potencia con esponente absoluto.*

Luego vale aquí la misma ley que hemos encontrado en el § 59 para esponentes enteros y negativos.

§. 69.

Teoremas sobre potencias con esponentes fraccionarios.

Todos los teoremas ya establecidos para potencias con esponentes enteros, valen tambien para potencias con esponentes fraccionarios. Para demostrar esto, es preciso convertir las potencias con esponentes fraccionarios en raices, luego se aplicarán los teoremas relativos á las raices ya conocidos, y finalmente los resultados así encontrados de nuevo se convertirán en potencias con esponentes fraccionarios.

Teorema 1*. Las potencias de la misma base quedarán multiplicadas entre sí, sumando sus esponentes y dando la suma obtenida por esponente á la base comun, la que se escribe una sola vez [cf. teor. 1].

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \qquad [1^*]$$

Dem. Como

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{y} \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \qquad \text{será}$$

$$a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} . \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} . \sqrt[nq]{a^{np}} \qquad [T. 11]$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \qquad [T. 9]$$

EJEMPLO. $\sqrt{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^4}\cdot\sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{3}{2}}\cdot a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{5}{4}} = a^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}} = a^{\frac{49}{12}}$

$$= a^{4+\frac{1}{12}} = a^4\cdot a^{\frac{1}{12}} = a^4\sqrt[12]{a}$$

TEOREMA 2*. Las potencias se dividen por otras de la misma base, restando el esponente que tiene el divisor del esponente que tiene el dividendo y dando el resto encontrado á la base comun que se escribe una sola vez [teor. 2].

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \qquad [2*]$$

DEM. Como

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{y} \quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad \text{será}$$

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} : \sqrt[nq]{a^{np}} \qquad [T. 11.]$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq} : a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} \qquad [T. 10.]$$

$$= a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

EJEMPLO. $\sqrt[5]{a^{32}} : \sqrt{a^7} = a^{\frac{32}{5}} : a^{\frac{7}{2}} = a^{\frac{32}{5}-\frac{7}{2}} = a^{\frac{64-35}{10}}$

$$= a^{\frac{29}{10}} = a^{2+\frac{9}{10}} = a^2\sqrt[10]{a^9}$$

TEOREMA 3*. Potencias que tienen los mismos esponentes, quedarán multiplicadas entre sí, elevando el producto de las bases á la potencia del esponente comun (teor. 3.)

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} = (ab)^{\frac{m}{n}} \qquad [3*]$$

DEM. Tenemos.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{y} \quad b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}, \quad \text{luego será}$$

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^m\cdot b^m} \qquad [T. 9]$$

$$= \sqrt[n]{(ab)^m} = (ab)^{\frac{m}{n}}$$

EJEMPLO. $3^{\frac{2}{3}}\cdot 9^{\frac{2}{3}} = (3.9)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

TEOREMA 4*. Una potencia quedará dividida por otra que tiene el mismo esponente, elevando el cociente de las bases á la potencia del esponente comun [teor. 4].

$$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a:b)^{\frac{m}{n}} \qquad [4*]$$

Dem. Tenemos

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \quad y \quad b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^m}, \text{ luego será}$$

$$a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[n]{b^m}=\sqrt[n]{a^m:b^m} \qquad [T.\ 10.]$$

$$=\sqrt[n]{(a:b)^m}=(a:b)^{\frac{m}{n}}$$

Teorema 5*. Una potencia quedará elevada á otra potencia, multiplicando entre sí los esponentes (teor. 5).

Dem. Tenemos

$$(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^{\frac{m}{n}})^p}=\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}=\sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} \qquad [T.\ 12.]$$

$$=\sqrt[nq]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{nq}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$$

Ejemplo. $(a^{\frac{27}{10}})^{\frac{15}{18}}=a^{\frac{27\cdot15}{10\cdot18}}=a^{\frac{9}{4}}=a^2\sqrt[4]{a}$

Escolio. Pudiéndose ahora sustituir los teoremas 1*—5* en lugar de los teoremas 1—5, se sigue, que todos los corolarios de estos teoremas se aplican tambien para esponentes fraccionarios; y asimismo todas las consecuencias de los mismos teoremas serán verdaderas, aunque los esponentes se supongan ser quebrados, especialmente el teorema 7 se aplicará para esponentes fraccionarios.

De donde se saca, que los teoremas 1—5 son verdaderos para esponentes cualesquiera, positivos, negativos, enteros, fraccionarios é iguales á cero.

§. 70.

Raices con índices fraccionarios.

1º La estraccion de raiz es la inversion de la formacion de potencias, y reteniendo la misma definicion de las raices que hemos dado al principio del Art. II, ahora el índice podrá ser cualquier número, positivo ó negativo, entero ó fraccionario; pues el esponente n en la ecuacion

$$(\sqrt[n]{a})^n=a \qquad (III)$$

que representa la definicion de las raices, puede ser cualquier número.

Se infiere ahora:

1) *Una cantidad radical con índice cualquiera, puede escribirse como potencia de la cantidad subradical con un esponente que es el índice invertido.*

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(IV)}$$

designando n cualquier número.

Pues tenemos $(a^{\frac{1}{n}})^n = a = (\sqrt[n]{a})^n$.

2) *Una cantidad radical con índice fraccionario equivale á una cantidad radical, que tiene por índice el numerador y por esponente el denominadar del índice fraccionario. Porque*

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \qquad \text{(V)}$$

3) *Una cantidad radical con índice negativo equivale á la unidad dividida por la misma cantidad radical con índice absoluto.* (cf. § 68, 3° 2). Porque

$$\sqrt[-n]{a} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \qquad \text{(VI)}$$

2° Los teoremas que valen para raices con índices enteros, valen tambien cuando los índices son quebrados, negativos ó números inconmensurables. Pero, mediante las reglas anteriores (IV, V, VI), todas estas raices, en el cálculo, se convierten en potencias, ó en raices con índices enteros y positivos.

ARTICULO IV.

Estraccion de la raiz cuadrada y cúbica.

§. 71.

Cuadrado de los números enteros.

1° Tenemos

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$$

Sustituyendo el valor de $(a+b)^2$ de la primera ecuacion en la segunda, y despues el valor encontrado de $(a+b+c)^2$ en la tercera, se tendrá

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2 = a^2 & \\ +2ab+b^2 & \\ +2(a+b)c+c^2 & \\ +2(a+b+c)d+d^2 &\end{aligned}$$

Por induccion podremos concluir que será

$$
\left.
\begin{aligned}
(a+b+c+\ldots p+q)^2 = a^2 & \\
+\, 2ab+b^2 & \\
+\, 2(a+b)c+c^2 & \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
+\, 2\,(a+b+c+\ldots+p)\,p+p^2 &
\end{aligned}
\right\} \quad (\mathrm{I})
$$

y suponiendo esta fórmula como verdadera, añadiendo otro sumando r á continuacion del polinómio anterior, será

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+\ldots+p+q+r)^2 = {} & (a+b+c+\ldots+p+q)^2 \\
& + 2(a+b+c+\ldots+p+q)\,r+r^2
\end{aligned}
$$

es decir, á la derecha de la ecuacion anterior (I), se añade un renglon mas, formado segun la ley que se observa en los renglones que preceden.

Concluimos: *Cuando la ley contenida en* (I) *es verdadera para un solo polinómio, cualquiera que sea, será tambien verdadera para un polinómio que tiene un término mas.*

Pero es verdadera para un polinómio de dos términos, pues

$$
\begin{aligned}
(a+b) = {} & a^2 \\
& + 2ab+b^2
\end{aligned}
$$

luego será verdadera para un polinómio de 3 términos, luego tambien para uno de 4, 5, 6....n términos.

2° Aplicando ya la regla espuesta á un número entero, que es >10, por ejemplo, á 3417, se sigue

$$
\begin{array}{lrrr}
3417^2=(3000+400+10+7)^2= & & 3000^2 \ldots & 9000000 \\
& +2.3000\,.\,400 & \ldots & 2400000 \\
& & +400^2 \ldots & 160000 \\
& +2.3400\,.\,10 & \ldots & 68000 \\
& & +\;10^2 \ldots & 100 \\
& +2.3410\,.\;7 & \ldots & 47740 \\
& & +\;7^2 \ldots & 49 \\
\hline
& & 3417^2 = & 11675889
\end{array}
$$

Cada renglon tiene un cero ménos que el renglon que precede, propiedad que se sigue inmediatamente de la disposicion de los facteres que están á la izquierda.

Omitiendo los ceros, se tiene de una manera mas simple

$$
\begin{array}{lrr}
 & 3417^2 & \\
\hline
 & 3^2 \ldots & 9 \\
2. & 3.4 \ldots & 24 \\
 & 4^2 \ldots & 16 \\
2. & 34.1 \ldots & 68 \\
 & 1^2 \ldots & 1 \\
2. & 341.7 \ldots & 4774 \\
 & 7^2 \ldots & 49 \\
\hline
 & & =11675889
\end{array}
$$

En los renglones consecutivos la unidad constantemente pasa de un lugar mas á la derecha.

Puede simplificarse aun el cálculo por la fórmula $2ab+b^2=(2a+b)b$; de donde

3417^2

	3^2	....3^2......	9
(2.3.4+4).4	......64.4	......	2|56
(2.34.1+1).1	.... 681.1	......	6|81
(2.341.7+7).7	....6827.7	......	4|77|89
			11|67|58|89

Pasa la unidad, en cada renglon consecutivo, de dos lugares mas á la derecha; de donde el resultado *se parte en 4 clases* desde la derecha á la izquierda, *conteniendo cada clase 2 cifras*, hasta la última clase á la izquierda, que podria contener tambien una sola cifra, lo que sucederia por ejemplo por el cuadrado de 2417. Obsérvese:

1) el primer renglon contiene el cuadrado de la primera cifra 3, que está contenida en 3417.

2) el segundo renglon contiene el doble 6 de esta cifra, á la que se añade la cifra siguiente 4, de modo que tengamos 64 y este número se multiplica por la misma segunda cifra.

3) el tercer renglon contiene el doble 68 de las dos primeras cifras 34, que están contenidas en 3417, se añade la tercera cifra, de modo que tengamos 681 y este número se multiplica por la misma tercera cifra.

4) el cuarto renglon, de semejante modo, contiene el doble 682 de las tres primeras cifras que están contenidas en 3417, se añade la cuarta cifra, de modo que tengamos 6827, y este número se multiplica por la misma cuarta cifra.

Ejemplo II. Búscase el cuadrado de 24351.

24351^2

2^2	......	4
44.4	......	1|76
483.3	......	14|49
4865.5	......	2|43|25
48701.1	......	4|87|01
		5|92|97|12|01

Ejemplo III. Búscase el cuadrado de 546512

546512^2

5^2	......	25
104.4	......	4|16
1086.6	......	65|16
10925.5	......	5|46|25
109301.1	......	10|93|01
1093022.2	......	2|18|60|44
		29|86|75|36|61|44

§. 72.

Estraccion de la raiz cuadrada de números determinados.

I. Caso. *El número dado es un cuadrado perfecto.* Cuando el número dado, de el cual se busca la raiz cuadrada es <100, las raices se hallan en la tabla siguiente:

Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Cuando el número dado es >100, obsérvense las reglas siguientes, que son la inversion de lo que enseña el § precedente:

1) El número dado pártase desde su derecha hacia la izquierda en clases de dos en dos cifras, con lo cual la suprema clase puede tener tambien una sola cifra. El número de las clases será igual al número de las cifras que contiene la raiz buscada.

2) Por medio de la tabla anterior búsquese el mayor cuadrado, que está contenido en la suprema clase, y la raiz del mismo escríbase como la primera cifra de la raiz buscada.

3) Réstese el cuadrado de la primera cifra así determinada; póngase al resto la clase siguiente y separando la última cifra de este número, divídase la otra parte por el doble de la raiz ya encontrada; póngase el cociente como segunda cifra de la raiz y ademas á continuacion del divisor.

4) Multiplíquese el divisor así completado por la segunda cifra de la raiz ya encontrada, y réstese el producto. Al resto póngase la clase siguiente, y separando la última cifra de este número, divídase la otra parte por el doble de la raiz ya obtenida; y póngase el cociente como tercera cifra de la raiz y ademas á continuacion del divisor.

5) Multiplíquese el divisor recien completado por la tercera cifra de la raiz ya hallada, y réstese el producto.

6) El mismo procedimiento se continuará hasta obtener un resto igual á cero.

La demostracion se saca inmediatamente del § precedente. Así será

EJEMPLO I. $\sqrt{11|67|58|89} = 3417$

9	
267	: 6_4
256	
1158	: 68_1
681	
47789	: 682_7
47780	
0	

EJEMPLO II. $\sqrt{5|92|97|12|01} = 24351$

4	
192	: 4_4
176	
1697	: 48_3
1449	
24812	: 486_5
24325	
48701	: 4870_1
48701	
0	

EJEMPLO III. $\sqrt{29|86|75|36|61|44} = 546512$

25	
486	: 10_4
416	
7075	: 108_6
6516	
55936	: 1092_5
54625	
131161	: 10930_1
109301	
2186044	: 109302_2
2186044	
0	

II. Caso. *Cuando la raiz cuadrada es irracional,* nunca se hallará un resto cero; pero, en este caso, despues de haber calculado al ordinario y tomado abajo todas las clases del número dado, se pondrá coma detras de la última cifra de la raiz ya encontrada y á continuacion del último resto se tomarán dos ceros, observando el mismo procedimiento como ántes, al nuevo resto se añadirán otros dos ceros &a.

Ejemplo IV. $\sqrt{7|89} = 28{,}089\ldots$

4

---

389 : 4_8
384

---

500 : 56_0
50000 : 560_8
44864

513600 : 5616_9
505521

8079 &a.

Ejemplo V. $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$

1

---

200 : 2_7
189

1100 : 34_3
1029

7100 : 346_2
6924

17600 : 3464_0
1760000 : 34640_5
1732025

27975 &a.

Dem. $\sqrt{N} = \sqrt{\frac{N.10^{2m}}{10^{2m}}} = \frac{\sqrt{N.100^m}}{10^m}$

Por consiguiente, el número N puede multiplicarse sucesivamente (*m* veces) por 100, lo que se obtiene añadiendo sucesivamente dos ceros á los restos consecutivos, y en seguida el resultado debe dividirse otras tantas veces por 10, lo que da *m* lugares decimales, es decir, cada vez uno para dos ceros.

III. Caso. *Cuando el número dado es un quebrado decimal*, se le parte en clases de dos en dos cifras desde el coma decimal hácia la izquierda y hácia la derecha; se añadirá un cero en la ínfima clase, si en la misma no hubiese sino una cifra. En seguida se estraerá la raiz al ordinario, como en el primero y segundo caso.

Ejemplo VI. $\sqrt{2|83,76|20} = 16,845....$

$$\begin{array}{rl}
1 & \\
\hline
183 & :\ 2_6 \\
156 & \\
\hline
2776 & :\ 32_8 \\
2624 & \\
\hline
15220 & :\ 336_4 \\
13456 & \\
\hline
176400 & :\ 3368_5 \\
168425 & \\
\hline
7975 &
\end{array}$$

Ejemplo VII. $\sqrt{0,00|00|00|84|23} = 0,000917....$

$$\begin{array}{rl}
81 & \\
\hline
323 & :\ 18_1 \\
181 & \\
\hline
14200 & :\ 182_7 \\
12789 & \\
\hline
1411 & \&a.
\end{array}$$

Dem. Un quebrado decimal que tiene un número par $2n$ de lugares decimales, ó lo que es lo mismo, n clases de decimales de dos en dos cifras, tiene la forma $\frac{N}{10^{2n}}$, luego será

$$\sqrt{\frac{N}{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{N}}{10^n}$$

es decir, se estrae la raiz como si el quebrado fuese un número entero, y despues se separarán n decimales, para cada clase una.

Corolario. Se estrae la raiz cuadrada á un quebrado comun, haciendo el denominador racional y despues estrayendo la raiz al numerador.

$$\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{5.3}{3.3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{15} = \tfrac{1}{3}.3{,}8730 = 1{,}2910$$

$$\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{2} = \tfrac{1}{4}.1{,}4142 = 0{,}35355$$

Sinembargo, se tendrá el mismo resultado, convirtiendo el quebrado comun en quebrado decimal, y estrayendo la raiz á este.

§. 73.

Estraccion de la raiz cuadrada de un polinómio.

Para estraer la raiz cuadrada á un polinómio, se observan las mismas reglas espuestas en el parágrafo precedente.

1) El polinómio ha de ordenarse segun las potencias decrecientes ó crecientes de la misma letra, y ademas, si hubiese diferentes letras, segun el órden alfabético de las mismas.

2) Se forma la raiz cuadrada del primer término, la cual se escribirá como primer término de la raiz buscada.

3) Réstese el cuadrado de este término encontrado, el que no es sino el primer término del polinómio dado.

4) Divídase el resto por el doble de la raiz ya obtenida. Escríbase el cociente como el término siguiente á continuacion de la raiz ya encontrada y ademas como nuevo término á continuacion del divisor.

5) El divisor así completado multiplíquese por el último término de la raiz recien hallada y réstese el producto.

6) Respecto al resto obsérvese el mismo procedimiento y así cada vez, hasta que se llegue á un resto cero, ó á un número bastante grande de términos de la raiz, en el caso de ser esta irracional.

Ejemplo I.

$$\sqrt{x^4+6x^3-x^2-30x+25} = x^2+3x-5$$

$$\begin{array}{l}
x^4 \\
- \\
\hline
+6x^3-x^2 \quad : \quad 2x^2 \\
\pm 6x^3 \pm 9x^2 = (2x^2+3x).3x \\
\hline
\qquad -10x^2-30x+25 : 2x^2+6x \\
\qquad -10x^2-30x+25 = (2x^2+6x-5).-5 \\
\qquad + \quad\; + \quad\; - \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Como primer resto se tomarán abajo dos términos del polinómio dado, y despues cada vez un término mas.

EJEMPLO II.

$$\sqrt{x^{10}-6ax^7+9a^2x^4+8a^3x^5-24a^4x^2+16a^6}=x^5-3ax^2+4a^3$$

$$\underline{\begin{array}{l} x^{10} \\ - \end{array}}$$

$$-6ax^7+9a^2x^4 \quad : (2x^5-3ax^2).-3ax^2$$

$$\underline{\begin{array}{l} -6ax^7+9a^2x^4 \\ + \quad - \end{array}}$$

$$+8a^3x^5-24a^4x^2+16a^6 : (2x^5-6ax^2+4a^3).4a^3$$

$$\underline{\begin{array}{l} +8a^3x^5-24a^4x^2+16a^6 \\ - \qquad + \qquad - \end{array}}$$

$$0$$

EJEMPLO III.

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\ldots$$

$$\underline{1}$$

$$+x \qquad : \left(2+\frac{x}{2}\right).\frac{x}{2}$$

$$\underline{\begin{array}{l} +x+\frac{x^2}{4} \\ - \quad - \end{array}}$$

$$-\frac{x^2}{4} \qquad : \left(2+x-\frac{x^2}{8}\right).-\frac{x^2}{8}$$

$$\underline{\begin{array}{l} -\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64} \\ + \quad + \quad - \end{array}}$$

$$+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{64} \qquad : \left(2+x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{16}\right).\frac{x^3}{16}$$

&a. &a.

La raiz cuadrada de $1+x$ es irracional, luego no se representará sino por una serie infinita, que debe ser convergente (§ 26), y á este fin los restos deben decrecer hasta el límite cero. Esto sucederá cuando $x<1$; pues en los restos consecutivos tenemos las potencias crecientes de x, y sábese que $x^{\infty}=0$ para $x<1$ [§ 27, 9°].

Cuando se buscan los dos términos siguientes de la misma serie, se tiene mas completamente

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\frac{7x^5}{256}-\ldots \qquad \text{(A)}$$

de donde para $-x$ en lugar de x, se deduce

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-\frac{7x^5}{256}-\ldots \qquad \text{(B)}$$

Aplícanse muchas veces las ecuaciones (A) y (B) para estraer raices irracionales.

Ejemplo. Para hallar $\sqrt{102}$, tenemos

$$\sqrt{102}=\sqrt{100+2}=10\sqrt{\frac{100+2}{100}}=10\sqrt{1+\frac{2}{100}}$$

$$\sqrt{1+\frac{2}{100}}=1+\frac{2}{2.100}-\frac{4}{8.100^2}+\frac{8}{16.100^3}-\frac{5.16}{128.100^4}+\ldots$$

$$=1+0{,}01-0{,}00005+0{,}0000005-0{,}000000006+\ldots$$

$$=1{,}009950494$$

Luego $\sqrt{102}=10{,}09950494$

Para hallar $\sqrt{98}$, tenemos

$$\sqrt{98}=\sqrt{100-2}=10\sqrt{1-\frac{2}{100}}$$

$$\sqrt{1-\frac{2}{100}}=1-\frac{2}{2.100}-\frac{4}{8.100^2}-\frac{8}{16.100^3}-\frac{5.16}{128.100^4}-$$

$$=1-0{,}01-0{,}00005-0{,}0000005-0{,}000000006-\ldots$$

$$=0{,}989949494$$

Luego $\sqrt{98}=9{,}89949494$

§. 74.

Cubo de los números enteros.

1. Tenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3\\ &+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a+b+c)^3 &= a^3\\ &+3a^2b+3ab^2+b^3\\ &+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3\end{aligned}$$

y en general será

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+\ldots+p+q)^3 = {} & a^3 \\
& + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
& + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 \\
& + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 \\
& \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& + 3(a+b+\ldots+p)^2q + 3(a+b+\ldots+p)q^2 + d^3
\end{aligned}
$$

Demuéstrase la generalidad de esta fórmula como la de la fórmula semejante del cuadrado en el § 71.

2º Para un número entero, por ejemplo 4213, será

$$4213^3 = (4000+200+10+3)^3$$

$= 4000^3$	64000000000
$+3.4000^2.200$	9600000000
$+3.4000.200^2$	480000000
$+200^3$	8000000
$+3.4200^2.10$	529200000
$+3.4200.10^2$	1260000
$+10^3$	1000
$+3.4210^2.3$	159516900
$+3.4210.3^2$	113670
$+3^3$	27
	74778091597

ó cuando los ceros se omiten

$$4213^3$$

4^3	64			
$3.4^2.2$	9	6		
$3.4.2^2$		48		
2^3		8		
$3.42^2.1$		529	2	
$3.42.1^2$		1	26	
1^3			1	
$3.421^2.3$		159	516	9
$3.421.3^2$			113	67
3^3				27
	74	778	091	597

Obsérvanse las reglas siguientes:

1) El cubo desde la derecha hácia la izquierda se parte en clases de tres en tres cifras, pudiendo la suprema clase contener tambien una ó dos cifras.

2) La suprema clase contiene el cubo de la primera cifra.

3) La segunda clase contiene a) el triplo del cuadrado de la primera cifra por la segunda, b) el triplo de la primera cifra por el cuadrado de la segunda, c) el cubo de la segunda cifra.

4) La tercera clase contiene de semejante modo a) el triplo del cuadrado de las dos primeras cifras (considerándolas como

un número) por la tercera cifra, b) el triplo de las dos primeras por el cuadrado de la tercera, c) el cubo de la tercera cifra &a.

Por estas reglas tendremos

5312^3

5^3	125			
$3.\ 5^2.3$	22	5		
$3.\ 5\ .3^2$	1	35		
3^3		27		
$3.53^2.1$		842	7	
$3.53\ .1^2$		1	59	
1^3			1	
$3.531^2.2$		169	176	6
$3.531\ .2^2$			63	72
2^3				8
	149	890	531	328

§. 75.

Estraccion de la raiz cúbica de números determinados.

I. Caso. *El número dado es entero y cubo perfecto.* Cuando el número dado es <1000, la raiz cúbica se busca en la tabla siguiente:

Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729
Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Cuando el número es >1000, se observarán las reglas sigientes:

1) El número pártase desde su derecha hácia la izquierda en clases de tres en tres cifras, con lo cual la suprema clase podrá contener tambien una sola ó dos cifras. El número de las clases será igual al número de las cifras de la raiz buscada.

2) Por medio de la tabla precedente, se buscará el máximo cubo contenido en la suprema clase, y la raiz cúbica del mismo se escribirá como primera cifra de la raiz buscada.

3) Réstese dicho máximo cubo y al resto póngase la cifra siguiente, y el número así formado divídase por el triplo del cuadrado de la raiz ya encontrada, y escríbase el cociente como segunda cifra de la raiz.

4) Fórmense los tres productos:

a) el triplo del cuadrado de la primera cifra por la segunda,
b) el triplo de la primera cifra por el cuadrado de la segunda,
c) el cubo de la segunda cifra.

Réstense estos tres productos sucesivamente, tomando abajo al resto cada vez una cifra mas.

5) El último resto, aumentado del mismo modo de una cifra, divídase por el triplo del cuadrado de la raiz ya encontrada, y escríbase el cociente como tercera cifra de la raiz.

6) Fórmense los tres productos:

a) el triplo del cuadrado de las dos primeras cifras por la tercera,

b) el triplo de las dos primeras cifras por el cuadrado de la tercera,

c) el cubo de la tercera cifra.

Réstense estos tres productos como ántes.

7) Obsérvese cada vez el mismo procedimiento como ántes dividiendo por el triplo del cuadrado de la raiz ya hallada &a.

EJEMPLO I. $\sqrt[3]{74|778|091|597}=4213$

64		
107	$: 3\cdot4^2=48$	
96	$=3\cdot4^2\cdot2$	
117		
48	$=3\cdot4\cdot2^2$	2 cl.
698		
8	$=2^3$	
6900	$: 3\cdot42^2=5292$	
5292	$=3\cdot42^2\cdot1$	
16089		
126	$=3\cdot42\cdot1^2$	3 cl.
159631		
1	$=1^3$	
1596305	$: 3\cdot421^2=531723$	
1595169	$=3\cdot421^2\cdot3$	
11369		
11367	$=3\cdot421\cdot3^2$	4 cl.
27		
27	$=3^3$	
0		

EJEMPLO II. $\sqrt[3]{12|911|717|736}=2346$

$$
\begin{array}{rll}
8 & & \\
\hline
49 & :3.2^2=12 & \\
36 & =3.2^2.3 & \\
\hline
131 & & \quad 2\ \text{cl.} \\
54 & =3.2.3^2 & \\
\hline
771 & & \\
27 & = \quad 3^3 & \\
\hline
7447 & :3.23^2=1587 & \\
6348 & =3.23^2.4 & \\
\hline
10991 & & \quad 3\ \text{cl.} \\
1104 & =3.23.4^2 & \\
\hline
98877 & & \\
64 & = \quad 4^3 & \\
\hline
988137 & :3.234^2=164268 & \\
985608 & =3.234^2.6 & \\
\hline
25293 & & \\
25272 & =2.234.6^2 & \quad 4\ \text{cl.} \\
\hline
216 & & \\
216 & = \quad 6^3 & \\
\hline
0 & &
\end{array}
$$

II. CASO. *El número dado no es un cubo perfecto.* Se estrae la raiz por el mismo método, añadiendo ceros á los restos consecutivos, cuando las cifras faltan, y poniendo coma en el lugar respectivo de la raiz.

EJEMPLO III. $\sqrt[3]{5} = 1{,}70997\ldots$

$$
\begin{array}{lll}
1 & & \\
\hline
40 & :3.1^2=3 & \\
21 & =3.1^2.7 & \\
\hline
190 & & \\
147 & =3.1.7^2 & \text{2 cl.} \\
\hline
430 & & \\
343 & = 7^3 & \\
\hline
870 & :3.17^2=867 & \text{3 cl.} \\
870000 & :3.170^2=86700 & \\
780300 & =3.170^2.9 & \\
\hline
897000 & & \\
41310 & =3.170.9^2 & \text{4 cl.} \\
\hline
8556900 & & \\
729 & = 9^3 & \\
\hline
85561710 & :3.1709^2=8762043 & \\
78858387 & =3.1709^2.9 & \\
\hline
67033230 & & \\
415287 & =3.1709.9^2 & \text{5 cl.} \\
\hline
666179430 & & \\
729 & = 9^3 & \\
\hline
6661787010 & :3.17099^2=877127403 & \\
 & \text{cociente} =7\ \&\text{a.} &
\end{array}
$$

DEM. Tenemos

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{\frac{N.10^{3m}}{10^{3m}}} = \frac{\sqrt[3]{N.10^{3m}}}{10^m} = \frac{\sqrt[3]{N.1000^m}}{10^m}$$

Luego se estrae la raiz, añadiendo ceros al número, y para tres ceros que se añaden, tendremos siempre un lugar decimal.

III. CASO. *El número dado es un quebrado decimal.* Se observa el mismo modo de calcular, con la sola diferencia de que el número dado ha de partirse en clases desde la coma decimal hácia la izquierda y hácia la derecha, añadiendo ceros en la última clase cuando no tiene bastantes cifras.

EJEMPLO IV. $\sqrt[3]{85,826|130}=4,411\ldots.$

64

218 : $3.4^2=48$

192 $=3.4^2.4$

262 2 cl.

192 $=3.4.4^2$

706

64 $=$ 4^3

6421 : $3.44^2=5808$

5808 $=3.44^2.1$

6133

132 $=3.44.1^2$ 3 cl.

60010

1 $=$ 1^3

600090 : $3.441^2=583443$

583443

166470 &a.

DEM. Un quebrado decimal que tiene m clases de 3 en 3 cifras decimales, se representa por $\frac{N}{10^{3m}}$, luego será

$$\sqrt[3]{\frac{N}{10^{3m}}}=\frac{\sqrt[3]{N}}{10^m}$$

es decir, se estrae la raiz como si el número fuese entero, y despues se separan tantos lugares decimales, cuantas hay clases de cifras decimales.

NOTA. Se estrae la raiz cúbica á un quebrado comun, haciendo primeramente el denominador racional y despues estrayendo la raiz al numerador:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}}=\sqrt[3]{\frac{2.25}{125}}=\frac{1}{5}\sqrt[3]{50}$$

§. 76.

Estraccion de la raiz cúbica de un polinómio.

Las reglas para estraer la raiz cúbica de un polinómio, son las mismas que hemos espuesto en el parágrafo precedente, y se comprenderá el cálculo por los ejemplos siguientes.

Ejemplo I.

$$\sqrt[3]{y^6-6y^5+21y^4-44y^3+63y^2-54y+27}=y^2-2y+3$$

$$-y^6$$

$$-6y^5+21y^4-44y^3 \quad : 3y^4$$

$$-6y^5+12y^4-8y^3$$

$$+ \quad - \quad +$$

$$+9y^4-36y^3+63y^2-54y+27 : 3(y^2-2y)^2=3y^4-12y^3+12y^2$$

$$+9y^4-36y^3+36y^2$$

$$27y^2-54y+27$$

$$- \quad + \quad - \quad + \quad -$$

$$0$$

Ejemplo II.

$$\sqrt[3]{1+x}=1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}+\dots \qquad (A)$$

$$-1$$

$$+x \quad : 3.1^2$$

$$+x+\tfrac{1}{3}x^2+\frac{1}{27}x^3$$

$$- \quad - \quad -$$

$$-\tfrac{1}{3}x^2-\frac{1}{27}x^3 \quad : 3\left(1+\frac{x}{3}\right)^2=3+2x+\frac{x^2}{3}$$

$$-\tfrac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x^3-\frac{1}{27}x^4$$

$$+\frac{1}{27}x^4+\frac{1}{81}x^5-\frac{1}{729}x^6$$

$$+ \quad + \quad - \quad +$$

$$+\frac{5}{27}x^3-\frac{1}{81}x^5+\frac{1}{729}x^6 \quad : 3\left(1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}\right)^2$$

&a. &a.

De esta serie se deduce

$$\sqrt[3]{1-x}=1-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}-\frac{5x^3}{81}-\frac{10x^4}{243}-\dots \qquad (B)$$

y para la convergencia se supone $x<1$.

Aplícanse estas series para la estraccion de la tercera raiz, en el caso de ser esta irracional.

ARTICULO V.

Cantidades imaginarias y complejas.

§. 77.

Signos de las raices.

Cuando se estrae una raiz á un número, el resultado puede tener signos varios, segun que el número sea positivo ó negativo y el índice de raiz un número par ó impar.

1° *Una raiz con índice impar es positiva, cuando la cantidad subradical es positiva:*

$$\sqrt[3]{a^3} = +a\ ; \qquad \sqrt[9]{a} = +a^{\frac{1}{9}}$$

Porque, conforme á la definicion de las raices, el resultado elevado á la potencia que indica el índice, ha de reproducir la cantidad subradical. Pero, solo tomando el signo $+$ como signo del resultado, tendremos la cantidad subradical; pues $(+a)^3 = +a^3$, $(+a^{\frac{1}{9}})^9 = +a$, pero $(-a)^3 = -a^3$, $(-a^{\frac{1}{9}})^9 = -a$ (§ 60).

2° *Una raiz con índice impar es negativa, cuando la cantidad subradical es negativa.*

$$\sqrt[3]{-a^3} = -a\ ; \qquad \sqrt[9]{-a} = -a^{\frac{1}{9}}$$

Se demuestra por las mismas razones.

3° *Una raiz con índice par puede ser positiva ó negativa, cuando la cantidad subradical es positiva.*

$$\sqrt{a^2} = \pm a\ ; \qquad \sqrt[2n]{a} = \pm a^{\frac{1}{2n}}$$

Pues, como $(+a)^2 = a^2$, así tambien es $(-a)^2 = a^2$, y como $(+a^{\frac{1}{2n}})^{2n} = +a$, así será tambien $(-a^{\frac{1}{2n}})^2 = +a$.

Estrayendo una raiz con índice par á un número positivo, se deben poner ambos signos al resultado, *siempre que no se sabe el origen del signo de la cantidad subradical.* Será por ejemplo:

$$\sqrt{16} = \pm 4, \qquad \sqrt[4]{16} = \pm 2\ ; \qquad \sqrt[8]{256} = \pm 2$$

Pero siempre cuando se sabe el orígen del signo de la cantidad subradical, no se pondrá sino un signo, á saber, el que es raiz del signo subradical. Así será

$\sqrt{(-3)^2} = -3$; $\sqrt{+2.+8} = \sqrt{(+1)^2.16} = +4$

4° *Una raiz con índice par no será ni un número positivo, ni un número negativo* de la especie de números que conocemos, *cuando la cantidad subradical es negativa.*

Así $\sqrt{-9}$ no será $+3$, pues $(+3)^2 = +9$, tampoco será -3, pues $(-3)^2$ es igualmente $= +9$. Luego por $+3$ ó -3 no se reproduce la cantidad subradical -9.

Tampoco $\sqrt[4]{-16}$ ni es $+2$, ni -2, pues tenemos $(+2)^4 = +16$, y así tambien $(-2)^4 = +16$.

Por consiguiente una raiz con índice par de un número negativo, no tiene un valor correspondiente en la serie algebráica de los números [§ 13, 9°]; pues no hay en la misma tal número, que elevado al cuadrado ó á otra potencia con esponente par, produzca un resultado negativo. Luego tal raiz constituye una cantidad de una clase especial y distinta de todos los números que hemos encontrado hasta ahora en todo el discurso de la aritmética.

La espresion mas simple de esta especie de cantidad es la raiz cuadrada de la unidad negativa, á saber $\sqrt{-1}$.

Esplicaciones. Llámase *unidad imaginaria* la raiz cuadrada de la unidad negativa, y *número imaginario* el producto de los otros números por la unidad imaginaria.

Serán

$$3\sqrt{-1},\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{-1},\quad -7\sqrt{-1},\quad a^2\sqrt{-1}$$

números imaginarios. La unidad imaginaria frecuentemente se designa por la letra *i*, de modo que los números

$$3i,\quad \tfrac{1}{2}i,\quad -7i,\quad a^2i$$

son idénticos con los de arriba.

Por oposicion las unidades $+1$ y -1 se llaman *unidades reales* y sus múltiplos *números reales*. Asi 5, -17, a, $-a^3b$ son números reales, y $5i$, $-17i$, ai, $-a^3bi$ son números imaginarios.

Hay tantos números imaginarios, cuantos reales; pues para toda cantidad real *a*, puede asignarse una cantidad imaginaria correspondiente, que será $a\sqrt{-1}$ ó bien *ai*.

Es preciso que averigüemos la significacion de los números imaginarios.

§. 78.

Aplicacion de los signos algebráicos á la geometría.

1° Sea PX [fig. 2] una línea recta, por un lado ilimitada desde el origen P, que se supone como un punto fijo, y ademas sea

M un punto movible, cuya distancia MP desde el orígen ha de determinarse. Tomando en dicha línea, desde el orígen, partes iguales á la unidad absoluta, la misma línea PX representará la serie de los números absolutos, espresándose cualquiera distancia desde el orígen por números absolutos. Hállanse tambien en la misma línea todos los quebrados y números irracionales posibles. Por esto, tambien *la posicion* del punto movible M respecto al orígen P no se espresa sino por números absolutos. Si PM=p, el número absoluto p dará la posicion de M.

2° En la misma línea PX [fig. 3] fijemos otro punto A, por cuyo intermedio la posicion del punto movible M se determinará, midiendo la distancia PA=p y despues la distancia AM=a, de modo que sea PM=p+a. Corriendo el punto M al otro lado de A, que tenga la posicion M′, suponiendo asimismo AM′=a, la posicion del punto movible se espresará por PM′=p−a. Luego las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} PM &= p + a \\ PM' &= p - a \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

determinarán la posicion del punto movible M respecto al orígen P y al punto fijo intermedio A, estando el punto movible la primera vez á la derecha y la segunda vez á la izquierda de A. Pero para hacerse una idea exacta de la posicion del punto movible, bastará *un solo* punto fijo, luego bastará solo el punto A, y puede prescindirse del orígen primitivo P y por consiguiente del número absoluto p, que representa la distancia PA. Por medio de esta abstraccion, no retenemos de las ecuaciones (α) sino las cantidades +a y −a, y sábese que +a espresa *la posicion* del punto M á la derecha del nuevo orígen A en la distancia a, y que $-a$ espresa *su posicion* á la izquierda del mismo orígen en la misma distancia absoluta a.

Ahora poniendo $x=\pm a$, la cantidad x representará cualquiera posicion de M en la línea XX′, ilimitada por sus dos lados, tomando a todos los valores absolutos desde cero hasta infinito, y será x positiva, cuando M se halla á derecha, y será x negativa, cuando M está á izquierda del orígen A.

La cantidad x es un número verdaderamente algébrico, y se llama *la abscisa* del punto movible M. La línea XX′ se dice *eje de las abscisas.*

Espresando los signos + y —, por su orígen, un *aumento ó una disminucion*, ahora ya podrán espresar posiciones geométricas opuestas y serán *signos de posicion.*

Tomando en la línea XX′ [fig. 4], desde el orígen A, por uno y otro lado, partes que sean iguales á la unidad, la parte AX de la linea tendrá todos los números positivos, y la parte AX′ todos los negativos. Los números algébricos, así situados sobre XX′, pueden considerarse ya como distancias desde A, tomándolas en una ú otra posicion opuesta, ya como puntos que tienen lugares distintos sobre XX′ y que terminan aquellas distancias. Llámase XX′ *línea de los números algébricos ó reales.*

§. 79.

Los números imaginarios.

1° En la línea XX′ de los números reales [fig. 5] tómese AB = AC = 1 en los dos brazos opuestos AX y AX′ de la línea y desde el orígen A; descríbase un círculo sobre el diámetro BC y tírese por el orígen A la perpendicular YY′. Sábese por la geometría, que la parte interceptada AD de la perpendicular es *la media proporcional* entre los segmentos AC y AB del diámetro, cualesquiera que sean estos. Pero no solamente atendido el valor absoluto, sino tambien *respecto á la posicion*, AD será la media proporcional entre AC y AB. Pues, tirando desde el orígen varias rectas AM, AN, AP, unas tendrán mas inclinacion hácia AC, otras hácia AB, y por consiguiente unas tendrán mas oposicion á AB, otras á AC. Solo la perpendicular AY no tiene ni inclinacion ni oposicion respecto á AC y AB. Por el contrario, cuando va adelantándose en la circunferencia del círculo desde C hasta D, y despues desde D hasta B, el movimiento angular será el mismo y en el mismo sentido. Luego: *la posicion de AC es á la posicion de AD, como la posicion de AD es á la posicion de AB.* Por consiguiente será verdadera la proporcion:

$$AC : AD = AD : AB$$

y no solamente respecto al valor absoluto de estas cantidades, sino tambien respecto á la posicion. Cuando las reglas del álgebra se aplican á esta nueva especie de proporcion, se tendrá

$$AD = \sqrt{AC . AB}$$

Pero $AC = +1$, $AB = -1$, luego $AC . AB = +1 . -1 = -1$ y por consiguiente

$$AD = \sqrt{-1} \qquad (\alpha)$$

La longitud de AD es, como la de AC y AB, igual á la unidad, de donde:

La unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ designa una unidad que se toma desde el orígen, en la direccion que es perpendicular á la serie primitiva ó algébrica.

2º Tomando en la línea perpendicular YY′ [fig. 6] desde el orígen N, á uno y otro lado, distancias iguales á 1, 2, 3, 4.... tendremos *la serie de los números imaginarios*

$$-\infty i \ldots -3i, \ -2i, \ -i, \ o, \ +i, \ +2i, \ +3i \ldots +\infty i$$

Como los brazos AY y AY′ de YY′ son opuestos uno á otro, por las razones del § precedente, uno de ellos contendrá los números imaginarios positivos, y el otro los números imaginarios negativos.

Se infiere que los números

$$+n, \quad -n, \quad +n\sqrt{-1}, \quad -n\sqrt{-1}$$

tienen distancias iguales desde el orígen A ó el punto cero, distancias que se espresan por el número absoluto n, y que unos de otros no se diferencian sino por la posicion que se indica por el signo. Luego como los signos $+$ y $-$ son signos de posicion,

así tambien $\sqrt{-1}$ *será un signo de posicion.*

3º Desde el orígen A, en la línea XX′ [fig. 7], sea $AB=-1$ y $AC=+n^2$, y se sacará

$$AC:AD=AD:AB$$

$$AD=\sqrt{AC.AB}=\sqrt{+n^2.-1} \quad \text{ó bien}$$

$$AD=\sqrt{-n^2} \qquad (\beta)$$

Pero el valor absoluto de AD es n, luego como número imaginario será

$$AD=n\sqrt{-1} \qquad (\gamma)$$

y tenemos por medio de estas dos últimas ecuaciones

$$\sqrt{-n^2}=n\sqrt{-1} \qquad (\delta)$$

es decir:

Una raiz cuadrada de un número negativo es una cantidad imaginaria. Ademas se deduce:

Toda raiz cuadrada de un número negativo puede representarse en forma de un producto, que tiene por factores la unidad imaginaria y la raiz cuadrada de la cantidad subradical, considerándola como absoluta.

Llámase esta forma, forma *reducida.* De donde será:

$$\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}; \quad \sqrt{-16}=4\sqrt{-1}; \quad \sqrt{-\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}\sqrt{-1}$$

Para no equivocarse conviene siempre escribir todas las raices cuadradas de números negativos en la forma reducida, ántes de efectuar con ellas operaciones algébricas, cualesquiera que sean.

La línea YY′ se llama *la línea de los números imaginarios.* Los números reales é imaginarios en comun toman el nombre de *números laterales,* pues los unos se encuentran al lado de los otros.

Así $\pm a\sqrt{-1}$ será el número lateral correspondiente de $\pm a$, y $\pm b$ el número lateral que corresponde á $\pm b\sqrt{-1}$.

§. 80.

Operaciones algébricas con los números imaginarios.

En la cantidad imaginaria $a\sqrt{-1}$ debe considerarse $\sqrt{-1}$ como *un signo de posicion* [§ 79 N° 2°]; sinembargo, respecto al cálculo, este signo se tiene completamente como una cantidad, lo que se demuestra fácilmente.

I. *Adicion y sustraccion.* 8 unidades imaginarias, mas 5 unidades imaginarias son 8—5 unidades imaginarias:

$$8\sqrt{-1}+5\sqrt{-1}=(8+5)\sqrt{-1}$$

Asimismo 8 unidades imaginarias ménos 5 unidades imaginarias son 8—5 unidades imaginarias:

$$8\sqrt{-1}-5\sqrt{-1}=(8-5)\sqrt{-1}$$

En general

$$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{-1}+b\sqrt{-1}=(a+b)\sqrt{-1} \\ a\sqrt{-1}-b\sqrt{-1}=(a-b)\sqrt{-1} \end{array}\right\} \qquad (a)$$

Regla: *En la adicion ó sustraccion de las cantidades imaginarias (reducidas) se suman ó restan sus factores reales, escribiendo despues la unidad imaginaria una sola vez.*

II. *Multiplicacion.*

α) *Por la unidad imaginaria.* Multiplicar el número $+a$ por $\sqrt{-1}$, es formar de a un número de la misma manera que $\sqrt{-1}$ está formada de la unidad entera y absoluta. Pero $\sqrt{-1}$ se forma de la unidad entera y absoluta, haciéndola positiva y despues tomando el número lateral correspondiente en el brazo positivo AY de la línea YY′ que está perpendicular sobre la línea real XX′ en el punto A [fig. 8]. Luego tomaremos de la misma manera la cantidad a, harémosla positiva, es decir, tomarémosla en la direccion primitiva desde el punto A y despues buscaremos *el número lateral correspondiente* en el mismo brazo AY, que nos dará $+a\sqrt{-1}$; luego será

$$+a\times\sqrt{-1}=+a\sqrt{-1}$$

De donde se saca que multiplicar por $\sqrt{-1}$ es efectuar un *movimiento angular* por un ángulo recto en la direccion desde AX hasta AY, direccion que es opuesta al movimiento de la manecilla de un reloj. Este movimiento angular desde AX hácia AY, AX′, AY′

se dice *positivo.*

Cuando tenemos que formar el producto de $+a$ por $-\sqrt{-1}$, se debe observar, que $-\sqrt{-1}$ está formada de la unidad entera y absoluta, tomándola primeramente como unidad positiva en el brazo AX de los números reales y despues buscando el número lateral correspondiente en el brazo AY′ de los números imaginarios que es $-\sqrt{-1}$ y se obtiene por un movimiento angular negativo, partiendo desde AX en la direccion AY′. Por consiguiente tomando en AX el número $+a$, se buscará en la misma direccion negativa el número lateral correspondiente sobre AY′ y se encuentra $-a\sqrt{-1}$; luego será

$$+a \times -\sqrt{-1} = -a\sqrt{-1}$$

Se saca, que multiplicar por $-\sqrt{-1}$ es efectuar un *movimiento angular negativo* por un ángulo recto.

Del mismo modo será

$$-a \times +\sqrt{-1} = -a\sqrt{-1}$$

$$-a \times -\sqrt{-1} = +a\sqrt{-1}$$

pues tomando $-a$ en AX′, por un movimiento positivo que indica el primer multiplicador $+\sqrt{-1}$, se tendrá el número lateral correspondiente sobre AY′, y por un movimiento negativo, que indica el segundo multiplicador $-\sqrt{-1}$, se sacará el número lateral correspondiente sobre AY.

En todos estos cuatro casos, el resultado de la multiplicacion completamente es el que se sigue segun las reglas del Algebra ya conocidas.

Finalmente tendremos

$$+a\sqrt{-1} \times +\sqrt{-1} = -a$$

$$+a\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = +a$$

$$-a\sqrt{-1} \times +\sqrt{-1} = +a$$

$$-a\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = -a$$

Pues partiendo desde el número imaginario $+a\sqrt{-1}$, que está sobre AY, por un movimiento angular positivo se obtiene como número lateral correspondiente la cantidad $-a$, y por un movimiento angular negativo la cantidad $+a$. Los dos últimos casos se siguen de semejante modo.

Los mismos resultados se hallarán, aplicando las reglas del Algebra, aunque por sí mismo no sea permitido el aplicarlas. Por estas será por ejemplo

$$-a\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1} = +a(\sqrt{-1})^2 = +a.-1 = -a$$

β) *Por un número imaginario cualquiera.* Multiplicar el número $+a$ por $\pm b\sqrt{-1}$ es formar de $+a$ un nuevo número de la misma manera que $\pm b\sqrt{-1}$ está formado de la unidad entera y absoluta. Pero para formar $+b\sqrt{-1}$, primeramente en AX se pone la unidad desde el punto A, b veces como sumando y despues se busca el número lateral correspondiente por un movimiento angular positivo ó negativo, es decir, primeramente se multiplica por b y despues por $\pm\sqrt{-1}$. Luego será:

$$+a \times \pm b\sqrt{-1} = +a \times b \times \pm\sqrt{-1}$$

$$= +ab \times \pm\sqrt{-1} = \pm ab\sqrt{-1}$$

Del mismo modo se saca:

$$-a \times \pm b\sqrt{-1} = -a \times b \times \pm\sqrt{-1} = \mp ab\sqrt{-1}$$

$$+a\sqrt{-1} \times \pm b\sqrt{-1} = +ab\sqrt{-1} \times \pm\sqrt{-1} = \mp ab$$

$$-a\sqrt{-1} \times \pm b\sqrt{-1} = -ab\sqrt{-1} \times \pm\sqrt{-1} = \pm ab$$

Los mismos resultados se sacan por aplicacion de las reglas del Algebra.

Como se ve, el producto de dos cantidades imaginarias es un número real.

La division es la inversion de la multiplicacion y la formacion de las potencias con esponentes enteros, es la multiplicacion repetida; por consiguiente:

La adicion, sustraccion, multiplicacion, division y formacion de las potencias con esponentes enteros, respecto á los números imaginarios siguen las reglas comunes del Algebra.

III *Division.* Los tres casos de la division se encuentran en las ecuaciones

$$\frac{a\sqrt{-1}}{b} = \frac{a}{b}\sqrt{-1}; \quad \frac{a\sqrt{-1}}{b\sqrt{-1}} = \frac{a}{b}; \quad \frac{a}{b\sqrt{-1}} = -\frac{a}{b}\sqrt{-1}$$

las que son verdaderas, pues en cada una el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo. De donde se saca:

1º Un número imaginario queda dividido por un número real, dividiendo el factor real del primero por el segundo y multiplicando el resultado por la unidad imaginaria.

2ª Un número imaginario queda dividido por otro imaginario, dividiendo el factor real del primero por el del segundo. El resultado es real.

3º Un número real queda dividido por un número imaginario, formando el cociente del primero por el factor real del segundo y multiplicando el resultado por la unidad imaginaria negativa.

En el último caso, para no equivocarse, la division se efectuará haciendo el denominador racional:

$$\frac{a}{+b\sqrt{-1}}=\frac{a\sqrt{-1}}{+b(\sqrt{-1})^2}=\frac{a\sqrt{-1}}{+b.-1}=\frac{a\sqrt{-1}}{-b}=-\frac{a}{b}\sqrt{-1}$$

$$\frac{a}{-b\sqrt{-1}}=\frac{a\sqrt{-1}}{-b(\sqrt{-1})^2}=\frac{a\sqrt{-1}}{-b.-1}=\frac{a\sqrt{-1}}{+b}=+\frac{a}{b}\sqrt{-1}$$

IV. *Potencias con esponentes enteros.* Para formar la segunda potencia de

$$i=\sqrt{-1} \qquad (\alpha)$$

debe multiplicarse $\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-1}$, es decir desde el punto $+\sqrt{-1}$ en AY [fig. 9] debe buscarse la cantidad lateral por un movimiento angular positivo, adelantándose por un cuadrante. La cantidad buscada será -1; luego

$$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1 \qquad (\beta)$$

Para formar la tercera potencia i^3, se multiplicará i^2 por i, ó bien -1 por $\sqrt{-1}$. El mismo movimiento angular positivo desde -1, que está sobre AX′, nos da $-\sqrt{-1}$ que está sobre AY′; luego

$$i^3=(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1} \qquad (\gamma)$$

La cuarta potencia $i^4=i^3.i$ se sigue partiendo desde el punto $-\sqrt{-1}$, que está sobre AY′, en la direccion positiva hasta AX; luego

$$i^4=(\sqrt{-1})^4=+1 \qquad (\delta)$$

Se ve que la 5ª, 6ª, 7ª, 8ª.... potencia serán iguales á la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª, repitiéndose la misma serie de los resultados cuando se continúa este procedimiento. En general tendremos

$$i^{4n}=+1;\quad i^{4n+1}=+\sqrt{-1};\quad i^{4n+2}=-1;\quad i^{4n+3}=-\sqrt{-1}$$

designando n un número entero cualquiera. Pues i^{4n} designa

$\mp 1 . i^{4n}$, y este número se busca, partiendo desde $+1$ sobre AX y adelantándose por movimiento angular positivo por $4n$ cuadrantes ó bien por n circunferencias, lo que da constantemente el mismo número $+1$, de donde se parte. Ademas i^{4n+1} es igual á $i^4 . i$

$= +1 . i = +\sqrt{-1}$ &a.

Se infiere: *Las potencias de $\sqrt{-1}$ serán reales, cuando el esponente es un número par, pero las mismas serán imaginarias, cuando el esponente es un número impar.*

Un número imaginario $a\sqrt{-1}$ se eleva á una potencia, elevando á esta sus dos factores:

$$(a\sqrt{-1})^3 = a^3(\sqrt{-1})^3 = -a^3\sqrt{-1}$$

Nota. Cuando debe efectuarse cualquier operacion con números imaginarios. nunca se deben reducir á un signo los diferentes signos que están bajo de los signos radicales; conviene formar las potencias de las unidades imaginarias.

Así falso seria el cálculo:

$$a\sqrt{-1} . b\sqrt{-1} . c\sqrt{-1} = abc\sqrt{-1 . -1 . -1} = abc\sqrt{-1}$$

pues tenemos

$$\sqrt{-1 . -1 . -1} = \sqrt{(-1)^2 . -1} = -1 . \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$$

por consiguiente el resultado debe ser $-abc\sqrt{-1}$. Este error no es posible, cuando se calcula con las potencias:

$$a\sqrt{-1} . b\sqrt{-1} . c\sqrt{-1} = abc . (\sqrt{-1})^3 = -abc\sqrt{-1}$$

§. 81.

Números complejos.

1° *Un número compuesto de un sumando real y otro imaginario, se llama número complejo.*

Así serán números complejos:

$$2+3\sqrt{-1}, \quad -5+3\sqrt{-1}, \quad x\pm y\sqrt{-1}$$

En la línea XX', [fig. 10] desde el orígen A, tómese la distancia $AP=x$ y tírese la perpendicular $PM=y$, El número complejo

$$x+y\sqrt{-1}$$

será representado por la posicion del punto M sobre el plano XX', YY', ó bien por la magnitud y posicion de la resta AM.

La posicion de M será á la derecha ó izquierda de YY', segun que sea x positiva ó negativa, y el mismo punto estará por encima ó por debajo de XX', segun que y sea positiva ó negativa.

Para construir el número complejo $-2+3\sqrt{-1}$, se tomará $AQ=-2$ en la línea AX', y $AS=+3$ en la línea AY, y tirando SN paralela á XX', QN paralela á YY', la línea recta AN nos representará el número complejo dado.

De semejante modo, cuando se toma $AQ=-2$ y $AS'=-3$, la recta AN' representará el número complejo $-2-3\sqrt{-1}$. Dos números complejos como $-2+3\sqrt{-1}$ y $-2-3\sqrt{-1}$ que no se distinguen sino por el signo de la parte imaginaria, se dicen *números conjugadas*.

2º En el número complejo.

$$x+y\sqrt{-1}$$

las cantidades reales x é y pueden tomar todos los valores posibles entre $-\infty$ y $+\infty$; luego el punto M puede tener toda posicion posible en el plano, que está determinado por las líneas XX' é YY'.

El mismo número complejo es la espresion general de todos los números posibles que conocemos. Pues cuando es $y=0$, tendremos solamente x, es decir la espresion general de un número real; y cuando es $x=0$, tendremos solamente $y\sqrt{-1}$, lo que es la espresion general de un número imaginario. Ademas, si $x=0$ é $y=0$, el número complejo se convierte en cero.

3º En el número complejo

$$x+y\sqrt{-1}$$

la cantidad x se llama *la parte real* y la cantidad $y\sqrt{-1}$ *la parte imaginaria* del mismo.

Las cantidades geométricas x é y se llaman *las coordenadas* del punto M, siendo x la abscisa é y *la ordenada* de M. Las rectas perpendiculares XX', YY' toman el nombre *de ejes de las coordenadas* y será XX' *el eje de las abscisas* é YY' *el eje de las ordenadas*.

Como número real, x será positivo ó negativo, segun que P esté á la derecha ó á la izquierda del origen A.

La ordenada y será positiva ó negativa, segun que esté M por encima ó por debajo de XX'; pues $y\sqrt{-1}$ como parte imaginaria, tendrá el signo $+$ en el primer caso, y el signo $-$ en el segundo.

El ángulo XAM, que el número complejo forma con AX puede ser mayor ó menor, segun los valores diferentes de x é y, y mayor aún que 1, 2 ó 3 rectos. Se mide este ángulo siempre desde el brazo positivo AX de la línea real XX', y será positivo cuando se concibe formado por un movimiento angular positivo de AM, en la direccion desde AX hasta AY, AX', AY'.

Llámanse tambien los ángulos rectos XAY, YAX' $X'AY'$, Y'AX, segun el órden indicado, el 1°, 2°, 3°, 4° cuadrante, y se infiere que

en el cuadrante	I	II	III	IV
la abscisa x es	+	—	—	+
la ordenada y es	+	+	—	—

4° El número complejo tiene una doble espresion ó forma, es decir puede espresarse primeramente por las coordenadas x é y, y ademas por la magnitud y posicion de la recta AM, ó lo que es lo mismo, por la magnitud de la recta AM y el ángulo α que forma con AX.

Como cantidad algébrica, el *valor absoluto* de AM se llama *módulo* del número complejo, y como cantidad geométrica, se llama *radio*. Designando el módulo ó radio por r, el número complejo puede espresarse por el símbolo r_α, que se pronuncia: *número complejo* r *que tiene el ángulo* α.

Luego la doble forma del número complejo estará contenida en la ecuacion.

$$r_\alpha = x + y\sqrt{-1} \qquad [I]$$

Cuando x é y son dados, lo será tambien r_α, y cuando r_α es conocido, lo serán tambien x é y, y no puede ser dudosa la posicion de M.

Cualquiera que sea la posicion del punto M, el radio AM siempre forma un triángulo rectángulo con x é y, en donde AM es la hipotenusa, y x é y son los catetos. Sábese por la geometría que el cuadrado sobre la hipotenusa siempre es igual á la suma de los cuadrados que se construyen sobre los dos catetos. Luego en la fig. 10 será

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 \quad \text{ó bien}$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Por consiguiente el modulo del número complejo ó el radio se tiene por la ecuacion

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad [II]$$

Dos números complejos, como AM y AM' en la fig. 10, pueden tener un mismo módulo ó radio, y sin embargo ser diferentes, á saber cuando el ángulo XAM$=\alpha$ del uno es diferente del ángulo XAM'$=\alpha'$ del otro.

El número complejo se llama unidad compleja cuando el módulo ó radio es igual á la unidad. Suponiendo AM'=AM=1, una y otra de estas líneas representarán unidades complejas. Hay tantas unidades complejas diferentes, cuantos hay ángulos α distintos que aquellos pueden formar con la unidad positiva ó AX, es decir, hay infinitas.

§. 82.

Adicion y sustraccion de los números complejos.

I. *Adicion.* Se deduce inmediatamente de la definicion de la adicion en el § 1 y del § 80, que

$$(a+b\sqrt{-1})+(a'+b'\sqrt{-1})=(a+a')+(b+b')\sqrt{-1} \quad (1)$$

es decir: *dos números complejos quedan sumados uno con otro, añadiendo separadamente la parte real del uno á la parte real del otro y la parte imaginaria del uno á la parte imaginaria del otro.*

El mismo resultado se saca de la significacion de los números complejos. Sumar un número complejo $a+b\sqrt{-1}$ con otro $a'+b'\sqrt{-1}$, es adelantarse en el plano de los números, desde el punto M determinado por el primer número, primeramente de la cantidad a' en la direccion real y despues de la cantidad b' en la direccion imaginaria.

EJEMPLO. Súmense los números complejos [fig. 11]:

$$AM=2+3\sqrt{-1}$$

$$\text{y} \quad AM'=-4+\sqrt{-1}$$

Para efectuarlo, desde el punto M que está determinado por el primer número complejo, tómese primeramente $MN=-4$ en la direccion real (es decir paralela á XX′) y despues desde N, la perpendicular $NM''=+1$ en la direccion imaginaria, y será

$$AM''=AP''+P''M''\sqrt{-1}=-2+4\sqrt{-1}$$

la suma buscada.

Se ve que los números dados AM y AM′ son lados de un paralelógramo AMM″M′, en donde la suma buscada AM″ es la diagonal.

La suma de dos números complejos generalmente es tambien un número complejo. Pero dos números conjugados dan una suma real:

$$(a+b\sqrt{-1})+(a-b\sqrt{-1})=2a$$

II. *Sustraccion.* De la definicion de la sustraccion se sigue

$$(a+b\sqrt{-1})-(a'+b'\sqrt{-1})=(a-a')+(b-b')\sqrt{-1} \quad (2)$$

pues, cuando el resultado (resto) se suma con el sustraendo, se produce el minuendo. De donde se saca la regla:

Para restar un número complejo de otro, se restan separadamente las partes reales y partes imaginarias, en el órden en que deben restarse.

El mismo resultado se tiene por construccion como se sigue:
Ejemplo. Búsquese el resto de los números complejos:

$$AM = -3+4\sqrt{-1} \text{ que es minuendo}$$

$$AM' = -6-2\sqrt{-1} \text{ que es sustraendo.}$$

Desde el punto M [fig. 12] que termina el primer número, póngase MS = AP' = 6 en la direccion real, pero opuesta á la de AP', y despues SM''=P'M'=2 en la direccion imaginaria y tambien opuesta á P'M'. La recta AM'' representa el resto buscado $=+3+6\sqrt{-1}$.

Como se ve, el resto es un lado de un paralelógramo, en donde el minuendo es la diagonal y el sustraendo el otro lado.

Corolario. Cuando dos números complejos son iguales, serán iguales separadamente las partes reales y las partes imaginarias de los mismos.

$$\text{Si} \quad \left.\begin{array}{l} a+b\sqrt{-1} = a'+b'\sqrt{-1} \text{ será} \\ a = a' \quad y \quad b = b' \end{array}\right\} \quad (3)$$

En efecto, si los números dados son iguales, el resto debe ser igual á cero; luego será

$$(a-a') + (b-b')\sqrt{-1} = 0$$

Para que el primer miembro, que tiene la forma de un número complejo, sea verdaderamente igual á cero, se necesita que la parte real y la parte imaginaria á un tiempo sean iguales á cero; luego tenemos $a-a'=0$ y $b-b'=0$ ó bien $a=a'$ y $b=b'$.

§. 83.

Multiplicacion de los números complejos.

Deben distinguirse diferentes casos segun la naturaleza del multiplicador.

I Caso: *un número complejo y un número real.*

Cuando el multiplicador c es un número real y entero, segun la definicion general de la multiplicacion se tiene:

$$(a+b\sqrt{-1}) \times +c$$

$$= +(a+b\sqrt{-1}) + (a+b\sqrt{-1}) + \ldots. c \text{ veces}$$

$$= +(a+a+a+\ldots c \text{ veces}) + (b+b+b+\ldots c \text{ veces})\sqrt{-1}$$

$$= +ac+bc\sqrt{-1}$$

$$(a+b\sqrt{-1})\times -c$$

$$=-(a+b\sqrt{-1})-(a+b\sqrt{-1})-\ldots c \text{ veces}$$

$$=-ac-bc\sqrt{-1}$$

Luego

$$\left.\begin{array}{l}(a+b\sqrt{-1})\times +c=+ac+bc\sqrt{-1}\\(a+b\sqrt{-1})\times -c=-ac-bc\sqrt{-1}\end{array}\right\}\quad(4)$$

resultado que se forma segun las reglas comunes del Algebra.

Por inversión se deduce:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{ac+bc\sqrt{-1}}{+c}=a+b\sqrt{-1}\\[2ex]\dfrac{-ac-bc\sqrt{-1}}{-c}=a+b\sqrt{-1}\end{array}\right|\quad(5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) contienen la regla:

Un número complejo queda multiplicado ó dividido por un número real, cuando se multiplica ó divide cada una de las partes del primero por el último.

Esta regla es verdadera tambien cuando el multiplicador c es un quebrado $=\frac{m}{n}$. Pues segun la definicion de la multiplicacion tenemos

$$(a+b\sqrt{-1}).\frac{m}{n}=\frac{a+b\sqrt{-1}}{n}.m=\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n}\sqrt{-1}\right).m$$

$$=\frac{am}{n}+\frac{bm}{n}\sqrt{-1}=a.\frac{m}{n}+b.\frac{m}{n}\sqrt{-1}\quad(\alpha)$$

Y por inversion se tiene

$$\frac{a.\frac{m}{n}+b.\frac{m}{n}\sqrt{-1}}{\frac{m}{n}}=a+b\sqrt{-1}\quad(\beta)$$

Estas ecuaciones (α) y (β) son las primeras en (4) y (5), solo se tiene un quebrado en lugar del número entero c.

La misma multiplicacion se efectúa fácilmente por construccion.

Ejemplo. Multiplíquese el número $-1+2\sqrt{-1}$ por $+3$. Para efectuarlo [fig. 13], prolónguese la línea AM que representa el número complejo dado, de manera que AM′ sea $=3$AM, y AM′ será el resultado buscado. En efecto, tenemos AP′$=3$AP y P′M′$=3$PM; luego el resultado es:

$$AP'+P'M'\sqrt{-1}=3AP+3PM\sqrt{-1}=3(AP+PM\sqrt{-1})$$

$$-3+6\sqrt{-1}=3(-1+2\sqrt{-1})$$

El mismo número $-1+2\sqrt{-1}$ se multiplicará por -3, tomando primeramente en la direccion opuesta AN=AM y despues AM″=3AN.

Tendremos el mismo resultado, cuando se cambia el órden de los factores, es decir, tenemos

$$(a+b\sqrt{-1}).c=c.(a+b\sqrt{-1}) \qquad (\gamma)$$

El primer miembro nos da el resultado $ac+bc\sqrt{-1}$. En el segundo, conforme á la definicion general de la multiplicacion, de c ha de formarse un nuevo número de la misma manera que

$a+b\sqrt{-1}$ está formado de la unidad entera y absoluta. Pero

para formar $a+b\sqrt{-1}$ de dicha unidad, se la toma primeramente a veces y despues b veces como sumando (ó sustraendo segun el signo de a y b) y las segundas veces en sentido lateral. Luego tomaremos el multiplicando c como unidad primeramente a veces y despues b veces como sumando y las últimas veces en sentido lateral, lo que es en forma algébrica

$$c(a+b\sqrt{-1})=c.a+c.b.\sqrt{-1}=ac+bc\sqrt{-1}$$

el mismo resultado que arriba.

Corolario 1. Cuando r es el módulo de $a+b\sqrt{-1}$, será

$$\frac{a}{r}+\frac{b}{r}\sqrt{-1} \qquad (\delta)$$

la unidad compleja correspondiente, es decir, la unidad compleja que forma con AX el mismo ángulo que el número complejo dado.

En efecto, la espresion (δ) es primeramente una unidad compleja; pues para el módulo r' de (δ) tenemos [§ 81 ult.]:

$$r'^2=\frac{a^2}{r^2}+\frac{b^2}{r^2} \text{ de donde } r'^2.r^2=a^2+b^2$$

Pero a^2+b^2 es el cuadrado del módulo del número $a+b\sqrt{-1}$ y por consiguiente igual á r^2, luego tenemos $r'^2.r^2=r^2$ ó bien $r'^2=1$ y $r'=1$, es decir, el módulo de (δ) es la unidad y por consiguiente (δ) representa una unidad compleja.

Lo segundo, la unidad compleja (δ) forma el mismo ángulo con AX, que el número complejo dado. Pues se ve por la fig. 13, que el ángulo XAM no se muda, cuando el número complejo AM se multiplica por un número real. Pero tenemos

$$\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}\sqrt{-1}\right).r=a+b\sqrt{-1} \qquad (\varepsilon)$$

en donde la espresion (δ) se multiplica por el número real r y reproduce el número complejo dado. Luego ambos forman el mismo ángulo con AX.

Corolario 2. Todo número complejo puede descomponerse en dos factores, uno de los cuales es real y el módulo del número complejo, y el otro la unidad compleja correspondiente. En efecto la ecuacion (ε) nos suministra en órden invertido:

$$\left.\begin{aligned} a+b\sqrt{-1} &= r\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}\sqrt{-1}\right) \\ \text{en donde } r &= \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}\right\} \qquad (\zeta)$$

Lo mismo fácilmente se deduce por la fig. 14. Sea AM un número complejo y el valor absoluto de AM=r, de modo que tengamos

$$r_\alpha = x+y\sqrt{-1}$$

Cuando AE=AN=1, AN representará la unidad compleja correspondiente y será

$$1_\alpha = p+q\sqrt{-1}$$

Los triángulos semejantes AMP y ANQ nos suministran la relacion $x:p=AM:AN=r:1$, de donde $x=r.p$, y ademas $y:q=r:1$ de donde $y=rq$ Cuando estos valores se sustituyen en la primera ecuacion de arriba, se infiere

$$r_\alpha = r.p+r.q\sqrt{-1} = r\,(p+q\sqrt{-1}) = r.1_\alpha$$

lo que dice nuestro corolario.

II Caso. *Multiplicacion de una unidad compleja por una unidad imaginaria.*

1º Multiplicar la unidad compleja $p+q\sqrt{-1}$ por la unidad imaginaria i, segun la definicion general, es formar de la primera un nuevo número de la misma manera que la segunda está formada de la unidad entera y absoluta. Pero para formar la unidad imaginaria, primeramente se toma la unidad entera y absoluta como positiva $=AE=+1$ [fig. 15], y despues se adelanta por un movimiento angular positivo de un cuadrante, buscando el número lateral correspondiente que es $AF=+i$. Luego para formar el producto buscado, se toma como unidad el multiplicando $p+q\sqrt{-1}$, que se representa por AM, y por un movimiento angular positivo, adelantándose de un cuadrante, se busca el número lateral correspondiente. Este será AM′, suponiendo que AM′ sea perpendicular á AM y ademas su longitud igual á la de AM. Por consiguiente AM′ representará el producto buscado y se ve, que el ángulo EAM′, que forma el producto con la unidad positiva AE, es igual á $\alpha+90°$, es decir, igual á la suma del ángulo α, que forma el multiplicando AM, y del ángulo 90°, que forma el multiplicador, con la misma unidad positiva AE,

2º Tendremos completamente el mismo resultado, cuando

$\sqrt{-1}$ se supone como multiplicando, y $p+q\sqrt{-1}$ como multiplicador. Pues para formar la unidad compleja AM de la unidad entera AE, se adelanta desde esta línea por un movimiento angular positivo, de un ángulo EAM$=\alpha$ que es conocido por las cantidades p y q, quedando el valor absoluto de AM igual á el de AE. Luego tomando AF=i como unidad, debe adelantrse desde AF por un movimiento angular positivo de un mismo ángulo FAM'$=\alpha$, quedando por su valor absoluto AM'=AF=1. Será AM' el producto buscado, y el mismo que arriba, pues tenemos igualmente el ángulo EAM'$=\alpha+90°$.

Se infiere: el producto no varía de valor, cambiándose el órden de los dos factores dados.

3° Puede efectuarse la misma multiplicacion tambien de otra manera. Cuando $p+q\sqrt{-1}$ se toma como multiplicador, debe observarse que está formado de la unidad entera y absoluta, tomando esta primeramente p veces y despues q veces como sumando (ó sustraendo segun el signo) y las últimas veces en sentido lateral. En forma algébrica esta operacion se escribe:

$$\sqrt{-1}\times(p+q\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\times p+\sqrt{-1}\times q\times\sqrt{-1}$$

Efectuando el cálculo segun las reglas sobre los números imaginarios, se saca el resultado $p\sqrt{-1}-q$, ó bien tenemos

$$\sqrt{-1}\times(p+q\sqrt{-1})=(p+q\sqrt{-1})\times\sqrt{-1}=-q+p\sqrt{-1}\quad(6)$$

4° Cuando tenemos la unidad imaginaria negativa en lugar de la positiva, el resultado se deduce por un semejante procedimiento, pero para el N° 1° el movimiento angular sucederá en sentido negativo. Luego el producto buscado se representará por AM'', cantidad que es igual pero opuesta á AM' y se tendrá:

$$-\sqrt{-1}\times(p+q\sqrt{-1})=(p+q\sqrt{-1})\times-\sqrt{-1}=+q-p\sqrt{-1}\quad(7)$$

III. Caso: *los dos factores sean unidades complejas.*
Sean los factores [fig. 16]

$$\left.\begin{array}{l}1_{\alpha}=AM=p+q\sqrt{-1}\text{ como multiplicando}\\ 1_{\alpha'}=AM'=p'+q'\sqrt{-1}\text{ como multiplicador}\end{array}\right\}\quad(a)$$

1° Segun la definicion general de la multiplicacion debe formarse de AM un nuevo número de la misma manera que AM' está formado de la unidad entera y absoluta ó bien de AE. Pero AM' solo se distingue de AE por la posicion, y para encontrar AM', desde AE debe adelantarse de un ángulo α' que se determina por p' y q'. Luego para formar el producto buscado se toma AM como unidad y se adelanta por un ángulo MAM″ que es igual al ángulo EAM′$=\alpha'$, quedando la longitud de AM″ la misma que la de AM. Por consiguiente el radio AM″ representa el producto buscado.

Se ve que el ángulo EAM″ es igual á la suma de los ángulos α y α' que los factores forman con AE. Luego puede escribirse:

$$1_\alpha \times 1_{\alpha'} = 1_{\alpha+\alpha'} \tag{8}$$

es decir: *el producto de dos unidades complejas que tienen los ángulos α y α' es igual á otra unidad compleja que tiene por ángulo la suma $\alpha+\alpha'$ de los ángulos de los factores.*

Es evidente que el producto no cambia de valor, cuando se cambia el órden de los factores.

2º Hemos aplicado la definicion general á los primeros miembros de (a); ahora aplicaremos á los segundos.

Para formar el multiplicador $p'+q'\sqrt{-1}$ de la unidad, se la toma primeramente p′ veces y despues q′ veces como sumando, y se añaden los últimos sumandos como cantidades laterales. Luego haremos lo mismo con el multiplicando AM, tomándolo como unidad y poniéndolo primeramente p′ veces y despues q′ veces como sumando y las últimas veces en sentido lateral. Escríbese esta operacion en forma algébrica:

$$AM \times (p'+q'\sqrt{-1}) = AM.p'+AM.q'.\sqrt{-1} \tag{b}$$

El primer término del segundo miembro AM.p′ tiene un valor absoluto $=p'$, pues el valor absoluto de AM es la unidad. Luego AM.p′ se representa por AQ, cuando en la línea AM se toma AQ$=$AP′$=p'$. El segundo término del segundo miembro

tiene los factores AM.q′ y $\sqrt{-1}$. Pero el valor absoluto de AM.q′ es$=q'$, teniendo AM el valor absoluto 1; luego para construir AM.q′.$\sqrt{-1}$, se debe poner AT$=q'$ en direccion lateral de AM. Ahora el segundo miembro de (b) será la diagonal AM″ del paralelógramo AQM″T, que se construye sobre los lados AQ y AT con el ángulo interceptado TAQ que es un ángulo recto. Se sigue que AM″ es el producto buscado.

El triángulo M″QA es congruente al triángulo AM′P′; luego será la longitud de AM″ igual á la longitud de AM′ ó bien igual á la unidad, y será ademas el ángulo MAM″ igual al ángulo EAM′$=\alpha'$, por consiguiente el ángulo XAM″ igual á la suma de los ángulos α y α' que tienen los factores.

Tenemos el mismo resultado que está arriba en (8); pues el producto AM″ es verdaderamente una unidad compleja que tiene el ángulo $\alpha+\alpha'$.

3º Póngase en (b) $p+q\sqrt{-1}$ en lugar de AM, y se tendrá

$$(p+q\sqrt{-1}).(p'+q'\sqrt{-1})=(p+q\sqrt{-1}).p'+(p+q\sqrt{-1}).q'.\sqrt{-1}$$

y aplicando el I y II caso de este parágrafo, se sacará

$$(p+q\sqrt{-1}).(p'+q'\sqrt{-1})=pp'+qp'\sqrt{-1}+(pq'+qq'\sqrt{-1}).\sqrt{-1}$$

$$=pp'+qp'\sqrt{-1}+pq'\sqrt{-1}-qq'$$

luego

$$(p+q\sqrt{-1}).(p'+q'\sqrt{-1})=(pp'-qq')+(pq'+qp')\sqrt{-1} \quad (9)$$

resultado que es conforme á las reglas comunes del Álgebra.

IV. Caso: *los dos factores sean números complejos cualesquiera.* Sean dados como factores [fig. 17]:

$$\left.\begin{aligned} AM=r_{\alpha}&=x+y\sqrt{-1} \text{ como multiplicando} \\ AM'=r'_{\alpha'}&=x'+y'\sqrt{-1} \text{ como multiplicador} \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

1º Segun la definicion general de la multiplicacion de r_{α} ha de formarse un nuevo número de la misma manera que $r'_{\alpha'}$ se ha formado de la unidad entera y absoluta, ó bien de la unidad entera y positiva AE. Pero $r'_{\alpha'}$, que se representa por AM', tiene un valor absoluto $=r'$ y forma con AE el ángulo α'. De donde aplicando la misma definicion general de la multiplicacion:

1) lo que pertenece á los valores absolutos, el producto AM'' se sacará de la proporcion

$$AM'':AM=AM':AE \quad (d)$$

2) lo que pertenece á la posicion, debe ser la posicion de AM'' á la posicion de AM como es la posicion de AM' á la posicion de AE, ó bien en otras palabras, AM'' debe formar con AM el mismo ángulo α' que forma AM' con AE.

Luego para construir el producto buscado AM'', se construye un triángulo MAM'' que es semejante al triángulo EAM, haciendo el ángulo MAM'' igual al ángulo $EAM'=\alpha'$ y tomándolo por el mismo movimiento positivo [ó negativo].

Designando AM'' por r'', la proporcion (d) nos suministra $r'':r=r':1$, de donde $r''=r.r'$, y tenemos la ecuacion

$$r_{\alpha}.r'_{\alpha'}=r''_{\alpha''}=(r.r')_{\alpha+\alpha'} \quad (10)$$

en palabras: *El producto de dos números complejos es un número complejo, cuyo módulo es igual al producto de los módulos, y cuyo ángulo es igual á la suma de los ángulos de los factores.*

2º Aplíquese ahora la misma definicion general de la multiplicacion á los segundos miembros de [c], y veremos que se tiene el mismo resultado. Escribiendo AM en lugar del primer factor, se deduce completamente como en el II caso:

$$AM.(x'+y'\sqrt{-1})=AM.x'+AM.y'.\sqrt{-1} \quad [o]$$

Sea ahora

$$AQ : AM = x' : 1$$
$$QM'' : AM = y' : 1$$

y será $AQ = AM . x'$, $QM'' = AM . y'$. Luego para construir el segundo miembro de [e], se tira AM″ como hipotenusa del triángulo rectángulo, cuyos catetos son AQ y QM″. Este triángulo es semejante al triángulo AP′M′, pues

de $\frac{AQ}{x'} = AM$ y $\frac{QM''}{y'} = AM$ se sigue $\frac{AQ}{x'} = \frac{QM''}{y'}$

ó bien $AQ : QM'' = x' : y'$

y los ángulos interceptados son rectos. Luego será tambien $AM'' : AM' = AQ : x' = AM : 1$ ó bien $r'' : r' = r : 1$ y $r'' = r . r'$. Ademas, el ángulo QAM″ es igual al ángulo $XAM' = \alpha'$, luego el ángulo $XAM'' = \alpha + \alpha'$. Por consiguiente el resultado en [e] es un número complejo, cuyo módulo es $= r . r'$ y cuyo ángulo es $= \alpha + \alpha'$, como arriba.—La construccion sobre AM será siempre semejante á la construccion sobre AE, cualesquiera que sean los ángulos α y α', menores ó mayores que 90°, positivos ó negativos. Es una consecuencia necesaria de la definicion de la multiplicacion.

3° Escríbase finalmente en (e) $x + y\sqrt{-1}$ en lugar de AM, y tendremos

$$(x + y\sqrt{-1})(x' + y'\sqrt{-1}) = (x + y\sqrt{-1}) . x' + (x + y\sqrt{-1}) y' . \sqrt{-1}$$
$$= xx' + yx'\sqrt{-1} + xy'\sqrt{-1} - yy'$$

ó bien

$$(x + y\sqrt{-1})(x' + y'\sqrt{-1}) = (xx' - yy') + (xy' + yx')\sqrt{-1} \qquad (11)$$

resultado que se forma perfectamente segun las reglas del Álgebra y no varía de valor, cuando se cambia el órden de los factores. Lo mismo se ve por comparacion de la fig. 18 con la fig. 17.

Este caso contiene los precedentes como casos particulares.

V. Caso: *varios factores complejos.*

Por el I caso corol. 2° tenemos las ecuaciones

$$r_\alpha = r . 1_\alpha$$
$$r'_\beta = r' . 1_\beta$$
$$r''_\gamma = r'' . 1_\gamma$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

luego por multiplicacion se sacará

$$r_\alpha . r'_\beta . r''_\gamma \ldots = (r . r' . r'' \ldots) . 1_\alpha . 1_\beta . 1_\gamma \ldots ;$$

Pero [ecuac. (8)]:

$$1_\alpha \cdot 1_\beta = 1_{\alpha+\beta}$$

$$1_\alpha \cdot 1_\beta \cdot 1_\gamma = 1_{\alpha+\beta} \cdot 1_\gamma = 1_{\alpha+\beta+\gamma} \qquad \text{\&a.}$$

$$1_\alpha \cdot 1_\beta \cdot 1_\gamma \ldots = 1_{\alpha+\beta+\gamma\ldots} \qquad (12)$$

luego será

$$r_\alpha \cdot r'_\beta \cdot r''_\gamma \ldots = (r \cdot r' \cdot r'' \ldots) \cdot 1_{\alpha+\beta+\gamma\ldots}$$

ó bien $$r_\alpha \cdot r'_\beta \cdot r''_\gamma \ldots = (r \cdot r' \cdot r'' \ldots)_{\alpha+\beta+\gamma\ldots} \qquad (13)$$

es decir: *El producto de varios números complejos es un número complejo, cuyo módulo es el producto de los módulos, y cuyo ángulo es la suma de los ángulos de los factores.*

Cuando todos los factores son unidades, el producto será tambien una unidad compleja; pues para $r=r'=r''=\ldots=1$, de (13) se obtiene la ecuacion (12). Para construir este producto de diferentes unidades complejas, en el círculo [fig. 19] que tiene por radio la unidad, desde AE se ponen uno despues del otro los ángulos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ El último radio representa el producto.

Generalmente se efectúa la multiplicacion de varios factores complejos por cálculo. Así será

$$(2+3\sqrt{-1})(1+2\sqrt{-1})(2-3\sqrt{-1}) = +13+26\sqrt{-1}$$

$$(1-\sqrt{-1})(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}).(2+\sqrt{-1})(2+2\sqrt{-1}) = 10$$

Division. Se aplican las reglas comunes del Algebra á la multiplicacion, luego se aplicarán tambien á la division, pues esta no es sino la inversion de la primera.

Una division por un número complejo se efectúa, haciendo el divisor real. Así será:

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\sqrt{-1} \qquad (14)$$

$$\frac{2+3i}{2-3i} = \frac{(2+3i)^2}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{4+12i-9}{4+9} = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i$$

Un cociente de dos números complejos tiene tambien la forma general de un número complejo.

§. 84.

Potencias de un número complejo.

En la ecuacion (13) del § precedente sea $r'=r''=r'''=\ldots=r$, $\alpha'=\alpha''=\alpha'''=\ldots=\alpha$ y ademas el número de los factores $=n$, y se saca:

$$r_\alpha . r_\alpha . r_\alpha \ldots . n \text{ veces} = (r.r.r..n \text{ veces})_{\alpha+\alpha+\alpha\,..\,n \text{ veces}}$$

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha} \qquad (15)$$

en palabras: *La n^{sima} potencia de un número complejo que tiene el módulo* r *y el ángulo α, es un número complejo que tiene por módulo la n^{sima} potencia de* r *y por ángulo $n\alpha$.*

Cuando $r=1$, tenemos

$$(1_\alpha)^n = 1_{n\alpha} \qquad (16)$$

es decir: *La n^{sima} potencia de una unidad compleja que tiene el ángulo α, es una unidad compleja que tiene por ángulo $n\alpha$.*

En la fig. 20 sean los ángulos EAM_1, M_1AM_2, $M_2AM_3 \ldots$ todos iguales entre sí, y los radios AM_1, AM_2, $AM_3 \ldots AM_7$ representarán la 1ª, 2ª, 3ª,...7ª potencia de la unidad compleja AM_1.

Ejemplo. Búsquese la 5ª potencia de

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

A. *Por cálculo:*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)^2 = \tfrac{1}{2} + 2 . \tfrac{1}{2}\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2} = +\sqrt{-1}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)^4 = (+\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right)^5 = -1 . \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-1}$$

B. *Por construccion.* El número dado es una unidad compleja que tiene el ángulo 45°. Pues 1) el módulo es

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}} = 1$$

y 2) por los signos de la parte real é imaginaria del mismo número se ve, que pertenece al I cuadrante. Luego representándose por AN_1, [fig. 21], será $AP = \frac{1}{\sqrt{2}} = PN_1$, y por consiguiente el ángulo $EAN_1 = 45°$.

Tírense ahora los diámetros EN_4, N_1N_5, N_2N_6, N_3N_7 de de manera que formen entre sí los ángulos $=45°$, y las potencias consecutivas del número propuesto serán:

$$AN_1=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^1=+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$AN_2=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^2=+\sqrt{-1}$$

$$AN_3=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^3=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$AN_4=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^4=-1$$

$$AN_5=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^5=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$AN_6=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^6=-\sqrt{-1}$$

$$AN_7=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^7=+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$AN_8=(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^8=+1$$

Se leen inmediatamente los resultados en la figura, pues todos los triángulos son congruentes é isósceles, y los signos de la parte real é imaginaria de cada unidad se determinan por la posicion de las líneas respectivas.

La 9ª, 10ª. 11ª.... potencia serán iguales á la 1ª, 2ª, 3ª...., cuyos valores se repiten constantemente.

§. 85.

Raices de los números complejos.

En la ecuac. (15) del § precedente

$$(r_\alpha)^n=(r^n)_{n\alpha}$$

póngase $\alpha:n$ en lugar de α; se tendrá

$$(r_{\alpha:n})^n=(r^n)_\alpha$$

y cuando se estrae la raiz del grado n

$$\sqrt[n]{(r^n)_\alpha}=r_{\alpha:n}$$

Sea $r^n=R$, luego $r=\sqrt[n]{R}$, y tendremos finalmente

$$\sqrt[n]{R_\alpha}=(\sqrt[n]{R})_{\alpha:n} \qquad (17)$$

es decir: *la n^{sima} raiz de un número complejo que tiene el módulo R y el ángulo α, es un número complejo que tiene por módulo la n^{sima} raiz de R y por ángulo la n^{sima} parte de α.*

Cuando $R=1$, la ecuacion anterior se convierte en

$$\sqrt[n]{1_\alpha} = 1_{\alpha:n} \tag{18}$$

en palabras *la n^{sima} raiz de una unidad compleja que tiene el ángulo α, es una unidad compleja que tiene por ángulo la n^{sima} parte de α.*

Sea AM [fig. 22] una unidad compleja que tiene el ángulo EAM$=\alpha$, y el arco EN la n^{sima} parte del arco EFM, y AN representará la n^{sima} raiz de AM.

La ecuacion (18) enuncia, que el ángulo que la unidad dada forma con AE, debe partirse por n, Pero este ángulo, como es $=\alpha$, puede ser tambien $=360^\circ+\alpha$, $2.360^\circ+\alpha$, $3.360^\circ+\alpha\ldots$; pues el radio AM, al girar alrededor del centro A, puede tomar la misma posicion AM repetidas veces, siempre que ha acabado de nuevo la circunferencia ó 360°. Luego tendremos varios valores de la n^{sima} raiz, dividiendo los ángulos

$$\alpha;\quad 1.360^\circ+\alpha;\quad 2.360^\circ+\alpha;\quad 3.360^\circ+\alpha;\ldots$$

por n y determinando las unidades complejas que con AE forman los ángulos

$$\frac{\alpha}{n};\quad \frac{1.360^\circ+\alpha}{n};\quad \frac{2.360^\circ+\alpha}{n};\quad \frac{3.360^\circ+\alpha}{n};\ldots \tag{a}$$

Pero n es un número entero, y por consiguiente la continuacion de la serie (a) seria:

$$\frac{n.360^\circ+\alpha}{n};\quad \frac{(n+1).360^\circ+\alpha}{n};\quad \frac{(n+2).360^\circ+\alpha}{n};\ldots$$

$$\frac{2n.360^\circ+\alpha}{n};\quad \frac{(2n+1).360^\circ+\alpha}{n};\quad \frac{(2n+2).360^\circ+\alpha}{n};\ldots$$

$$\frac{3n.360^\circ+\alpha}{n};\quad \frac{(3n+1).360^\circ+\alpha}{n};\quad \frac{(3n+2).360^\circ+\alpha}{n};\ldots$$

&a. &a, &a.

y estas series no son sino la serie (a), aumentados los ángulos de 1.360°, 2.360°, $3.360^\circ\ldots$, como se ve despues de hecha la reduccion.

Pero una unidad compleja que tiene el ángulo β es la misma que la que tiene el ángulo $360^\circ+\beta$, $2.360^\circ+\beta$, $3.360^\circ+\beta\ldots$; pues despues de haber acabado una circunferencia entera, la posicion de su radio es completamente la misma que ántes. De donde se infiere, que las unidades complejas que tienen los ángulos de (a), son las mismas que tienen los ángulos de las últimas series, y por estas no se determinan nuevas. Luego los diferentes valores de la n^{sima} raiz que se buscan, están todos contenidos en la serie (a) que termina con $\frac{(n-1).360+\alpha}{n}$; pues este término precede al primero de la serie siguiente. Concluimos: todos los diferentes valores de la n^{sima} raiz que quieren determinarse, se hallarán por los ángulos:

$$\frac{\alpha}{n};\quad \frac{1}{n}.360^\circ+\frac{\alpha}{n};\quad \frac{2}{n}.360^\circ+\frac{\alpha}{n};\quad \frac{3}{n}.360^\circ+\frac{\alpha}{n}\ldots\frac{n-1}{n}.360^\circ+\frac{\alpha}{n} \tag{b}$$

Todos estos ángulos son diferentes uno de otro, y el máximo es menor que $360^\circ + \frac{\alpha}{n}$, cuya unidad es la misma que la de $\frac{\alpha}{n}$ y la primera que pueda repetirse. De donde se sigue que todas las unidades complejas que pertenecen á los ángulos de la serie (b) son diferentes una de otra.

Finalmente, la serie (b) contiene n términos, y como estos nos dan cada uno un valor de la n^{sima} raiz, y ademas todos los posibles y todos diferentes unos de otros, podemos establecer este teorema muy notable:

La n^{sima} raiz de cualquier unidad compleja siempre tiene n mas ni ménos que n valores diferentes.

EJEMPLO. Para hallar la 6ª raiz de la unidad compleja AM [fig. 23 (a)], la serie (b) nos suministra para n=6, los ángulos

$$\frac{\alpha}{6};\ 60^\circ + \frac{\alpha}{6};\ 2.60^\circ + \frac{\alpha}{n};\ 3.60^\circ + \frac{\alpha}{n};\ 4.60^\circ + \frac{\alpha}{n};\ 5.60^\circ + \frac{\alpha}{n} \quad (c)$$

Luego en la fig, 23a, el arco EM que es la medida de α, debe partirse en 6 partes iguales, la primera de las cuales sea EM_1. Despues se traza un círculo con el mismo radio=1 [fig. 23b]; desde E descríbase EM_1, y desde el punto M_1 así obtenido, la circunferencia del círculo pártase en 6 partes iguales. Tendremos 6 puntos de particion M_1, M_2, $M_3 \ldots M_6$, y tirando los radios correspondientes, los mismos nos representarán los 6 valores diferentes de la 6ª raiz de la unidad compleja AM, que está en la fig. 23a.

§. 86.

Raices de +1 y −1

Todos los teoremas demostrados sobre los números complejos valen para los números reales é imaginarios; pues estos no son sino formas particulares del número complejo, que es la forma general de los números.

La unidad compleja será = +1, cuando $\alpha=0$, y será = −1, cuando $\alpha=180^\circ$. Luego para estas suposiciones pueden buscarse los diferentes valores de la $\sqrt[n]{+1}$ y de la $\sqrt[n]{-1}$.

I. CASO: $\sqrt[n]{+1}$.

Póngase en la serie (b) $\alpha=0$, y los valores diferentes de $\sqrt[n]{+1}$ están contenidos en la serie de ángulos:

$$0;\ \frac{1}{n}.360^\circ;\ \frac{2}{n}.360^\circ;\ \frac{3}{n}.360^\circ;\ \frac{4}{n}.360^\circ \ldots \frac{n-1}{n}.360^\circ. \quad (m)$$

EJEMPLO 1. Para la $\sqrt[12]{+1}$, tenemos n=12; luego los ángulos 0; 1.30°; 2.30; 3.30°; 4.30°; ...10.30°; 11.30°

En la fig. 24, la circunferencia desde E pártase en 12 partes iguales, y tírense los radios correspondientes AM_1, AM_2, AM_3... AM_{12}, los cuales serán los 12 valores de la raiz dada.

El triángulo AM_2M_{12} es equilátero, luego será $M_2P=\frac{1}{2}AM_1=\frac{1}{2}$ y

$$AP=\sqrt{\overline{AM}_2^2-\overline{M_2P}^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por estas cantidades la unidad compleja AM_2 será $=+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

Se puede demostrar fácilmente que todos los triángulos de la misma figura son congruentes. Luego, atendido el signo de las diferentes líneas, pueden escribirse inmediatamente los 12 valores buscados de $\sqrt{+1}$, y serán los siguientes:

$$+1;\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\quad +\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad +i;\quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$
$$-1;\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad -i;\quad +\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad +\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

Ejemplo 2. Para hallar los valores de $\sqrt[3]{+1}$, la série (m) para $n=3$, nos da los ángulos

$$0;\quad 120°;\quad 2.120°$$

y las unidades complejas correspondientes son AM_1, AM_2, AM_3 en la fig. 25, ó bien AM_1, AM_5 y AM_9 en la fig. 24. De dondo los tres valores de la $\sqrt{+1}$ serán

$$+1;\quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

En general: Se hallarán los n valores de la n^{sima} raiz de $+1$, partiendo el círculo desde E en n partes iguales y tirando los radios correspondientes —Ademas, cuando el índice *es par*, tendremos dos raices reales $+1$ y -1, pues un punto de particion cae sobre E y otro sobre E'; pero cuando el índice es *impar*, tendremos una raiz real $=+1$; pues sobre E' no cae un punto de particion. Todos los otros valores son complejos (ó imaginarios) y *siempre números conjugados*. Finalmente los valores desde el segundo, son las potencias consecutivas del primero [§ 84].

II. Caso: $\sqrt[n]{-1}$

En la serie (b) del § precedente sea $\alpha=180°$, y los valores diferentes de $\sqrt[n]{-1}$ están contenidos en la serie de los ángulos:

$$\frac{1}{n}.180°;\quad \frac{3}{n}.180°;\quad \frac{5}{n}.180°;\quad \frac{7}{n}.180°;\ \ldots\ \frac{2n-1}{n}.180° \qquad (n)$$

Ejemplo 3. Para la $\sqrt[3]{-1}$, tenemos los ángulos

$$60°;\quad 180°;\quad 300°$$

y las unidades complejas correspondientes serán AM_1, AM_2,

AM_3, en la fig. 26 ó bien AM_3, AM_7, AM_{11} en la fig. 24; luego los tres valores de la $\sqrt[3]{-1}$, serán

$$+\tfrac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\quad -1;\quad +\tfrac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Ejemplo 4. Para la $\sqrt[6]{-1}$, la serie (n) nos da los ángulos:

$$1.30^\circ;\ 3.30^\circ;\ 5.30^\circ;\ 7.30^\circ;\ 9.30^\circ;\ 11.30^\circ$$

y los valores buscados de la raiz serán AM_1, AM_2, AM_3....AM_6 en la fig. 27; pero los mismos se encuentran tambien en la fig. 24, y son en forma algébrica:

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}i;\quad +i;\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}+\tfrac{1}{2}i;\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}i;\quad -i;+\frac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{1}{2}i$$

En general: Para hallar los n valores de $\sqrt[n]{-1}$, se parte el círculo en $2n$ partes iguales y tíranse los radios al 1.ʳ punto de particion que es diferente de E, y despues al 3°. 5°, 7°....punto.—Ademas, cuando el índice es un número *impar*, se tiene una raiz real —1, pues E′ es un punto de particion; pero cuando el índice es un número *par*, todas las raices son complejas (ó imaginarias) y ninguna es real. En uno y otro caso los valores complejos siempre son conjugados; y forman desde el segundo las potencias impares (3ª, 5ª, 7ª....) del primero.

Raices de números cualesquiera.

1° La n^{sima} raiz de $\pm M$, cuando M es un número real, puede escribirse

$$\sqrt[n]{M.\pm 1}=\sqrt[n]{M}.\sqrt[n]{\pm 1}$$

De donde se deduce:

La n^{sima} raiz de cualquier número real positivo ó negativo tiene n valores diferentes, que son la n^{sima} raiz numérica del número, multiplicada por los n valores de la n^{sima} raiz de $+1$ ó -1.

Así $\sqrt[3]{+8}$ tiene los valores

$$+2;\ -1+i\sqrt{3};\ -1-i\sqrt{3}$$

2° Cuando M es un número complejo, este puede escribirse como el producto de su módulo por la unidad compleja correspondiente: $M=R.1_\alpha=R(p+q\sqrt{-1})$. Luego:

La n^{sima} raiz de un número complejo cualquiera tiene n valores diferentes, que son la n^{sima} raiz numérica de su módulo, multiplicada por los n valores de la n^{sima} raiz de la unidad compleja correspondiente.

Nota. La estraccion de una raiz con *índice par* de un número negativo, nos ha conducido á una nueva especie de números, á los números complejos, que es la forma general de todos los números que conocemos. Ninguna operacion con estas nuevas cantidades nos ha suministrado otra especie nueva; por el contrario, toda raiz par de un número negativo y aun toda raiz de un número complejo se resuelve en otros números complejos. Luego estos parecen verdaderamente ser la suprema clase de números. Ademas las mismas cantidades tienen una relacion muy singular é importante con los ángulos y permiten el tránsito de los números á los ángulos y de los ángulos á los números, de el cual se tratará en el Artículo VI.

ARTICULO VI.

DE LAS FUNCIONES GONIOMÉTRICAS.

§. 87.

Esplicaciones y definiciones.

1° El triángulo rectángulo, que un número complejo AM [fig. 28] forma, nos da los seis cocientes de sus lados

$$\frac{y}{R}, \frac{x}{R}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{R}{x}, \frac{R}{y} \qquad (a)$$

llamando x, y á sus coordenadas y R á su radio.

Dichos seis cocientes quedarán los mismos, quedando el ángulo α el mismo. Porque bajando la perpendicular M′Q de otro punto M′ del mismo lado AM del ángulo α, el nuevo triángulo AM′Q será semejante al primero; luego todos sus cocientes

$$\frac{y'}{R'}, \frac{x'}{R'}, \frac{y'}{x'}, \frac{x'}{y'}, \frac{R'}{x'}, \frac{R'}{y'}$$

serán los mismos que los que están en (a). Y esta igualdad se verifica no solamente respecto al valor absoluto de los mismos, sino tambien respecto á los algébricos, es decir, al valor de los signos. Porque cualquiera que sea la posicion de M y M′, estos puntos estarán siempre en un mismo cuadrante, y por esto y' siempre tendrá el signo de y, y x' el de x, quedando R′ con R una cantidad absoluta.

Pero los mismos cocientes cambiarán todos, cambiándose el ángulo α. Porque si se supone que sea M″ otra posicion de M, cuando el ángulo α va aumentando y el radio AM″ queda igual á AM, inmediatamente será $y''>y$ y $x''<x$; luego será

$$\frac{y''}{R} > \frac{y}{R};\ \frac{x''}{R} < \frac{x}{R};\ \frac{y''}{x''} > \frac{y}{x};\ \frac{x''}{y''} < \frac{x}{y};\ \frac{R}{x''} > \frac{R}{x};\ \frac{R}{y''} < \frac{R}{y}$$

y por esto los valores de los cocientes en (a) serán del todo otros, y cuando M″ está en otro cuadrante por lo ménos se mudará uno ú otro de los signos.

Luego los seis cocientes en (a) dependen entera y solamente del ángulo α. Una cantidad que depende de otra de modo que cambie su valor, cambiando el de la otra, se dice *una funcion de la otra.* Luego los seis cocientes son funciones del ángulo α.

2º Para espresar esta dependencia de una manera visible se escribe

$\frac{y}{R} = \text{sen}\,\alpha$	y se dice:	$\frac{y}{R}$ es el *seno* de α	(I)
$\frac{x}{R} = \cos\alpha$	„	$\frac{x}{R}$ es el *coseno* de α	
$\frac{y}{x} = \text{tang}\,\alpha$	„	$\frac{y}{x}$ es la *tangente* de α	
$\frac{x}{y} = \text{cotang}\,\alpha$	„	$\frac{x}{y}$ es la *cotangente* de α	
$\frac{R}{x} = \sec\alpha$	„	$\frac{R}{x}$ es la *secante* de α	
$\frac{R}{y} = \text{cosec}\,\alpha$	„	$\frac{R}{y}$ es la *cotangente* de α	

Estas designaciones y definiciones valen para todo número complejo, para cualquier posicion de M y para todos los valores del ángulo α, tanto para valores de α menores de 360°, como tambien para los mayores de 360°, tanto para los positivos como para los negativos, cuando el radio AM girando al rededor del vértice A se mueve en la direccion desde AX hácia AY′, AX′ &.

Llámanse las cantidades en (I) funciones goniométricas (γωνία ó γῶνος = ángulo, μετρεῖν = medir) y como cocientes de dos líneas, todas son números abstractos. Pertenecen de igual modo al Algebra y á la Geometría, pues no son otra cosa que las relaciones entre las partes principales de un número complejo que se puede representar por una figura geométrica. Trataremos aquí de estas cantidades como una especie de números. Ademas, á la teoría de las mismas, como se da en los tratados de la geometría, comunmente falta la brevedad y la generalidad de la demostracion para cualquier caso, miéntras que se sigue aquella inmediatamente y con todo el rigor de las demostraciones matemáticas, cuando dichas cantidades se consideran como partes de los números complejos.

3º Supongamos ahora que sea R=1 y AM representará una unidad compleja y las primeras ecuaciones (I) se convierten en

$$\text{sen}\,\alpha = y\ ;\quad \cos\alpha = x$$

Prolongando MP hasta la otra interseccion con el círculo en N [fig. 29], será MP=PN, luego MP la mitad de una cuerda MN. Se escribió al principio la cantidad MP *"cuerda semi-inscripta"* y por brevedad *"semi-inscripta"* ó bien *"s.ins"* de donde por contraccion y la disinencia latina viene *"sinus"*, lo que en castellano designa *seno*. Tirando MQ perpendicular á AF, será MQ el seno de β, y como β es el complemento de α, MQ será el *seno* del complemento ó el *coseno* de α. Pero QM es $=$x, de donde x el coseno de α.

Levántese EK perpendicular á AE en el punto E hasta la interseccion con la prolongacion del radio en K, y será EK una *tangente* del círculo y AK la *secante* correspondiente. Pero tenemos

$$EK:AE=y:x \quad \text{de donde } EK=AE.\frac{y}{x}$$

$$AK:AE=AM:x \quad \text{de donde } AK=\frac{AE.AM}{x}$$

y como AE=AM=1, se tiene

$$EK=\frac{y}{x}=\text{tang }\alpha\ ; \quad AK=\frac{1}{x}=\sec\alpha$$

Así se designan la tangente y la secante de α por su valor geométrico. Ademas, de semejante manera es FL la tangente y AL la secante de β, y por esto se llaman *la cotangente* y *la cosecante* de α.

§. 88.

Propiedades fundamentales de las funciones goniométricas.

1ª *El seno* $\frac{y}{R}$ y *la cosecante* $\frac{R}{y}$ tienen siempre el signo de la ordenada; *el coseno* $\frac{x}{R}$ y *la secante* $\frac{R}{x}$ tienen siempre el signo de la abscisa; finalmente *la tangente* $\frac{y}{x}$ y *la cotangente* $\frac{x}{y}$ tienen siempre un mismo signo, que será positivo si las coordenadas tienen signos iguales, y negativo si los tienen desiguales. Luego para los signos tenemos la tabla:

en el cuadrante	I	II	III	IV
la ordenada el seno la cosecante } son	+	+	—	—
la abscisa el coseno la secante } son	+	—	—	+
la tangente la cotangente } son	+	—	+	—

2° Para *los límites de las funciones* tenemos

$$\begin{array}{lllllll} \text{para} & \alpha = & 0, & 90^\circ, & 180^\circ, & 270^\circ, & 360^\circ \\ \text{es} & y = & 0, & +R, & 0, & -R, & 0 \\ \text{es} & x = & +R, & 0, & -R, & 0, & +R \end{array}$$

luego, formando los cocientes $\frac{y}{R}$, $\frac{x}{R}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ se saca la tabla siguiente:

sen $0^\circ = 0$	sen $90^\circ = +1$	sen $180^\circ = 0$	sen $270^\circ = -1$
cos $0^\circ = +1$	cos $90^\circ = 0$	cos $180^\circ = -1$	cos $270^\circ = 0$
tang $0^\circ = 0$	tang $90^\circ = \pm\infty$	tang $180^\circ = 0$	tang $270^\circ = \pm\infty$
cotg $0^\circ = \mp\infty$	cotg $90^\circ = 0$	cotg $180^\circ = \mp\infty$	cotg $270^\circ = 0$

y las funciones de 360° serán iguales á las de 0°.

Se obtendrá el primer signo de ∞, suponiendo que va aumentando el ángulo α, y el segundo para el caso opuesto.

3° Las coordenadas y, x nunca son mayores que el radio R, luego el seno $\frac{y}{R}$ y el coseno $\frac{x}{R}$ nunca son mayores que la unidad, y la secante $\frac{R}{x}$ y la cosecante $\frac{R}{y}$ nunca son menores que la unidad. Cuando y crece hasta R, x decrece hasta 0, y cuando y decrece hasta 0, x crece hasta R; por consiguiente la tangente $\frac{y}{x}$ puede tomar cualesquier valores entre $\frac{R}{0}$ y $\frac{0}{R}$, es decir entre ∞ y 0, y la cotangente $\frac{x}{y}$ de la misma manera. Luego con respecto á los signos, se sigue:

Un quebrado propio positivo ó negativo y ademas la unidad positiva ó negativa pueden igualarse á un seno ó coseno.

Un número cualquiera, positivo ó negativo mayor que uno, y ademas la unidad positiva ó negativa pueden igualarse á una secante ó cosecante.

Un número positivo ó negativo, cualquiera que sea, mayor ó menor que uno, puede igualarse á una tangente ó cotangente.

4° Aumentándose el ángulo α, la ordenada y por su valor absoluto crece en el I$^{\text{r}}$ cuadrante, decrece en el II°, crece en el III°, decrece en el IV° Se infiere de la ecuacion $R^2 = y^2 + x^2$, que la abscisa siempre va aumentando, cuando la ordenada se disminuye, y que va disminuyendo cuando la ordenada se aumenta. Luego con y crecen y decrecen $\frac{y}{R}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{R}{x}$

con x decrecen y crecen $\frac{x}{R}$, $\frac{x}{y}$, $\frac{R}{y}$

y tenemos la tabla siguiente de la vuelta de las funciones:

Aumentándose el ángulo α				
en el cuadrante	I	II	III	IV
la ordenada el seno la tangente la secante	crece	decrece	crece	decrec.
la abscisa el coseno la cotangente la cosecante	decrece	crece	decrece	crece

§. 89.

Relaciones entre las funciones goniométricas del mismo ángulo.

1º De las definiciones generales puestas arriba en (I), se sacan inmediatamente las relaciones siguientes entre las funciones del mismo ángulo:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ \text{tang}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha} & 3)\ \sec\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\,\alpha} \\[2ex] 2)\ \text{cotang}\,\alpha = \dfrac{\cos\,\alpha}{\text{sen}\,\alpha} & 4)\ \text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha} \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$5)\ \text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\text{cotg}\,\alpha};\quad 6)\ \text{cotang}\,\alpha = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha};\quad 7)\ \text{tang}\,\alpha\,.\,\text{cotg}\,\alpha = 1$$

Las primeras cuatro fórmulas nos enseñan que todas las funciones son conocidas, si el *seno* y el *coseno* lo son.

2º Para el radio tenemos la ecuacion [fig. 28]:

$$R^2 = y^2 + x^2$$

y esta será siempre verdadera para cualquier ángulo α, pues las coordenadas x ó y siempre forman con R un triángulo rectángulo, en donde R es hipotenusa, y ademas cuando x ó y toman valores negativos, los cuadrados de las mismas serán siempre positivos. De la ecuacion se sigue que

$$\left(\frac{y}{R}\right)^2+\left(\frac{x}{R}\right)^2=1$$

ó bien que

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ de donde} \\ 1-\operatorname{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha;\quad 1-\cos^2\alpha=\operatorname{sen}^2\alpha \\ \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}=\cos\alpha;\quad \sqrt{1-\cos^2\alpha}=\operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} \quad (2)$$

Para la raiz se debe tomar el signo correspondiente, por ejemplo el signo $+$ cuando $\alpha<90°$, y el signo $-$ cuando $180°<\alpha<270°$.

Por medio de estas fórmulas y las fórmulas (1), todas las funciones goniométricas podrán espresarse *por el seno ó coseno solo:*

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \\ \operatorname{tang}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} \\ \operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \sec\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} \\ \operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \end{array}\right| (3) \quad \left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \operatorname{tang}\alpha=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \\ \operatorname{cotg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \\ \sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha} \\ \operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \end{array}\right| (4)$$

En todo caso particular debe ponerse el signo correspondiente á las raices cuadradas.

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES GONIOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DIFERENTES.

§. 90.

Múltiplos de 360° y ángulos negativos.

1° Un número complejo [fig. 28] quedará el mismo, cuando aumentando ó disminuyéndose el ángulo de

$$1.360°,\quad 2.360°,\quad 3.360°\ldots\ldots n.360°$$

el radio AM despues de algunas vueltas enteras toma la posicion primitiva AM. Por esto tambien las coordenadas x é y finalmente quedarán las mismas que ántes, y por consiguiente los cocientes

$$\frac{y}{R},\ \frac{x}{R},\ \frac{y}{x},\ \frac{x}{y},\ \frac{R}{x},\ \frac{R}{y}$$

tendrán los mismos valores. Pero estos cocientes son todas las funciones goniométricas; luego

Cualquier funcion goniométrica de $\alpha \pm n.360^\circ$ es igual á la misma funcion de α, ó bien: una funcion cualquiera goniométrica no varía de valor, añadiendo ó restando del ángulo repetidas veces toda la circunferencia.

Designando por F (ϑ) una funcion cualquiera goniométrica de ϑ, este teorema puede escribirse

$$F(\vartheta) = F(\vartheta \pm n.360^\circ) \qquad (5)$$

2º Sea [fig. 30] el ángulo EAM′ igual al ángulo EAM, y será el arco EF′M′ igual al arco EFM; luego los puntos M′ y M tendrán una igual distancia desde E, y la cuerda MM′ será perpendicular al diámetro EE′, y por consiguiente los números AM y AM′ serán números conjugados, teniendo una misma abscisa $x' = x$ y las ordenadas iguales pero opuestas $y' = -y$. Por esto tenemos

$$\frac{y'}{R} = -\frac{y}{R}; \qquad \frac{x'}{R} = +\frac{x}{R}$$

Si el ángulo $EAM = \alpha$ es positivo, el segundo EAM′ será negativo $= -\alpha$. Ahora, aplicando las definiciones generales á las ecuaciones anteriores, se infiere

$$\left.\begin{array}{ll} \text{sen} -\alpha = -\text{sen}\,\alpha\,; & \text{tang} -\alpha = -\text{tang}\,\alpha \\ \cos -\alpha = +\cos\alpha\,: & \text{cotg} -\alpha = -\text{cotang}\,\alpha \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Las ecuaciones para la tangente y la cotangente se siguen por la aplicacion de las dos primeras fórmulas (1).

Los puntos M y M′ pueden cambiar de posicion como se quiera sin alterar la demostracion en ninguna cosa; luego estas fórmulas (6) serán siempre verdaderas para todo valor de α, aun para los negativos.

§. 91.

Principios de la goniometria analítica.

Iᵉʳ Principio. *Una unidad compleja que tiene el ángulo α, puede escribirse en la forma:*

$$1_\alpha = \cos\alpha + i.\text{sen}\alpha \qquad (7)$$

En efecto [fig. 28], sea AM una unidad compleja, de modo que tengamos el valor absoluto de AM igual á la unidad, y se representará AM como unidad compleja por el signo 1_α que dice: *la unidad que tiene el ángulo* α.

Ademas, la otra espresion de la misma unidad compleja es

$$x+y\sqrt{-1} \qquad \text{a.}$$

Pero $x=\cos\alpha$ é $y=\text{sen}\,\alpha$, y ademas la unidad imaginaria se puede designar por i; luego la espresion (a) tomará la forma

$$\cos\alpha+i.\text{sen}\,\alpha$$

Igualando las dos espresiones de la misma unidad compleja, tendremos la ecuacion (7), y esta será verdadera para cualquier valor de α, aun para mayores de 360° y todos los negativos; pues la espresion (a) vale siempre, y se aplican solamente las definiciones generales de las funciones goniométricas.

II° Principio. *Dos unidades complejas quedan multiplicadas entre sí, sumando sus ángulos.*

Este principio está demostrado en la teoría de la multiplicacion de los números complejos; sin embargo daremos aquí sobre él algunas noticias que bastan para todo lo que se sigue.

Sea AE=+1 la unidad real positiva [fig. 31], ademas la unidad compleja AM multiplicando, y la otra AM′ multiplicador. Segun la definicion general de la multiplicacion se debe formar el producto AM″ de AM como AM′ se forma de AE. Pero por su valor absoluto es AM′=AE. Luego el producto AM″ por su valor absoluto debe ser =AM, y por consiguiente se representará por un radio del mismo círculo. Búscase ahora solamente la *posicion* de AM″. Debe formarse AM″ de AM, como se forma AM′ de AM. Pero AM′ se forma de AE por un movimiento angular positivo del radio y este movimiento se mide por el ángulo EAM′=β. Luego se formará AM″ de AM por el mismo movimiento angular positivo del radio, partiendo desde AM. Con otras palabras: el arco MM″ debe ser igual al arco EM′ y tomado en el mismo sentido positivo. El ángulo que AM″ forma con AE será igual á la suma del ángulo EAM=α que forma el multiplicando, y del ángulo EAM′=β que forma el multiplicador con la unidad positiva. Por consiguiente:

El producto de dos unidades complejas es una unidad compleja que forma con la unidad positiva un ángulo que es igual á la suma de los dos ángulos que tienen los dos factores. Esto es lo que se enuncia en el 2º principio. Escríbese este teorema como se sigue:

$$1_\alpha \cdot 1_\beta = 1_{\alpha+\beta} \qquad (8)$$

Este principio debe ser verdadero para cualquier valor de α y β. Cuando el multiplicador AM′ [fig. 32] tiene un ángulo negativo β', AM′ se forma de AE por un movimiento angular negativo, luego se formará tambien el producto AM″ de AM por un igual movimiento negativo, es decir el ángulo negativo β' se suma con el ángulo α, cualesquiera que sean las magnitudes de uno y otro.

No se muda la construccion, cuando α se supone como ángulo negativo, por ejemplo, cuando en las fig. 31 y 32 se supone que AM tenga su posicion por un movimiento negativo, de manera que forme con AE el ángulo negativo que se mide por el arco ELPM,

Luego este principio es verdadero para cualquier caso.

III[r] Principio. *Cuando dos números complejos son iguales, serán iguales separadamente las partes reales y las partes imaginarias de los mismos.*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si} & a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1} \\ \text{será} & a=a' \quad \text{y} \quad b=b' \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Este principio es el corolario del § 82.

Ejemplo. Aplicaremos estos principios, por ejemplo, al último caso del § precedente, es decir, para ángulos positivos y negativos de un mismo valor absoluto.

Tenemos

$$\alpha+(-\alpha)=0$$

Luego: la unidad compleja que tiene el ángulo α, multiplicada por la unidad compleja que tiene el ángulo $-\alpha$, nos dará una unidad compleja que tiene el ángulo *cero*. Se saca por el II° principio. Pero

la unidad	compl.	que	tiene	α	es	$\cos\alpha+i.\text{sen}\,\alpha$
”	”	”	”	” $-\alpha$	es	$\cos-\alpha+i.\text{sen}-\alpha$
”	”	”	”	” 0	es	$\cos 0^\circ+i.\text{sen}\,0^\circ=+1$

Se infiere por el I[r] principio, Luego tendremos:

$$(\cos\alpha+i.\text{sen}\,\alpha)\,(\cos-\alpha+i.\text{sen}-\alpha)=+1$$

Por division se sigue:

$$(\cos-\alpha+i.\text{sen}-\alpha)=\frac{+1}{\cos\alpha+i.\text{sen}\,\alpha}$$

A la derecha hágase el denominador real, multiplicando el numerador y denominador por la diferencia

$$\cos\alpha-i.\text{sen}\,\alpha$$

y tendremos

$$\cos-\alpha+i.\text{sen}-\alpha=\frac{\cos\alpha-i.\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}$$

Pero $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha$ es el módulo, y por consiguiente $=1$; luego será

$$\cos-\alpha + i.\text{sen}-\alpha = \cos\alpha - i.\text{sen}\,\alpha$$

Ahora se aplica el tercer principio: la parte real es igual á la parte real, y la parte imaginaria igual á la parte imaginaria; por consiguiente será

$$\cos-\alpha = +\cos\alpha; \qquad \text{sen}-\alpha = -\,\text{sen}\,\alpha$$

Estas fórmulas son las dos primeras de (6) y conducen inmediatamente á conocer las de la tangente y cotangente.

Se ve á un tiempo, como tal demostracion es general y vale para cualquier valor positivo ó negativo de los ángulos, pues los principios aplicados son generales. Ademas no se necesita ninguna figura para la demostracion.

Escolio. Tenemos

$$(\cos\vartheta + i.\text{sen}\vartheta)(\cos\vartheta - i.\text{sen}\,\vartheta) = \cos^2\vartheta + \text{sen}^2\vartheta = 1$$

luego será

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta + i.\text{sen}\,\vartheta &= \frac{1}{\cos\vartheta - i.\text{sen}\,\vartheta} \\ \cos\vartheta - i.\text{sen}\,\vartheta &= \frac{1}{\cos\vartheta + i\,\text{sen}\,\vartheta} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Por consiguiente: dividir por una unidad compleja es multiplicar por la unidad compleja conjugada.

§. 92.

Múltiplos de 90°.

1º Tenemos la ecuacion

$$(90° - \alpha) = 90 + (-\alpha)$$

y por consiguiente la unidad de 90° multiplicada por la unidad de $-\alpha$ será igual á la unidad de $(90° - \alpha)$. La unidad de 90° es $=+i$; luego se tiene

$$\cos(90° - \alpha) + i.\text{sen}(90° - \alpha) = +i(\cos-\alpha + i.\text{sen}-\alpha)$$

Pero $\cos-\alpha = \cos\alpha$ y $\text{sen}-\alpha = -\,\text{sen}\,\alpha$, luego será

$$\begin{aligned} \cos(90° - \alpha) + i.\text{sen}(90° - \alpha) &= +i(\cos\alpha - i.\text{sen}\,\alpha) \\ &= +\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha \end{aligned}$$

Por el tercer principio se saca

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen}\ (90^\circ-\alpha) &= \cos\alpha\\
\cos\ (90-\alpha) &= \text{sen}\ \alpha\\
\text{tang}\ (90^\circ-\alpha) &= \text{cotg}\ \alpha\\
\text{cotg}\ (90-\alpha) &= \text{tang}\ \alpha\\
\sec\ (90^\circ-\alpha) &= \text{cosec}\ \alpha\\
\text{cosec}\ (90-\alpha) &= \sec\ \alpha
\end{aligned}\right\}\qquad (11)$$

Las fórmulas para la tangente, cotangente, secante, cosecante se siguen por aplicacion de las fórmulas (1).

Dos ángulos como $90^\circ-\alpha$ y α, cuya suma es igual á 90°, se llaman *complementos* uno de otro, y por esto tenemos el teorema:

Una funcion cualquiera de un ángulo es igual á la cofuncion correspondiente del complemento.

Son complementos tambien los ángulos $45^\circ+\alpha$ y $45^\circ-\alpha$, pues la suma es 90°. Luego, como otra forma de (11) tenemos:

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen}\ (45^\circ+\alpha) &= \cos\ (45^\circ-\alpha)\\
\cos\ (45^\circ+\alpha) &= \text{sen}\ (45^\circ-\alpha)\\
\text{tang}\ (45^\circ+\alpha) &= \text{cotg}\ (45^\circ-\alpha)\\
\text{cotg}\ (45^\circ+\alpha) &= \text{tang}\ (45^\circ-\alpha)\\
\sec\ (45^\circ+\alpha) &= \text{cosec}\ (45^\circ-\alpha)\\
\text{cosec}\ (65^\circ+\alpha) &= \sec\ (45^\circ-\alpha)
\end{aligned}\right\}\qquad (12)$$

2º De la ecuacion

$$(180^\circ-\alpha) = 180^\circ+(-\alpha)$$

se deduce

$$\cos\ (180^\circ-\alpha)+i.\text{sen}\ (180^\circ-\alpha) = -1.(\cos-\alpha+i.\text{sen}-\alpha)$$

pues la unidad de 180° es -1. Aplíquense de nuevo las fórmulas $\cos-\alpha=\cos\alpha$ y $\text{sen}-\alpha=-\text{sen}\ \alpha$, y se tendrá

$$\cos\ (180^\circ-\alpha)+i.\text{sen}\ (180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha+i.\text{sen}\ \alpha$$

de donde

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen}\ (180^\circ-\alpha) &= +\text{sen}\ \alpha\\
\cos\ (180^\circ-\alpha) &= -\cos\ \alpha\\
\text{tang}\ (180^\circ-\alpha) &= -\text{tang}\ \alpha\\
\text{cotg}\ (180^\circ-\alpha) &= -\text{cotg}\ \alpha
\end{aligned}\right\}\qquad (13)$$

Dos ángulos como $180^\circ-\alpha$ y α, cuya suma ss 180°, se llaman *suplementos* uno de otro. Son suplementos tambien los ángulos $90^\circ+\alpha$ y $90-\alpha$; luego otra forma de las ecuaciones anteriores es:

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen}\ (90^\circ+\alpha) &= +\text{sen}\ (90^\circ-\alpha)\\
\cos\ (90^\circ+\alpha) &= -\cos\ (90^\circ-\alpha)\\
\text{tang}\ (90^\circ+\alpha) &= -\text{tang}\ (90^\circ-\alpha)\\
\text{cotg}\ (90^\circ+\alpha) &= -\text{cotg}\ (90^\circ-\alpha)
\end{aligned}\right\}\qquad (14)$$

Las funciones de suplementos son las mismas, pero con escepcion del seno (y de la cosecante) que tienen signos opuestos.

3º En general, la ecuacion

$$(m.90^\circ+\alpha)=m.90^\circ+\alpha$$

nos enseña que la unidad de $(m.90^\circ+\alpha)$ será igual á la unidad de $m.90^\circ$, multiplicada por la unidad de α. Pero la unidad de 1.90°, 2.90°, 3.90°, $4.90\ldots m\,90^\circ$ es i, i^2, i^3, $i^4\ldots i^m$. Por consiguiente será

$$\cos(m.90^\circ+\alpha)+i.\operatorname{sen}(m.90^\circ+\alpha)=i^m.(\cos\alpha+i.\operatorname{sen}\alpha) \qquad (a)$$

I. Cuando m es *un número par*, i^m es real, luego tenemos por el tercer principio

$$\left.\begin{aligned}\cos(m.90^\circ+\alpha)&=i^m.\cos\alpha\\ \operatorname{sen}(m.90^\circ+\alpha)&=i^m.\operatorname{sen}\alpha\end{aligned}\right\}\ m \text{ par}$$

II. Pero si m es *un número impar*, i^m es imaginario é i^{m+1} real. Luego será

$$\left.\begin{aligned}\cos(m.90^\circ+\alpha)&=i^{m+1}\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}(m\,90^\circ+\alpha)&=i^{m-1}\cos\alpha\end{aligned}\right\}\ m \text{ impar}$$

Pueden aplicarse estas fórmulas para reducir las funciones de ángulos que son $>90^\circ$ á los que son $<90^\circ$.

Para $m=1, 2, 3, 4$ luego $i^m=i, -1, -i, +1$, la ecuacion (a) se convierte en las cuatro siguientes:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ+\alpha)+i.\operatorname{sen}(90^\circ+\alpha)&=-\operatorname{sen}\alpha+i.\cos\alpha\\ \cos(180^\circ+\alpha)+i.\operatorname{sen}(180^\circ+\alpha)&=-\cos\alpha-i.\operatorname{sen}\alpha\\ \cos(270^\circ+\alpha)+i.\operatorname{sen}(270^\circ+\alpha)&=+\operatorname{sen}\alpha-i.\cos\alpha\\ \cos(360^\circ+\alpha)+i.\operatorname{sen}(360^\circ+\alpha)&=+\cos\alpha+i.\operatorname{sen}\alpha\end{aligned}$$

De la última se sigue

$$\operatorname{sen}(360^\circ+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha;\quad \cos(360^\circ+a)=\cos\alpha$$

como tenemos por la fórmula (5). Las otras ecuaciones dan:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(90^\circ+\alpha)&=+\cos\alpha; & \cos(90^\circ+\alpha)&=-\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}(180^\circ+\alpha)&=-\operatorname{sen}\alpha; & \cos(180^\circ+\alpha)&=-\cos\alpha\\ \operatorname{sen}(270^\circ+\alpha)&=-\cos\alpha; & \cos(270^\circ+\alpha)&=+\operatorname{sen}\alpha\end{aligned}\right\}\ (15)$$

Las ecuaciones (15) valen tambien cuando α es un ángulo negativo. Poniendo $-\alpha$ en lugar de α, y mudando en seguida el signo de sen α, se sigue que:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(90^\circ-\alpha)&=+\cos\alpha; & \cos(90^\circ-a)&=+\operatorname{sen}\alpha\\ \operatorname{sen}(180^\circ-\alpha)&=+\operatorname{sen}\alpha; & \cos(180^\circ-\alpha)&=-\cos\alpha\\ \operatorname{sen}(280^\circ-\alpha)&=-\cos\alpha; & \cos(270^\circ-\alpha)&=-\operatorname{sen}\alpha\end{aligned}\right\}\ (16)$$

Por medio de las fórmulas espuestas, cualquier funcion de un ángulo positivo ó negativo, por grande que sea, puede reducirse á una funcion equivalente de un ángulo positivo que es menor que 45°. Por ejemplo, cuando tenemos el sen (—783°), el mismo será $= -\text{sen } 783° = -\text{sen}(2.360°+63°) = -\text{sen } 63° = -\cos(90°-63°) = -\cos 27°$. Se aplican una despues de otra las fórmulas (6), (5) y (11).

§. 93.

Angulos simples y dobles.

1° De la ecuacion

$$2\alpha = \alpha + \alpha$$

se sigue que

$$\cos 2\alpha + i.\text{sen } 2\alpha = (\cos\alpha + i.\text{sen }\alpha)(\cos\alpha + i.\text{sen }\alpha)$$
$$= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha + 2i \text{ sen }\alpha\cos\alpha$$

Luego será

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen }\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha \end{array}\right\} \quad (17)$$

Por aplicacion succesiva de las fórmulas (2)

$$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \quad \text{y} \quad \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

se tienen otras espresiones para cos 2α, á saber

$$\left.\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 1 - 2 \text{ sen}^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \end{array}\right\} \quad (18)$$

de donde se saca:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \\ 1-\cos 2\alpha = 2 \text{ sen}^2\alpha \\ \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \text{tang}^2\alpha \end{array}\right\} (19) \qquad \left.\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \text{sen }\alpha \\ \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \cos\alpha \end{array}\right\} \quad (20)$$

2° Escribiendo en (17) y (18) $\frac{1}{2}\alpha$ en lugar de α, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen }\alpha = 2 \text{ sen }\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha \\ \cos\alpha = \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - \text{sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha \\ \cos\alpha = 1 - 2\text{ sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha \\ \cos\alpha = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha - 1 \end{array}\right\} \quad (21)$$

3° Sumando y restando las dos ecuaciones

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha + \text{sen}^2\tfrac{1}{2}\alpha = 1$$
$$2 \text{ sen }\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \text{sen }\alpha$$

se infiere

$$(\cos\tfrac{1}{2}\alpha + \text{sen }\tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 1 + \text{sen }\alpha$$
$$(\cos\tfrac{1}{2}\alpha - \text{sen }\tfrac{1}{2}\alpha)^2 = 1 - \text{sen }\alpha$$

Estas fórmulas como todas las que teniamos ántes, valen para cualquier valor de α. Suponiendo ahora $\alpha<90°$, será $\frac{1}{2}\alpha<45°$ y sen $\frac{1}{2}\alpha<$ cos $\frac{1}{2}\alpha$, pues en este caso es $y<x$. Luego estrayendo la raiz á las ecuaciones últimas, el segundo miembro tendrá el signo $+$, y será

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha-\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha=\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}$$

luego por adicion y sustraccion

$$\left.\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}\alpha&=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\\ \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\alpha&=\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen}\alpha}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}\end{aligned}\;\alpha<90°\right\}\qquad(22)$$

Se aplican estas fórmulas para calcular los valores que tienen las funciones de las mitades de ángulos, cuando las de los enteros son conocidos.

4° Por ejemplo, para $\alpha=90°$, luego sen $\alpha=1$, las últimas fórmulas darán

$$\left.\begin{aligned}\cos 45°&=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}=\operatorname{sen}45°\\ \operatorname{tang}45°&=\operatorname{cotg}45°=1\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

5° Sea en la primera fórmula (21) $\alpha=60°$, y tendremos

$$\operatorname{sen}60°=2\operatorname{sen}30°\cos 30°$$

Pero sen $60°$ = sen $(90°-30°)$=cos $30°$; luego será

$$\cos 30°=2\operatorname{sen}30°\cos 30$$

Dividiendo por cos $30°$ y despues por 2, se sigue sen $30°=\frac{1}{2}$. Se halla el coseno correspondiente por la fórmula

$$\cos 30°=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 30°}=\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego tenemos

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}30°&=\cos 60°=\tfrac{1}{2}\;;\quad&\operatorname{tang}30°&=\operatorname{cotg}60°=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\\ \cos 30°&=\cos 60°=\tfrac{1}{2}\sqrt{3};\quad&\operatorname{cotang}30°&=\operatorname{tang}60°=\sqrt{3}\end{aligned}\right\}\qquad(24)$$

5° Para $\alpha=30°$, luego sen $\alpha=\frac{1}{2}$, las fórmulas (22) se convierten en

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}15°&=\cos 75°=\tfrac{1}{4}\sqrt{6}-\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\\ \cos 15°&=\operatorname{sen}75°=\tfrac{1}{4}\sqrt{6}+\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

Conocemos ahora las funciones de todos los múltiplos de 15°.

§. 94.

Dos diferentes ángulos.

1° La ecuacion

$$(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$$

nos da

$$\cos(\alpha+\beta)+i.\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+i.\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta+i.\operatorname{sen}\beta)$$

y efectuando la multiplicacion indicada, tenemos

$$\cos(\alpha+\beta)+i.\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)+i.(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)$$

Luego

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

Las dos últimas ecuaciones se deducen de las dos primeras, poniendo $-\beta$ en lugar de β, luego mudando el signo de *sen* β á la derecha.

Valen estas fórmulas segun la demostracion para cualquier valor de α y β, positivo ó negativo, mayor ó menor que 360°. Ademas son las mas importantes de toda la goniòmetría, cuyo uso es muy frecuente, y contienen todas las fórmulas desde la fórmula (5) hasta (21) como casos particulares.

2° La adicion y sustraccion de las ecuaciones (26) nos conducen á las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\cos\beta\\ \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)&=2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}\right\}\qquad(27)$$

Cuando se pone

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\gamma\quad\text{luego}\quad&\alpha&=\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)\\ \alpha-\beta&=\delta&\beta&=\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)\end{aligned}$$

tendremos

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sen}\gamma+\operatorname{sen}\delta&=2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)\\ \operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\delta&=2\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)\\ \cos\gamma+\cos\delta&=2\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)\\ \cos\delta-\cos\gamma&=2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\gamma+\delta)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(\gamma-\delta)\end{aligned}\right\}\qquad(28)$$

Por medio de estas fórmulas una suma ó diferencia puede convertirse en un producto.

3° Se sigue ademas de las ecuaciones (26) que

$$\frac{\text{sen}\,(\alpha\pm\beta)}{\cos\,(\alpha\pm\beta)}=\frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta\mp\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

El primer miembro es la tangente de $(\alpha\pm\beta)$, y en el segundo el numerador y denominador divídase por $\cos\alpha\cos\beta$; se tendrá

$$\left.\begin{aligned}\text{tang}\,(\alpha\pm\beta)&=\frac{\text{tang}\,\alpha\pm\text{tang}\,\beta}{1\mp\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\beta}\\ \text{tang}\,2\,\alpha&=\frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1-\text{tang}^2\alpha}\end{aligned}\right\}\qquad(29)$$

La última fórmula se saca por la sustitucion $\beta=\alpha$.

§. 95.

Binómio de Moivre.

Por los §§ 84 y 85 tenemos las ecuaciones

$$(1_\alpha)^n=1_{n\alpha}\quad;\quad\sqrt[n]{(1_\alpha)}=1_{\alpha:n}\qquad(30)$$

que son una consecuencia muy sencilla de la ecuacion (8) del § 91. Pues de la ecuacion

$$n\,\alpha=\alpha+\alpha+\alpha+\alpha+\ldots.n\text{ veces}$$

se sigue que la unidad de $n\alpha$ es igual al producto de n unidades iguales que tienen el ángulo α, lo que dice la primera ecuacion (30). Póngase en la fig. 20 el ángulo α desde AE, n veces y sea AM_n el último radio que se obtiene de esta manera, y representará AM_n la n^{sima} potencia de la unidad compleja AM_1, que se representa por el primer radio. Por inversion AM_1 será la n^{sima} raiz de AM_n, y cuando el ángulo que AM_n forma con AE se supone $=\alpha$, será el ángulo que AM_1 forma con AE, la n^{sima} parte del primero. Luego para buscar la n^{sima} raiz de una unidad compleja, se parte su ángulo en n partes iguales, y esto es lo que dice la segunda ecuacion (30).

Ahora cuando tenemos que elevar 1_α á la potencia $\frac{m}{n}$, lo que es estraer la n^{sima} raiz y despues elevar el resultado á la m^{sima} potencia, el ángulo α debe partirse primeramente en n partes iguales y deben tomarse m de las mismas, es decir el ángulo se multiplica por $\frac{m}{n}$. Luego tenemos en forma algébrica:

$$(1_\alpha)^{\frac{m}{n}}=1_{\frac{m}{n}\alpha}$$

ecuacion que tiene la misma forma que la primera en (30); solo que el esponente es un número fraccionario en lugar de un entero, y concluimos que la primera ecuacion (30) no vale solamente cuando el esponente n es un número *entero* positivo, sino tambien cuando es un número positivo *cualquiera.*

Pero puede demostrarse que la misma ecuacion queda verdadera, si el esponente n es cualquier número *negativo.* En efecto, tenemos

$$1_\alpha \cdot 1_{-\alpha} = 1_0$$

y como la unidad que tiene el ángulo cero es $+1$, se saca

$$1_\alpha \cdot 1_{-\alpha} = 1 \quad \text{de donde} \quad 1_\alpha = \frac{1}{1_{-\alpha}} \quad \text{y}$$

$$(1_\alpha)^{-1} = \left(\frac{1}{1_{-\alpha}}\right)^{-1} = 1_{-\alpha}$$

y elevando esta ecuacion á la potencia n, se deduce

$$(1_\alpha)^{-n} = (1_{-\alpha})^n = 1_{-n\alpha}$$

lo que hubo de demostrarse. Luego será verdadera en todo caso, es decir, para todo valor del esponente n y del ángulo α, la ecuacion

$$(1_\alpha)^n = 1_{n\alpha} \tag{30}$$

Espresando las unidades de α y $n\alpha$ por *los cosenos* y *senos* correspondientes, la ecuacion (30) tomará la forma:

$$(\cos\alpha + i . \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i . \operatorname{sen} n\alpha \tag{31}$$

fórmula que se llama *binómio de Moivre* y contiene el teorema general:

Una unidad compleja queda elevada á la n^{sima} potencia, multiplicando por el esponente su ángulo.

Sale este teorema de la ecuacion general:

$$1_\alpha \cdot 1_\vartheta = 1_{\alpha+\vartheta}$$

que se escribe en forma goniométrica

$$(\cos\alpha + i . \operatorname{sen}\alpha)(\cos\vartheta + i . \operatorname{sen}\vartheta) = \cos(\alpha+\vartheta) + i . \operatorname{sen}(\alpha+\vartheta) \tag{32}$$

§. 96.

Aplicacion del binómio de Moivre á la estraccion de la raiz.

1° Por el teorema de Moivre es

$$\sqrt[n]{\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha} = \cos\frac{\alpha}{n} + i . \operatorname{sen}\frac{\alpha}{n} \tag{a}$$

La unidad compleja, que está bajo del signo radical quedará la misma [cf. § 85] cuando se pone

$$\alpha;\ 1.360^\circ+\alpha;\ 2.360^\circ+\alpha:\ 3.360^\circ+\alpha;\ldots(n-1).360^\circ+\alpha \qquad \text{(b)}$$

en lugar de α, miéntras que el segundo miembro por esta sustitucion toma diferentes valores, que se repiten constantemente para ángulos que se siguen á los que están en la serie (b). Luego el segundo miembro de (b) dará n valores diferentes de la n^{sima} raiz, sustituyéndose los ángulos de (b) en lugar de α, ó bien cuando en lugar de α se pone en general

$k.360+\alpha$ en donde $k=0, 1, 2, 3, 4\ldots(n-1)$

Por consiguiente, los n valores de la n^{sima} raiz de $\cos\alpha+i.\operatorname{sen}\alpha$ están contenidos en la fórmula

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt[n]{\cos\alpha+i.\operatorname{sen}\alpha}=\cos\dfrac{k.360^\circ+\alpha}{n}+i.\operatorname{sen}\dfrac{k.360^\circ+\alpha}{n}\\ k=0, 1, 2, 3\ldots(n-1)\end{array}\right\} \quad (33)$$

y esta se verifica para cualquier unidad compleja.

2° Póngase ahora $\alpha=0$ y tendremos los n valores de la n^{sima} raiz de $+1$:

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt[n]{+1}=\cos\frac{k}{n}.360^\circ+i.\operatorname{sen}\frac{k}{n}.360^\circ\\ k=0, 1, 2, 3, 4\ldots(n-1)\end{array}\right\} \qquad (34)$$

Cuando n es un número *par* $=2m$, tendremos dos raices reales $+1$ y -1, para los valores

$k=0$ luego $\frac{k}{n}.360^\circ=0$ de donde sale $+1$

$k=m$ luego $\frac{k}{n}.360^\circ=180^\circ$ de donde sale -1

Pero cuando n es un número *impar*, tendremos solamente una raiz real $+1$ para $k=0$. Para que salga la raiz -1, se necesita $\frac{k}{n}.360^\circ=180^\circ$, luego $\frac{k}{n}=\frac{1}{2}$ y $n=2k$, lo que no es posible; pues k es un número entero, $2k$ un número par y n un número impar.

En uno y otro caso todos los otros valores *son complejos y siempre conjugados*. Son conjugados los que salen de la primera serie de

$$k=\begin{cases}1\ ;\ \ 2\ ;\ \ 3\ ;\ \ 4\ ;\ldots\\ n-1\ ;\ n-2\ ;\ n-3\ ;\ n-4\ ;\ldots\end{cases}$$

con los que están por debajo en la segunda. Pues la forma general de estos valores de k es

$$k = \begin{cases} t \\ n-t \end{cases}$$

Para el primer valor de k=t, tendremos la raiz

$$\cos \frac{t}{n}.360^\circ + i.\operatorname{sen}\frac{t}{n}.360^\circ \qquad (c)$$

y para el segundo k=n—t, la raiz correspondiente será

$$\cos \frac{n-t}{n}.360 + i.\operatorname{sen}\frac{n-t}{n}.360$$

$$=\cos[360^\circ - \frac{t}{n}.360^\circ] + i.\operatorname{sen}[360^\circ - \frac{t}{n}.360^\circ]$$

$$=\cos - \frac{t}{n}.360^\circ + i.\operatorname{sen} - \frac{t}{n}.360^\circ$$

$$= \cos \frac{t}{n}.360^\circ - i.\operatorname{sen}\frac{t}{n}.360^\circ$$

y esta unidad es la conjugada de la primera en (c).

Luego basta calcular en (34) los valores hasta la mitad, las que faltan se siguen al mudar el signo del *seno*.

3º Finalmente sea α=180°, y la fórmula (33) se convierte en

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{2k+1}{n}.180^\circ + i.\operatorname{sen}\frac{2k+1}{n}.180^\circ \\ k=0,\ 1, 2, 3, 4, \ldots .(n-1) \end{array}\right\}$$

2k+1 es siempre un número impar; luego la misma fórmula puede escribirse tambien como se sigue:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{k}{n}.180^\circ + i.\operatorname{sen}\frac{k}{n}.180^\circ \\ k = 1,\ 3,\ 5,\ 7 \ldots . 2n-1 \end{array}\right\} \qquad (35)$$

La fraccion $\frac{k}{n}$ nunca puede ser 0 ó 2; pues 0 es menor que el primer valor, y 2 mayor que el último que *k* produce. Luego los ángulos 0°, 360° en la fórmula (35) no son posibles, y por esto nunca saldrá la raiz +1.

Se hallará la raiz —1, cuando $\frac{k}{n} = 1$, *k=n*, y como *k* es impar, cuando *n* es impar; pero no saldrá la raiz —1, cuando *n* es par.

De donde se deduce:

La n^{sima} raiz de —1 tiene solamente un valor real que es —1, cuando *n* es *impar*, y no tiene ningun valor real cuando *n* es *par*.

Todos los valores complejos *son conjugados*, como en el caso precedente. Son conjugados los valores que salen de la primera serie con los que salen de la segunda en

$$k = \begin{cases} 1\ ;\quad 3\ ;\quad 5\ ;\ldots .\ t \\ 2n-1;\ 2n-3;\ 2n-5;\ldots . 2n-t \end{cases}$$

lo que se demuestra de la misma manera que arriba en 2º

NOTA. Hay *"tablas de los senos y cosenos"*, de donde pueden tomarse los valores numéricos de cualquier seno y coseno entre los límites del ángulo 0° y 90°. Sábese por el § 92 que todas las funciones de ángulos mayores de 90°, pueden reducirse á otras cuyos ángulos son menores de 90°. Por medio de estas tablas y las fórmulas anteriores se calcularán los diferentes valores complejos de cualquier raiz. Pondremos aquí algunos ejemplos.

EJEMPLO I. Búsquense los valores de $\sqrt[5]{+1}$.

Por (34) tenemos

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{+1}=\cos k.72^\circ+i.\operatorname{sen} k.72^\circ \\ \quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\end{array}\right\} \qquad (a)$$

Luego los ángulos serán

$$0^\circ,\ 72^\circ,\ 144^\circ,\ 216^\circ,\ 288^\circ$$

El ángulo 0° nos da la raiz real $+1$; las otras raices serán complejas. Pero como las últimas son conjugadas con las primeras, se saben todas, cuando son conocidas las que pertenecen á los ángulos 72° y 144°.

Pero $144^\circ > 90^\circ$, luego deben reducirse las funciones de este ángulo. Tenemos [fórmula 13]

$$\cos 144^\circ = -\cos(180^\circ-144^\circ) = -\cos 36^\circ$$
$$\operatorname{sen} 144^\circ = +\operatorname{sen}(180^\circ-144^\circ) = +\operatorname{sen} 36^\circ$$

Luego los 5 valores buscados serán

$$\begin{array}{r}+1 \\ \cos 72^\circ + i \operatorname{sen} 72^\circ \\ -\cos 36^\circ + i \operatorname{sen} 36^\circ \\ -\cos 36^\circ - i \operatorname{sen} 36^\circ \\ \cos 72^\circ - i \operatorname{sen} 72^\circ\end{array}$$

En "las tablas del seno y coseno" encontramos:

$$\cos 72^\circ = 0{,}3090 \qquad \cos 36^\circ = 0{,}8090$$
$$\operatorname{sen} 72^\circ = 0{,}9511 \qquad \operatorname{sen} 36^\circ = 0{,}5878$$

Por consiguiente dichos 5 valores serán

$$\begin{array}{r}+1 \\ 0{,}3090 + 0{,}9511.i \\ -0{,}8090 + 0{,}5878.i \\ -0{,}8090 - 0{,}5878.i \\ 0{,}3090 - 0{,}9511.i\end{array}$$

EJEMPLO II. Los 5 valores de $\sqrt[5]{-1}$ se hallarán por (35) para $n=5$; de donde sale

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[5]{-1} = \cos\ k.36^\circ + i.\operatorname{sen}\ k.36^\circ \\ k = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\end{array}\right\}\qquad (b)$$

Los ángulos son

$$36^\circ,\ 108^\circ,\ 180^\circ,\ 252^\circ,\ 324^\circ$$

El término medio produce la raiz real —1, y los últimos dan las raices que son conjugadas con las primeras. Luego basta buscar estas. Las funciones de 108° se determinarán como arriba:

$$\cos 108^\circ = -\cos (180^\circ - 108^\circ) = -\cos 72^\circ$$
$$\operatorname{sen} 108^\circ = +\operatorname{sen} (180^\circ - 108^\circ) = +\operatorname{sen} 72^\circ$$

Por consiguiente los 5 valores que se buscan, serán:

$$\begin{array}{rcr} \cos 36^\circ + i.\operatorname{sen} 36^\circ & \text{ó bien} & 0{,}8090 + 0{,}5878.i \\ -\cos 72^\circ + i\cdot\operatorname{sen} 72^\circ & & -0{,}3090 + 0{,}9511.i \\ -1 & & -1 \\ -\cos 82^\circ - i.\operatorname{sen} 72^\circ & & -0{,}3090 - 0{,}9511.i \\ \cos 36^\circ - i.\operatorname{sen} 36^\circ & & 0{,}8090 - 0{,}5878.i \end{array}$$

NOTA. Los 5 valores del Ejemplo I juntos con los 5 del segundo, representan los 10 valores de la 10ª raiz de +1.

ARTICULO VII.

DE LOS LOGARITMOS.

§. 97.

Esplicaciones.

1° El *logaritmo* de un número N para una base determinada b, es el *esponente* x de b, que se necesita para reproducir el número N como potencia de esta base.

Si las cantidades N, b, x tienen la relacion

$$b^x = N$$

y ademas b se supone como número constante, *x será el logaritmo de N para la base b.* N se dice *el Número* del logaritmo.

Las mismas relaciones se escriben tambien de esta manera:

$$x = {}^b\log N \qquad (2)$$
$$N = \text{Núm.} (\log = x) = \text{Núm. } x \qquad (3)$$

Se omite la letra b en ${}^b\log N$, cuando siempre se supone la misma base conocida.

Tenemos

$$3^6=729 \quad ; \quad 9^3=729 \quad ; \quad 27^2=729 \quad \text{luego}$$
$$6={}^3\log 729; \quad 3={}^9\log 729; \quad 2={}^{27}\log 729$$

De (1) y (2), y tambien inmediatamente de la definicion se sigue

$$b^{{}^b\log N}=N \tag{4}$$

2° Para una base b determinada, todo número entero N tendrá su logaritmo x propio. La reunion de todos los números enteros consecutivos con sus logaritmos correspondientes para una base determinada, se llama un *sistema de logaritmos.* Un sistema de logaritmos es diferente de otro solamente por la base que tiene.

No puede ser base la unidad; pues toda potencia de la unidad es la unidad y por esto no encontraremos diferentes números N como potencias de la base.

Tampoco sirve como base un número negativo; pues serán los Números positivos ó negativos segun que sea el logaritmo un número entero par ó impar, y los mismos serán imaginarios, si el logaritmo es un quebrado con un denominador par. Luego de una base negativa no puede obtenerse la serie natural de los números como potencias de aquella.

La base tiene pues que ser *positiva*, y cualquiera que sea, por medio de esta, siempre puede formarse un sistema de logaritmos, en donde los Números son los números positivos desde cero hasta infinito. Si la base positiva $b>1$ será

$$b^{-\infty}\ldots<b^{-3}<b^{-2}<b^{-1}<b^0<b^1<b^2<b^3\ldots<b^{\infty} \quad (a)$$

en donde el primer valor $b^{-\infty}=0$, el medio $b^0=1$ y el último $b^{\infty}=\infty$. Ademas cambiándose el logaritmo x en $x+\frac{1}{n}$, será

$$N=b^x<N'=b^{x+\frac{1}{n}}$$

pues

$$b^{x+\frac{1}{n}}=b^x.b^{\frac{1}{n}}=b^x.\sqrt[n]{b}$$

y como $b>1$, será $\sqrt[n]{b}>1$, luego $b^{x+\frac{1}{n}}>b^x$. La diferencia

$$b^{x+\frac{1}{n}}-b^x=b^x(\sqrt[n]{b}-1)$$

puede ser tan pequeña como se quiera, cuando se toma n bastante grande ó $\frac{1}{n}$ bastante pequeño. Finalmente todos los Números que la base positiva b produce, serán positivos, aunque el logaritmo sea un quebrado, pues un número positivo siempre tiene una raiz real positiva. Concluimos: *Una base positiva produce un sistema de logaritmos, cuyos Números son todos los posibles números* *positivos desde el cero hasta el infinito, y cuando se supone que el Número N se cambie en N' pasando todos los valores intermedios posibles, cambiará tambien el logaritmo x en x' pasando del mismo modo todos los valores que contiene el intervalo desde x hasta x'.*

Se ve por la serie (α) que el logaritmo será positivo, si el Número es >1, y que él mismo será negativo, si el Número es <1.

Pero si la base b es <1, tendremos las propiedades opuestas:

$$b^{-\infty} > \ldots b^{-3} > b^{-2} > b^{-1} > b^{0} > b^{1} > b^{2} > b^{3} \ldots > b^{\infty}$$

El primer término es $= \frac{1}{b^{\infty}} = \frac{1}{0} = =\infty$, el término medio es $b^0=1$, y el último es $b^{\infty}=0$. Luego el logaritmo será negativo, si el Número es >1, y será positivo si este es <1. Las otras propiedades son las mismas que arriba.

3. De todos los sistemas posibles solo dos suelen emplearse:

a) el sistema *vulgar* ó de *Briggs*, que es el que comunmente se emplea en los cálculos y cuya base es 10.

b) el sistema *natural* ó de *Neper*, por cuyo medio se construyen todos los otros sistemas, aun el de Briggs. La base de este sistema natural es el número irracional 2,718281828..... que siempre se designa por la letra *e* y es la suma de la serie infinita:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots$$

Los logaritmos vulgares se designan por *log. vulg.* ó simplemente por *log.* y los logaritmos naturales por *log. nat.* ó brevemente por *l*, sin notar la base *e* que se supone.

No daremos en este tratado un método de calcular los diferentes logaritmos ó de construir una tabla de logaritmos, lo que veremos mas tarde. Basta ahora esplicar los teoremas generales sobre los logaritmos y el uso de las tablas que los contienen.

§. 98.

Teoremas sobre los logarítmos.

A. *Teoremas fundamentales.*

1. El logaritmo de la base, en cualquier sistema, es la unidad.

$${}^{b}\log b = 1$$

Dem. $b^1 = b$, luego $1 = {}^{b}\log b$.

2. El logaritmo de la unidad, en cualquier sistema, es cero.

$${}^{b}\log 1 = 0$$

DEM. $b^0 = 1$ luego $0 = {}^b\log 1$.

3. El logaritmo de infinito, en cualquier sistema, es infinito positivo.

$${}^b\log \infty = \infty \quad [\text{cond. } b > 1]$$

DEM. $b^\infty = \infty$ luego $\infty = {}^b\log \infty$

4. El logaritmo de cero, en cualquier sistema, es infinito negativo.

$${}^b\log 0 = -\infty \quad [\text{cond. } b > 1]$$

DEM. $b^{-\infty} = \frac{1}{b^\infty} = 0$, luego $-\infty = {}^b\log 0$.

B. *Teoremas sobre logaritmos de un mismo sistema.*

1. El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log (m \cdot n) = \log m + \log n$$

DEM. Si b es la base del sistema, será [§ 97 ecuac. 4]:

$$b^{\log m} = m \quad \text{y} \quad b^{\log n} = n$$

luego $$b^{\log m + \log n} = m \cdot n$$

y segun la definicion de los logaritmos será

$$\log m + \log n = \log (m \cdot n)$$

2. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor.

$$\log (m : n) = \log m - \log n$$

DEM. $$b^{\log m} = m \quad \text{y} \quad b^{\log n} = n$$

$$b^{\log m - \log n} = m : n$$

luego $$\log m - \log n = \log (m : n)$$

3. El logaritmo de una potencia es igual al producto del esponente por el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log a^n = n \log a$$

DEM. $$b^{\log a} = a$$

$$b^{n \log a} = (b^{\log a})^n = a^n$$

luego $$n \log a = \log a^n$$

4. El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la cantidad subradical, dividido por el índice de la raiz.

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$$

DEM. $$b^{\log a} = a$$

$$b^{\frac{1}{n}\log a} = \sqrt[n]{b^{\log a}} = \sqrt[n]{a}$$

luego $$\frac{1}{n} \log a = \log \sqrt[n]{a}$$

ESCOLIO. Por estos cuatro teoremas, como se ve inmediatamente

la multiplicacion se convierte en adicion,
la division en sustraccion,
la elevacion á potencia en multiplicacion,
la estraccion de la raiz en division.

§. 99.

Propiedades del sistema de Briggs.

1º En este sistema que tiene la base 10, tenemos

$$\begin{array}{llll}
10^3 = 1000 & \text{luego} & \log 1000 = & 3 \\
10^2 = 100 & & \log 100 = & 2 \\
10^1 = 10 & & \log 10 = & 1 \\
10^0 = 1 & & \log 1 = & 0 \\
10^{-1} = 0{,}1 & & \log 0{,}1 = & -1 \\
10^{-2} = 0{,}01 & & \log 0{,}01 = & -2 \\
10^{-3} = 0{,}001 & & \log 0{,}001 = & -3
\end{array}$$

de donde se infiere que todos los números que son mayores que 1, tienen logaritmos positivos, y que todos los números que son menores que 1 ó los quebrados propios, tienen logaritmos negativos.

2º Concluimos ademas que solo los números

$$\ldots .1000,\ 100,\ 10,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000} \ldots .$$

es decir las potencias de 10 con esponentes enteros, tienen por logaritmos números enteros. Todos los demas números, enteros y quebrados, propios y mistos, tienen por logaritmos *números inconmensurables*, que no pueden representarse exactamente sino por quebrados decimales no periódicos é infinitos, ó por series infinitas. Así es log 186=2,2695129.... Supongamos que un número cualquiera N, que no es una potencia de 10 con esponente entero, tenga por logaritmo un número real $\frac{r}{s}$ en donde *r* y *s* son números enteros, y tendremos

$$10^{\frac{r}{s}} = N \quad \text{luego} \quad 10^r = N^s$$

ecuacion que nunca puede verificarse, pues 10 y N contienen factores primos diferentes.

3º Por medio del teorema en § 97, 2° se sigue ademas, que *todo logaritmo positivo* que no es entero, está compuesto de dos partes, una de las cuales es un *entero* ó cero y la otra *un quebrado decimal propio*. Llámanse los enteros de un logaritmo su *característica* y el quebrado decimal propio que está á continuacion de los enteros, se dice su *mantisa*. Así es log 271=2,43297, luego **2** su característica y las decimales que se siguen, su mantisa.

4º *Multiplicando ó dividiéndose un número entero por una potencia de* 10, *no se muda la mantisa del logaritmo, sino solamente su característica*. Si log $N = \lambda$, se tiene [§ 98]:

$$\log (N.10^n) = \log N + \log 10^n = \lambda + n$$
$$\log (N:10^n) = \log N - \log 10^n = \lambda - n$$

Por ejemplo, si log 2864=3,45697

será
$$\left.\begin{aligned} \log 28640 &= 3{,}45697+1 = 4{,}45697 \\ \log 286400 &= 3{,}45697+2 = 5{,}45697 \\ \log 2864000 &= 3{,}45697+3 = 6{,}45697 \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Luego:

Regla I. *Añadiendo á un número entero varios ceros, la característica se aumentará de tantas unidades, cuantos ceros se añadan, permaneciendo la mantisa la misma.*

Por inversion tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \log 286{,}4 &= 3{,}45697-1 = 2{,}45697 \\ \log 28{,}64 &= 3{,}45697-2 = 1{,}45697 \\ \log 2{,}864 &= 3{,}45697-3 = 0{,}45697 \end{aligned}\right\} \quad (\beta)$$

Puede continuarse esta division y tendremos

$$\left.\begin{aligned} \log 0{,}2864 &= \log (2864:10^4) = 3{,}45697-4 = 0{,}45697-1 \\ \log 0{,}02864 &= \log (2864:10^5) = 3{,}45697-5 = 0{,}45697-2 \\ \log 0{,}002864 &= \log (2864:10^6) = 3{,}45697-6 = 0{,}45697-3 \\ \log 0{,}0002864 &= \log (2864:10^7) = 3{,}45697-7 = 0{,}45696-4 \end{aligned}\right\} \quad (\gamma)$$

Los enteros 1, 2, 3, 4 que se restan en el último miembro de (γ), son características con signo negativo, y escríbese siempre un logaritmo negativo de esta manera, que la mantisa sea positiva y que se siga á continuacion la característica con siguo negativo.

De (β) y (γ) se infiere:

REGLA II. *Corriendo la coma decimal, uno, dos, tres....n lugares á la derecha ó izquierda, la característica se aumenta ó disminuye de una, dos, tres....n unidades, permaneciendo la mantisa la misma.*

5° REGLA III. *La característica de cualquier número mayor que la unidad, es positiva y tiene una unidad ménos que el número de cifras enteras de que consta.* Así

$\log 4823 = \mathbf{3},68332$; pues $4823 > 1000 = 10^3$ y $< 10000 = 10^4$
$\log 482,3 = \mathbf{2},68332$; pues $482,3 > 100 = 10^2$ y $< 1000 = 10^3$
$\log 48,23 = \mathbf{1}.68332$; pues $48,23 > 10 = 10^1$ y $< 100 = 10^2$
$\log 4,823 = \mathbf{0},68332$; pues $4,823 > 1 = 10^0$ y $< 10 = 10^1$

REGLA IV. *La característica de cualquier quebrado decimal propio es negativa y tiene tantas unidades, cuantos ceros están delante de las cifras significativas.* Así es

$\log 0,4823 = 0,68332 - \mathbf{1}$; pues $0,4823 = 4,823 : 10$
$\log 0,04823 = 0,68332 - \mathbf{2}$; pues $0,04823 = 4,823 : 100$
$\log 0,004823 = 0,68332 - \mathbf{3}$; pues $0,004823 = 4,823 : 1000$

y como $\log 4,823 = 0,68332$, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$... deben restarse de 0, 68332 los números, 1, 2, 3....

6° Por inversion:

REGLA V. *Si la característica de un logaritmo es positiva, el Número correspondiente será mayor que la unidad, y tendrá tantas cifras enteras mas una, como unidades tiene la característica.*

Si $\log N = 2,68332$
será $N = 482,3$ con tres enteros;

pues la característica 2 nos enseña que el Número N esté entre 10^2 y 10^3, es decir, entre 100 y 1000, y que por esto tiene centenas.

REGLA VI. *Sí la característica de un logaritmo es negativa, el Número correspondiente será un quebrado decimal propio, que delante de las cifras significativas tiene tantos ceros, cuantas unidades tiene la característica.*

Si $\log N = 0,68332 - 3$
será $N = 0,004823$

Pues el logaritmo 0,68332 es mayor que 0 y menor que 1, luego el Número de este logaritmo será > 1 y < 10, luego será 4,823. Ahora se tiene

$$\log N = \log 4,823 - 3 = \log 4,823 - \log 1000 = \log \frac{4,823}{1000}$$
$$= \log 0,004823$$

§. 100.

Cálculo con los logaritmos vulgares.

Precede á las tablas de logaritmos una concisa y clara esplicacion, mediante la cual con facilidad se resuelven los problemas generales:

1) dado un Número hallar el logaritmo correspondiente,

2) dado un logaritmo hallar el Número correspondiente.

Por lo cual es inútil hacer aquí dicha esplicacion.

Aplícase el cálculo con logaritmos siempre que entran números grandes en una multiplicacion, division, elevacion á potencias y estraccion de raiz; pues por los logaritmos, dichas operaciones se convierten en las operaciones sencillas de la adicion, sustraccion, multiplicacion y division [§98, esc.]. Añadiremos algunos ejemplos sobre el cálculo con los logaritmos que al mismo tiempo demuestren su utilidad, dando primeramente unas reglas prácticas para el caso de ser los logaritmos negativos.

No encontrándose en las tablas un logaritmo que sea del todo negativo, conviene transformarlo en otro que tenga una mantisa positiva.

Regla VII. *Un logaritmo que es del todo negativo, se convierte en otro negativo con mantisa positiva, sumando y restando el número entero superior inmediato.*

$$\text{Sea} \qquad \log N = -\,3{,}27538$$

$$\text{y será} \qquad = \overset{+4}{-}\,3{,}27538\;\overset{-4}{}$$

$$= \quad 0{,}72462-4$$

Semejante regla se aplica en general en la sustraccion:

Regla VIII. *Se suma y resta 10 ú otro entero bastante grande en el caso de ser el logaritmo que es minuendo, menor que el que sirve por sustraendo.*

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle +10 \qquad -10} \\ 1{,}27893 \\ 4{,}56351 \\ \hline 6{,}71542-10 \end{array}$$

Para la division tenemos

Regla IX. *En la division de un logaritmo negativo por un entero, la característica ha de transformarse (si se necesita) en otra que se divida sin resto.*

$$\begin{aligned} (0{,}43562-3):2 &= (1{,}43562-4):2 \\ &= 0{,}71781-2 \\ (0{,}56386-4):3 &= (2{,}56386-6):3 \\ &= 0{,}85462-2 \end{aligned}$$

Finalmente:

REGLA X. *Antes de tomar el Número correspondiente, cuando su logaritmo tiene dos características, estas se reducirán á una sola.*

Si	$\log N = 3,65189-7$
será	$\log N = 0,65189-4$
y si	$\log N = 5,32174-2$
será	$\log N = 3,32174$

Ejemplos.

EJEMPLO I. Búscase el valor de x en

$$x = 3,7896 . 5,6806 . 0,005394$$

RESOL. Se aplica la fórmula $\log (a.b.c) = \log a + \log b + \log c$

Pero tenemos por las tablas

$$\begin{aligned} \log 3,7896 &= 0,57859 \\ \log 5,6806 &= 0,75440 \\ \log 0,005394 &= 0,73191 - 3 \quad \text{luego} \\ \hline \log x &= 2,06490 - 3 \\ &= 0,06490 - 1 \\ x &= 0,11612 \end{aligned}$$

EJEMPLO II. Propongamos buscar $x = \frac{0.68635}{0.054361}$

RESOL. Se aplica la fórmula $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$

Tenemos

$$\begin{aligned} \log 0,68635 &= 0,83654-1 \\ \log 0,054361 &= 0,73529-2 \\ \hline \log x &= 0,10125+1 \\ &= 1,10125 \\ x &= 12,627 \end{aligned}$$

EJEMPLO III. Sea $x = 1,0256^{12}$

RESOL. Se aplica la fórmula $\log a^n = n \log a$

Luego será

$$\begin{aligned} \log x &= 12 \log 1,0256 \\ &= 12 . 0,01098 \\ &= 0,13176 \\ x &= 1,3544 \end{aligned}$$

EJEMPLO IV. Se busca

$$x = \sqrt[5]{7863000}$$

RESOL. Se aplica la fórmula $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$

Luego será $\log x = \frac{1}{5} \log 7863000$

$$= \frac{1}{5} . 6,89559$$
$$= 1,37912$$
$$x = 23,94$$

Ejemplo V. Para hallar $x = \left(\frac{0,56326}{0,26538}\right)^8$

será $\log x = 8 \; (\log 0,56326 - \log 0,26538)$

Pero $\log 0,56326 = 0,75071 - 1$

$$\log 0,26538 = 0,42388 - 1$$

$$\overline{\quad 0,32683 \times 8}$$
$$\log x = 2,61464$$
$$x = 411,75$$

Ejemplo VI. Sea $x = \sqrt[6]{\frac{12,583^5}{0,62^7 . 2,689}}$ y se tendrá

$$\log x = \frac{1}{6} \; [5 \log 12,583 - (7 \log 0,62 + \log 2,689)]$$

$\log 12,583 = 1,09979$ $\quad\log 0,62 = 0,79239 - 1$

$5 \log 12,583 = 5,49895$ $\quad 7 \log 0,62 = 5,54673 - 7$

$\log 2,689 = 0,42959$

$\overline{\quad 5,97632 - 7}$

$$+10 \qquad -10$$
$$5,49895$$
$$5,97632 - 7$$
$$\overline{\quad 9,52263 - 3}$$
$$6,52263$$

dividase por 6

$$\log x = 1,08711$$
$$x = 12,221$$

Ejemplo VII. Determinar x en $3,5762^x = 5,2643^4$

$$x \log 3,5762 = 4 \log 5,2643$$

$$x = \frac{4 \log 5,2643}{\log 3,5762} = \frac{4 . 0,72134}{0,55343} = \frac{2,88536}{0,55343}$$

$$+1 \qquad -1$$
$$\log x = 0,46021$$
$$0,74306 - 1$$
$$\overline{\quad = 0,71715}$$
$$x = 5,2138$$

CAPITULO IV.

DE LAS ECUACIONES.

ARTICULO I.

Ecuaciones del primer grado.

§. 101.

De las ecuaciones en general.

1º Llámase *ecuacion* la espresion algébrica de la igualdad de dos cantidades por medio del signo de igualdad. Hay tres clases de ecuaciones:

A] *La ecuacion idéntica* tiene por miembros una misma cantidad con la *misma forma:*

$$a-b=a-b$$

Tal ecuacion siempre es verdadera.

B] *La ecuacion analítica* tiene en el primer miembro una cantidad con *una operacion algébrica indicada,* y en el segundo miembro *el resultado de esta operacion:*

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad (\alpha)$$

Tal ecuacion ó siempre es verdadera para cualquier valor de las cantidades que entran en ella, ó por lo ménos para cualquier valor entre ciertos límites, como se ve en la ecuacion

$$\frac{1}{1-x}=1+x^2+x^3+x^4+x^5+\ldots\text{infin.}$$

que se sigue por division y se verifica para cualquier valor de x que es <1. No dependen en la ecuacion analítica unas cantidades de otras; así cambiándose b, por esto no cambia a en la primera ecuacion (α).

C] *La ecuacion sintética* tiene cantidades que dependen unas de otras. Así en la ecuacion

$$y = 3x \qquad (\beta)$$

depende y de x; aumentándose x, aumentará y, y disminuyéndose x, disminuirá y, pues siempre debe ser y el triplo de x. Por inversion, depende tambien x de y, pues se sigue que x ha de ser siempre la tercera parte de y, cualquiera que sea el valor de este número. Lo mismo se ve en la ecuacion sintética

$$2y = 4 + x \qquad (\gamma)$$

en donde y cambia de valor con x, y x con y.

Hay infinitos valores de x é y que satisfacen las ecuaciones anteriores; pero teniendo una de estas cantidades *un valor determinado*, la ecuacion no se verifica sino por *un valor determinado de la otra*. Así, cuando en la última ecuacion es $y=6$, de modo que tengamos

$$2 . 6 = 4 + x$$

x será $=8$, y no se verifica la ecuacion por otro valor. Tomando $x=8$, tendremos

$$2 . 6 = 4 + 8 \text{ es decir } 12 = 12$$

que es una *ecuacion idéntica* y la prueba de que tenemos el valor verdadero de x; pero tomando otro valor, por ejemplo $x=9$, se sigue

$$2 . 6 = 4 + 9 \quad \text{es decir} \quad 12 = 13$$

lo que es evidentemente falso, y la prueba de que no es el valor verdadero de x.

2° Una cantidad que depende de otra de manera que cambiándose esta, se cambie aquella, se llama *una funcion de la otra*. Así en las ecuaciones (β) y (γ) será y una funcion de x; pero tambien por inversion puede ser x una funcion de y, á saber, cuando y se considera como cantidad dada. Una de estas cantidades será *dependiente* y la otra *independiente*; así para x puede tomarse cualquier valor y será x *la cantidad independiente* y luego tomará y valores determinados que dependen de los valores de x, y por esto y será la cantidad *dependiente*.

Ademas, en las ecuaciones (β) y (γ), las mismas cantidades x é y son cantidades *variables*, es decir, pueden tomar una infinidad de valores diferentes que satisfacen la ecuacion. Una de las variables es *la variable independiente* y la otra *la variable dependiente*. La variable independiente puede tener todos los valores posibles, reales, imaginarios y complejos. La variable dependiente, aunque tome tambien una infinidad de valores diferentes, por esto no siempre tendrá todos los posibles. Así en la ecuacion sintética

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

la variable independiente x podrá tener todos los valores reales desde $-\infty$ hasta $+\infty$; pero los valores reales de y se contienen entre los límites $+r$ y $-r$; pues cuando el valor absoluto de x es $>r$, y será imaginario.

3º Como tenemos ecuaciones sintéticas entre dos variables, así podremos tenerlas entre 3, 4, 5 ...n variables. Pueden encontrarse en la misma ecuacion tambien algunas cantidades que se consideran como *constantes*, teniendo siempre un mismo valor dado. Suélese espresar las cantidades *constantes* por las primeras letras del alfabeto, y las *variables* por las últimas. Así de las ecuaciones

$$ax^2+by^2=c;\qquad \sqrt{x^2+ay}=\frac{bx-\sqrt{dv}}{by-cz}$$

la primera tiene 2 variables x, y, y 3 constantes a, b, c, y la segunda tiene 4 variables v, x, y, z y 4 constantes a, b, c, d.

Una ecuacion con n variables tiene $n-1$ variables independientes y solamente una variable dependiente que puede ser cualquiera de ellas.

4º Tomando las variables independientes valores determinados, tambien la variable dependiente no tendrá sino valores determinados que se siguen de aquellos por medio del cálculo. Será el objeto de este Capítulo, suministrar métodos ciertos de hallar dichos valores, que son dados solamente por medio de otras cantidades. En este caso, la cantidad buscada se llama *incógnita*, miéntras que las cantidades dadas se llaman *conocidas*.

5º Distínguense:

a) *Ecuaciones determinadas é indeterminadas*.

Es determinada cualquier ecuacion con *una sola* incógnita.

Es indeterminada cualquier ecuacion con *dos ó mas variables*.

Veremos que dos ecuaciones diferentes que tienen *las mismas dos* variables, producen otras dos ecuaciones con una sola variable, y que por lo tanto son ecuaciones determinadas, por medio de las cuales se sacan valores determinados de las dos variables. Luego en dos ecuaciones con dos variables, cada una de estas puede considerarse como incógnita. Así las ecuaciones

$$\begin{aligned}3x+4y&=26\\2x-3y&=6\end{aligned}$$

son dos ecuaciones con dos variables, y cada una de estas se verifica por una infinidad de valores de x é y. Pero si x é y que están en la primera ecuacion *han de tener los mismos valores* que en a segunda, las ecuaciones solo se verifican para los valores determinados $x=6$ é $y=2$. La razon es porque las mismas cantidades x é y en la primera ecuacion han de cumplir una condicion determinada y en la segunda otra diferente, y dos condiciones diferentes determinan dos cantidades diferentes.

Del mismo modo 3 ecuaciones diferentes con 3, 4 ecuaciones con 4....en general n ecuaciones con n variables contienen 3, 4... n condiciones diferentes que determinan todas estas cantidades; luego cada una puede considerarse como *incógnita* que tiene un valor determinado pero desconocido. Por consiguiente distinguense las ecuaciones tambien en:

b) *Ecuaciones con una sola, ó dos, ó tres....ó mas incógnitas.* Así será

$ax+b=x^2$ una ecuacion con una sola incógnita
$ax+by=c$ " con dos incógnitas
$ax+by+cz=d$ " con tres incógnitas.

Pero la segunda ecuacion supone otra con las mismas cantidades x é y, y la tercera otras dos con las mismas cantidades x, y, z.

Dícese un *sistema* de ecuaciones la reunion de todas las ecuaciones que se necesitan para determinar cada una de las incógnitas. Así el sistema para tres incógnitas será

$$\begin{aligned} a\,x+b\,y+c\,z&=d \\ a'x+b'y+c'z&=d' \\ a''x+b''y+c''z&=d'' \end{aligned}$$

Para determinar n incógnitas se necesita un sistema de n ecuaciones diferentes con las mismas incógnitas.

c) *Ecuaciones numéricas y literales.* Una ecuacion *es numérica* si todas las cantidades conocidas son números determinados, y *es literal* si una ó algunas son números indeterminados. Así es

$3x^2+5x-3=0$ una ecuacion numérica
$3x^2+ax-c=0$ una ecuacion literal.

d) *Ecuaciones algébricas y transcendentes.* Son *algébricas* cuando las incógnitas no están contenidas sino como base de una potencia; en cualquier otro caso son *transcendentes.* Así todas las ecuaciones anteriores son algebráicas; son transcendentes por ejemplo:

$$a^x=b+y$$
$$a\log x=b+y^x$$

Dícese una ecuacion *esponencial* si tiene la incógnita por esponente.

e) *Ecuaciones de 1º, 2º, 3º....n^{simo} grado.* Se conoce el grado de una ecuacion algebráica por *la mayor suma* que forman los esponentes de las incógnitas en un mismo término. Así

$ax+b=0$ es del primer grado.

$axy-cx=d$ es del segundo grado.

$ax^2+bxy+x^2y=d$ es del tercer grado.

En la última, por ejemplo, la mayor suma de los esponentes de las incógnitas se encuentra en el tercer término y es $2+1=3$; luego la ecuacion será del tercer grado.

§. 102.

Transformacion de las ecuaciones.

Una *misma* ecuacion puede tener varias formas, efectuándose con ella varias transformaciones segun las reglas de la Aritmética y por medio del axioma general:

Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales.

1º *Puede trasladarse al otro miembro todo término de una ecuacion, mudando el signo de este término.*

Si $a=b-x$

será $a+x=b$

$x=b-a$

La segunda forma de la ecuacion se obtiene de la primera, añadiendo $+x$ á cada uno de los miembros, y la tercera forma es obtiene de la segunda, restando a.

Por esto, toda ecuacion *puede reducirse á cero.* Si

$x=a-b$ será $x-a+b=0$

2º Pueden multiplicarse todos los términos de una ecuacion por una misma cantidad, y por lo tanto quitarse los denominadores, multiplicando la ecuacion por el mínimo comun denominador de todos los quebrados.

De $\frac{x}{4}-a=\frac{b}{6}$ se sigue

$3x-12a=2b$

multiplicando todos los términos por el mínimo comun deno mina dor que es 12.

Se pueden cambiar tambien los signos de todos los términos.

Si $a-x^2=-x+c$

será $x^2-a=x-c$

pues esto no es sino multiplicar por -1.

3º Pueden dividirse todos los términos por una misma cantidad y puede por esto reducirse la ecuacion á una forma mas sencilla, dividiendo todos los términos por un factor comun.

Si $3x-6a=12$
será $x-2a=4$

4º Puede quitarse un signo radical que afecta á la incógnita. A este fin, la cantidad radical que contiene la incógnita se pondrá *sola* en un miembro y luego la ecuacion se elevará á la potencia que indica el índice de la raiz.

Si $a+\sqrt[n]{x-b}=c$
será $\sqrt[n]{x-b}=c-a$
luego $x-b=(c-a)^n$

5º Puede quitarse un esponente que afecta á la incógnita. A este fin, la potencia que contiene la incógnita se pondrá *sola* en un miembro y luego se estraerá á la ecuacion la raiz del grado que indica el esponente.

Si $a+(x-b)^n=c$
será $(x-b)^n=c-a$
luego $x-b=\sqrt[n]{c-a}$

6º Un esponente ó índice incógnito puede representarse como factor ó divisor. A este fin, el término que tiene este esponente ó índice, se pondrá *solo* en un miembro y luego se tomarán los logaritmos de los dos miembros de la ecuacion.

Si $a^x+b=c$ Si $\sqrt[x]{a}+b=c$ será
será $a^x=c-b$ $\sqrt[x]{a}=c-b$
luego $x.\log a=\log(c-b)$ $\frac{1}{x}\log a=\log(c-b)$

7º Si los miembros de una ecuacion contienen cada uno un término racional y otro irracional, serán iguales separadamente los términos racionales y los términos irracionales.

Si $a+\sqrt{b}=a'+\sqrt{b'}$
será $a=a'$ y $b=b'$

Pues se sigue que
$$a-a'=\sqrt{b}-\sqrt{b'}$$
y si los dos miembros fuesen diferentes de cero, seria una cantidad racional igual á otra irracional, lo que es absurdo. Luego cada uno de los miembros es cero, y por consiguiente *a* igual á *a′* y *b* igual á *b′* [cf. § 82 corol. para los números complejos].

§. 103.

Preparacion y resolucion de las ecuaciones.

1° *Preparar* ú ordenar una ecuacion es transformarla en otra equivalente, que reuna las circunstancias siguientes:

1) que no tenga la incógnita afectada de un signo radical.
2) que no tenga la incógnita como denominador.
3) que todos los términos que contienen la incógnita formen el primer miembro y los otros términos el segundo miembro.
4) que el primer miembro esté ordenado segun las potencias decrecientes de la incógnita.
5) que la suprema potencia de la incógnita tenga el coeficiente $+1$.

Una ecuacion preparada ú ordenada es:

$$x^3+ax^2+bx=c$$

2° *Resolver* una ecuacion es determinar el valor de la incógnita que satisfaga la ecuacion, es decir, que puesto en la ecuacion dada, haga á esta idéntica.

Un valor de la incógnita que verifica la ecuacion, se llama una *raiz* de la ecuacion.

Dada la ecuacion

$$2x+3=21-x$$

será $x=6$ la raiz de la ecuacion

pues si se pone 6 en lugar de x, la ecuacion se convierte en una ecuacion idéntica

$$2.6+3=21-6 \quad \text{ó bien } 15=15$$

§. 104.

Resolucion de ecuaciones de primer grado con una sola incógnita.

Para resolver una ecuacion de primer grado con una sola incógnita basta ordenarla, y á este fin se sigue el método siguiente:

1. Se quitan los denominadores, á lo ménos aquellos que contienen la incógnita.
2. Se resuelven todos los paréntesis que tienen la incógnita.
3. Se quitan los signos radicales que afectan á la incógnita.
4. Se trasladan todos los términos que tienen la incógnita al primer miembro, y todos los que no la tienen al segundo.
5. Se reducen los términos semejantes y se dividen todos

los términos por un comun factor, siempre que se pueda.

6. Se saca como factor la incógnita si está contenida en diferentes términos.
7. Se divide la ecuacion por el coeficiente de la incógnita, de modo que tenga por coeficiente la unidad positiva.

Ejemplo I. Buscar la incógnita x en la ecuacion

$$\frac{8x-4}{21}=3-\frac{19-3x}{14}$$

Resol. Multiplíquese la ecuacion por el mínimo comun denominador que es $7.3.2=42$; se tendrá

$$2(8x-4)=3.42-3(19-3x)$$

Quitando los paréntesis, se deduce á

$$16x-8=126-57+9x$$

y poniendo todos los términos con la incógnita en el primer miembro, y los otros en el segundo, se saca

$$16x-9x=126-57+8$$

y reduciendo los términos semejantes

$$7x=77$$

y finalmente dividiendo por 7, que es coeficiente de x, se tiene el valor de la incógnita

$$x=11$$

Prueba. Póngase el valor de x en la ecuacion dada y será

$$\frac{8.11-4}{21}=3-\frac{19-3.11}{14};\ \frac{88-4}{21}=3-\frac{19-33}{14};\ \frac{84}{21}=3+\frac{14}{14}$$

ó bien $$4=4$$

Ejemplo II. Buscar x en la ecuacion:

$$\frac{1}{a-b}-\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a+b}-\frac{a-b}{x}$$

Resol. Multiplíquese la ecuacion por el mínimo comun múltiplo de los denominadores que es $(a+b)(a-b)x$; se tendrá

$$(a+b)x-(a+b)^2(a-b)=(a-b)x-(a-b)^2(a+b)$$

y cuando los términos con x se ponen en el primer miembro y los términos conocidos en el segundo, se sigue

$$(a+b)x-(a-b)x=(a+b)^2(a-b)-(a-b)^2(a+b)$$

luego sacando x en el primer miembro, y ademas los factores comunes en el segundo, será

$$(a+b-a+b)x=(a+b)(a-b)(a+b-a+b)$$

y dividiendo por el coeficiente de x, que es tambien factor en el segundo miembro se tiene

$$x=(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

EJEMPLO III. Determinar el valor de la incógnita en la ecuacion

$$2x+\sqrt{4x^2-7x-6}=9$$

RESOL. Póngase $2x$ en el segundo miembro para tener sola la cantidad radical eu el primer miembro:

$$\sqrt{4x^2-7x-6}=9-2x$$

Ahora la ecuacion se eleva al cuadrado:

$$4x^2-7x-6=81-36x+4x^2$$

Quítase $4x^2$ que está en el primer miembro por el que está en el segundo, y luego poniendo la incógnita en el primer miembro y las conocidas en el segundo, se sigue

$$-7x+36x=81+6$$

ó bien

$$29x=87$$

ó finalmente

$$x=3$$

EJEMPLO IV. Buscar el valor de x en la ecuacion

$$\sqrt{x}+\sqrt{a+x}=m:\sqrt{a+x}$$

RESOL. Multiplíquese la ecuacion por el divisor $\sqrt{a+x}$, y será:

$$\sqrt{ax+x^2}+a+x=m$$

$$\sqrt{ax+x^2}=(m-a)-x$$

luego el cuadrado:

$$ax+x^2=(m-a)^2-2(m-a)x+x^2$$

Quítese x^2 y póngase el término $2(m-a)x$ que tiene el factor x en el primer miembro y será

$$ax+2(m-a)x=(m-a)^2$$

de donde por reduccion:

$$x=\frac{(m-a)^2}{2m-a}$$

EJEMPLO V. Búsquese el valor de x en la ecuacion:

$$3x-1=\sqrt{3x+1+\tfrac{1}{2}(3x-1)}$$

RESOL. La ecuacion tiene el factor comun

$$\sqrt{3x}+1 \qquad (\alpha)$$

pues $3x-1=(\sqrt{3x}+1)(\sqrt{3x}-1)$. Dividiendo por este, se saca

$$\sqrt{3x}-1 = 1+\tfrac{1}{2}(\sqrt{3x}-1)$$

es decir $$\tfrac{1}{2}(\sqrt{3x}-1) = 1$$

$$\sqrt{3x}-1 = 2$$

$$\sqrt{3x} = 3 \qquad (\beta)$$

Elevando al cuadrado se saca

$$3x = 9 \quad \text{de donde } x = 3$$

Por consiguiente $x=3$ será la raiz de la ecuacion. Pero la misma ecuacion tiene tambien otra raiz, que resulta de la espresion (α), que es *factor comun* de la ecuacion dada, poniéndola igual á cero. En efecto, de

$$\sqrt{3x}+1 = 0$$

se sigue $$\sqrt{3x} = -1 \qquad (\gamma)$$

$$3x = 1 \quad \text{y} \quad x=\tfrac{1}{3}$$

Luego tenemos dos raices $x'=3$ y $x''=\frac{1}{3}$.

Es evidente que el factor comun ha de suministrar otra raiz; pues la ecuacion dada puede representarse en la forma:

$$(\sqrt{3x}+1)(\sqrt{3x}-1) = (\sqrt{3x}+1)+\tfrac{1}{2}(\sqrt{3x}+1)(\sqrt{3x}-1)$$

Suponiendo ahora que el factor comun sea $=0$, uno y otro miembro será cero, y tenemos una ecuacion idéntica; luego la condicion

$$\sqrt{3x}+1=0$$

satisface á la ecuacion dada.

Obsérvese:

1) Cuando una ecuacion tiene un factor comun que es la incógnita ó una espresion cualquiera que contenga la incógnita como término, para evitar una ecuacion de grado superior, la ecuacion debe dividirse por dicho factor. Así en el último ejemplo, la ecuacion dada se reducirá á una ecuacion del segundo grado, si no se divide por $\sqrt{3x}+1$.

2) Si la incógnita x es factor comun de la ecuacion, una resolucion será $x=0$.

3) Si es factor comun una espresion que contiene la incógnita como término, una resolucion se sigue, igualando dicha espresion á cero.

4) Las verdaderas resoluciones del último problema son

$$\sqrt{3x}=3\ ;\quad \sqrt{3x}=-1$$

que tenemos en (β) y (γ), ó tambien, si se divide por $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{x}=\sqrt{3}\ ;\quad \sqrt{x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

con sus signos respectivos. Al efectuar la prueba, el valor de $\sqrt{3x}$ ha de sustituirse en la ecuacion dada, y tomando los valores últimos $x=3$, $x=\frac{1}{3}$, las raices cuadradas pueden tener dos signos; los verdaderos signos son los anteriores y los opuestos no verifican la ecuacion.

§. 105.

Ejemplos de aplicacion.

Plantear un problema es espresar sus condiciones en forma algébrica.

Para plantear un problema

1) *se busca la cantidad que es verdaderamente la incógnita y por medio de la cual pueden hallarse todas las otras cantidades que se buscan, si es que existen en el mismo problema.*

2) *se efectúan con la incógnita todas las operaciones indicadas en el problema, perfectamente como si la incógnita fuese una cantidad conocida.*

3) *se busca en el enunciado del problema la doble espresion de la misma cantidad que sirva de fundamento á la ecuacion.*

Ademas se debe tener cuidado de no introducir mas incógnitas de las que se necesitan absolutamente. El planteo de problemas se adquiere solo con mucho ejercicio y un exámen tranquilo de las condiciones que forman el problema.

Ejemplo I. Una escuela contiene 4 cursos diferentes y un número total de 134 escolares. En el segundo curso hay 5 escolares mas que en el primero, en el tercero 6 mas que en el segundo, y finalmente en el cuarto 7 mas que en el tercero. Se quiere saber el número de los escolares en cada uno de los cursos.

Resol. 1). Se buscan cuatro cantidades, pero se ve que las últimas tres serán conocidas, conociendo la primera, que es el número de los escolares del primer curso. Luego este número es la verdadera incógnita que designamos por x.

2) Se indican en el problema algunas operaciones algébricas que pueden efectuarse y son las siguientes:

el primer curso tiene x escolares, luego
el segundo curso tiene $x+5$
el tercer curso tiene $x+5+6=x+11$

el cuarto curso tiene $x+11+7=x+18$.

3) Tenemos en el problema una doble espresion de una misma cantidad, á saber, el número total 134 de todos los escolares es igual á la suma de los escolares que hay en los diferentes cursos. Luego se saca la ecuacion

$$x+(x+5)+(x+11)+(x+18)=134$$
$$\text{de donde} \quad x=25$$

Por consiguiente, el primer curso tiene 25 escolares, el segundo $25+5=30$, el tercer $30+6=36$, el cuarto $36+7=43$.

Ejemplo II. El área de un jardin que tiene una forma rectangular es 5 veces mayor que la de otro que tiene la misma forma. El primero tiene 192 metros de largo y 180 de ancho; el segundo tiene 96 metros de largo. Se busca el ancho del segundo.

Resol. Es sabido que el área de un rectángulo es igual al producto de los números que espresan su largo y ancho.

1) No tenemos sino *una* incógnita, que es el ancho del segundo jardin y se designará por x.

2) La doble espresion de una misma cantidad está contenida en la condicion de que la quinta parte del primer jardin es igual á la superficie del segundo.

3) Pero la superficie del primer jardin es el producto de su largo por su ancho, luego $=192.180\ \square^m$; y la superficie del segundo jardin es $96.x\ \square^m$. Luego por 2) se tiene

$$\tfrac{1}{5}.192.180=96.x$$
$$\text{de donde} \quad x=72 \text{ metros.}$$

Ejemplo III. Un agrónomo tuvo que vender 60 bueyes por falta de pastos, bastando solamente para 14 semanas en lugar de 20. Se busca el número de todos los bueyes que tenia.

Resol. 1) No tenemos sino una incógnita x que es el número total de los bueyes.

2) Si tenia x bueyes al principio, al fin no tenia sino $x—60$.

3) La provision que basta para x animales en 14 semanas, es la misma que basta para $(x—60)$ en 20 semanas. Ademas supónese en el problema que la provision que se necesita para *un animal en una semana* siempre es la misma cantidad, y por consiguiente una constante que *puede tomarse como unidad de la provision*. Luego el planteo del problema será el siguiente:

Un buey consume en 1 semana 1 unidad de provision
x bueyes consumen en 1 semana x unidades „
x „ „ 14 semanas 14.x „ „

Por consiguiente la provision del agrónomo es $14.x$ unidades. Pero tenemos otra espresion de la misma cantidad: retiene $x—60$ animales y la misma provision basta para estos en 20 semanas, de donde

x—60 bueyes consumen en 1 semana x—60 unidades de provision

x—60 „ „ 20 semanas 20 (x—60) „ „

Por consiguiente la misma provision tiene la doble espresion 14.x y 20(x—60) y por esto es

$$14x = 20\,(x-60)$$
$$14x = 20x-1200$$
$$6x = 1200$$
$$x = 200$$

Luego tenia 200 bueyes.

Ejemplo. IV. Partiendo dos móviles al mismo tiempo de los puntos A y B, que distan entre sí a metros [fig. 33], recorren la recta AB y su prolongacion con movimiento uniforme, marchando en el sentido AB. Sus velocidades respectivas son v y v' metros por minuto. Se quiere saber cuál es la distancia de los puntos A y B al punto de encuentro de los dos móviles y el tiempo que tardan en recorrerla.

Resol. Es sabido que el camino recorrido es igual al producto de la velocidad por el tiempo, cuando aquella es uniforme.

Se buscan tres cantidades, pero existen relaciones sencillas entre unas y otras. Espresando por x á la distancia de A al punto del encuentro, la distancia de B al mismo punto será $x—a$. Ademas el tiempo del movimiento es el mismo para ambos móviles, y será igual al cociente del camino por la velocidad respectiva. Espresando ya este tiempo por el camino del primer móvil y la velocidad v, se tiene para su espresion $\frac{x}{v}$, y designándolo por el camino del segundo y la velocidad correspondiente v', se saca como segunda espresion del tiempo $\frac{x-a}{v'}$. Luego será

$$\frac{x}{v} = \frac{x-a}{v'}$$

$$\text{de donde } x = \frac{av}{v-v'}, \qquad (\alpha)$$

y esta será la distancia desde A hasta el punto del encuentro. La distancia desde B hasta el mismo punto es

$$x-a = \frac{av}{v-v'} - a = \frac{av'}{v-v'} \qquad (\beta)$$

y el tiempo que tardan los móviles hasta llegar á encontrarse, es

$$\frac{x}{v} = \frac{a}{v-v'} \qquad (\gamma)$$

Discusion de las fórmulas. Si $v > v'$ el valor de x en (α) es positivo y si $v < v'$ el mismo será negativo, es decir:

En el primer caso los móviles van encontrándose en un punto que está en la prolongacion de AB en el sentido de AB. Pues supónese esta direccion como positiva, y como $v > v-v'$ será

$$\frac{v}{v-v'} > 1 \text{ luego } x = a.\frac{v}{v-v'}, \text{ será} > a$$

luego el punto de encuentro es en la prolongacion de AB. Ademas el tiempo que está en (γ) es positivo, es decir, el encuentro se sigue despues de la partida.

En el segundo caso, el valor de x es negativo y el encuentro tiene lugar en el lado opuesto, en la prolongacion de AB en el sentido BA, y como el tiempo en (γ) tambien es negativo, se infiere que este encuentro tenia lugar ántes de partir los móviles de A y B, lo que es verdadero, si estuvieron en movimiento ántes de llegar á A y B.

Si $v=v'$ el valor de x como el del tiempo se harán infinitos, lo que se esplica fácilmente, no pudiéndose encontrar los móviles por grande que sea el camino recorrido y el tiempo gastado si las velocidades son iguales, ó bien puede decirse que no se encuentran sino despues de un camino infinito y un tiempo infinito que nunca acaban. En efecto, aproximándose el valor de v' mas y mas al valor de v, el valor de x en (α) va aumentando y finalmente acaba con ser infinito si $v'=v$.

Pero puede suponerse tambien que la distancia entre A y B sea $=0$, es decir que $a=0$ y que los móviles partan de un mismo punto A. En este caso será x y el tiempo del encuentro $=0$, lo que dice, que el encontrarse no tiene lugar sino en el momento del salir. Pero si á un tiempo se supone $a=0$ y $v'=v$, tendremos $x=\frac{0}{0}$ y el tiempo $=\frac{0}{0}$. En efecto, una y otra cantidad será verdaderamente indeterminada; pues si los móviles parten á un tiempo del mismo punto y con la misma velocidad, siempre irán juntos en todo el camino y en todo tiempo posible. Luego aquí el símbolo $\frac{0}{0}$ representa cualquier distancia desde A y cualquier tiempo, y es realmente un signo de verdadera indeterminacion.

Finalmente, si v' toma un signo opuesto, es decir si el segundo móvil va en direccion opuesta, en el sentido BA, el encuentro tendrá lugar entre A y B. Pues la fórmula (α) se convierte en

$$x=\frac{av}{v+v'}$$

y como $v<v+v'$ será

$$\frac{av}{v+v'}<a \text{ es decir será } x<a$$

Si $v'=0$, será $x=a$, es decir, el primer móvil encuentra el otro en B.

Se verifican todas las suposiciones posibles en las fórmulas generales (α) y (γ), y se ve la grande utilidad de fórmulas generales que tienen cantidades indeterminadas (y variables) en lugar de determinadas.

§. 106.

Con dos incógnitas.

Por medio de *dos* ecuaciones con *dos* incógnitas se puede determinar el valor de cada una. A este fin se debe *eliminar* una de las incógnitas, de manera que *salga una ecuacion con una sola incógnita.*

El sistema de dos ecuaciones preparadas con dos incógnitas es

$$ax + by = c \qquad (1)$$
$$a'x + b'y = c' \qquad (2)$$

en donde a, a', b, b', c, c' son números cualesquiera, y se necesita que una ecuacion sea *independiente* de la otra, es decir, que una no sea solamente una transformacion algébrica de la otra, que sigue por aplicacion del § 102. Pues en este caso tendriamos solamente una ecuacion en forma diferente.

Los diferentes métodos de eliminacion son los siguientes:

I. Método de sustitucion. Por este método, el valor de una de las dos incógnitas se busca en una de las dos ecuaciones por medio de la otra incógnita, y el valor así encontrado se pone en la otra ecuacion.

De las ecuaciones

$$ax + by = c \qquad (1)$$
$$a'x + b'y = c' \qquad (2)$$

se sigue

A.

$$y = \frac{c-ax}{b}$$

$$a'x + b' \cdot \frac{c-ax}{b} = c'$$

$$ba'x + cb' - ab'x = bc'$$

$$(ba' - ab')x = bc' - cb'$$

$$x = \frac{bc' - cb'}{ba' - ab'}$$

B.

$$x = \frac{c-by}{a}$$

$$a' \cdot \frac{c-by}{a} + b'y = c'$$

$$ca' - ba'y + ab'y = ac'$$

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

II. Método de comparacion. Se busca el valor de una misma incógnita en una y otra ecuacion, y pónense iguales los dos valores así encontrados.

De las ecuaciones

$$ax + by = c \qquad (1)$$
$$a'x + b'y = c' \qquad (2)$$

se sigue que

A.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{c-ax}{b} \\ y=\dfrac{c'-a'x}{b'} \end{array}\right\}$$

$$\frac{c-ax}{b}=\frac{c'-a'x}{b'} \text{ luego}$$

$$cb'-ab'x=bc'-ba'x$$

$$(ba'-ab')\,x=bc'-cb'$$

$$x=\frac{bc'-cb'}{ba'-ab'}$$

B.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{c-by}{a} \\ x=\dfrac{c'-b'y}{a'} \end{array}\right\}$$

$$\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'} \text{ luego}$$

$$ca'-ba'y=ac'-ab'y$$

$$(ab'-ba')y=ac'-ca'$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

III. Método de los coeficientes. Las dos ecuaciones se multiplican por dos números convenientes, de manera que la misma incógnita en una y otra tenga un mismo coeficiente, y luego las dos ecuaciones se suman ó restan segun que sean desiguales ó iguales los coeficientes de aquella incógnita.

Por este método de las ecuaciones

$$ax+by=c \qquad (1)$$
$$a'x+b'y=c' \qquad (2)$$

A.

la primera se multiplicará por b', la segunda por b

$$ab'x+bb'y=cb'$$
$$ba'x+bb'y=bc'$$

se restan:

$$(ab'-ba')x=cb'-bc'$$

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$$

B.

la primera se multiplicará por a', la segunda por a

$$aa'x+ba'y=ca'$$
$$aa'x+ab'y=ac'$$

se restan:

$$(ba'-ab')y=ca'-ac'$$

$$y=\frac{ca'-ac'}{ba'-ab'}$$

IV. Método del factor indeterminado (método de Bezou). Una de las ecuaciones se multiplica por un factor indeterminado m, y se resta la otra de la ecuacion así transformada; en la nueva ecuacion, el coeficiente de la incógnita que quiere eliminarse, se pone igual á cero y así se determina el factor indeterminado m, cuyo valor se sustituye en la otra parte de la ecuacion.

Multiplicando la primera de las ecuaciones

$$ax+by=c \qquad (1)$$
$$a'x+b'y=c' \qquad (2)$$

por el factor indeterminado m, tendremos las ecuaciones

$$max+mby=mc$$
$$a'x+b'y=c'$$

y restando la última de la primera:

$$(ma—a')\,x+(mb—b')y=mc—c' \qquad (\alpha)$$

Ahora póngase

A.

el coeficiente de y igual á cero,

$$mb—b'=0$$

de donde $m=\frac{b'}{b}$ (β)

De la ecuacion (α) queda:

$$(ma—a')x=mc—c'$$

y aquí sustituyendo el valor de m que está en (β), se tiene

$$(\frac{b'}{b}a—a')\,x=\frac{b'}{b}\,c—c'$$

$$(ab'—ba')x=cb'—bc'$$

$$x=\frac{cb'—bc'}{ab'—ba'}$$

B.

el coeficiente de x igual á cero,

$$ma—a'=0$$

de donde $m=\frac{a'}{a}$ (γ)

De la ecuacion (α) queda:

$$(mb—b')\,y=mc—c'$$

y aquí sustituyendo el valor de m que está en (γ), se tiene

$$(\frac{a'}{a}.b—b')y=\frac{a'}{a}\,c—c'$$

$$(ba'—ab')y=ca'—ac'$$

$$y=\frac{ca'—ac'}{ba'—ab'}$$

§. 107.

Ejemplos.

Ejemplo I. Sean las ecuaciones

$$x+17y=300 \qquad (1)$$
$$11x—y=104 \qquad (2)$$

Resol. Por el primer método de sustitucion:

$$x=300—17y$$
$$11(300—17y)—y=104$$
$$3300—187y—y=104$$
$$188y=3196$$
$$y=17$$

Póngase este valor en la ecuacion (2) y se tiene

$$11x—17=104$$
$$11x=121$$
$$x=11$$

Prueba.

$11+17.17=300$ ó bien $11+289=300$

$11.11—17=104$ $\qquad$ $121—17=104$

Ejemplo II. Sean

$$5x+3y=42 \qquad (1)$$
$$x—2y=—2 \qquad (2)$$

Resol. Por el método de comparacion:

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{42-5x}{3} \\ y=\dfrac{2+x}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{42-5x}{3}=\frac{2+x}{2} \qquad \text{de donde}$$

$$84-10x=6+3x$$
$$13x=78$$
$$x=6$$

De la segunda ecuacion se sigue

$$y=\frac{2+x}{2}=\frac{2+6}{2}=4$$

Luego $x=6$, $y=4$ son los valores buscados.

Ejemplo. III. Sean

$$4x-6y=8$$
$$3x+2y=19$$

Resol. Por el método de los coeficientes.

A.

Multiplíquese la segunda por 3, y será

$$4x-6y=8$$
$$9x+6y=57$$

suma $13x \quad =65$

$$x=5$$

B.

Multiplíquese la primera por 3, la segunda por 4, y será

$$12x-18y=24$$
$$12x+8y=76$$ réstese la 1.ª

$$26y=52$$
$$y=2$$

Ejemplo IV. Sean

$$4x-3y=-2$$
$$3x-2y=-1$$

Resol. Por el método del factor indeterminado.

$$4\,m\,x-3\,m\,y=-2\,m$$
$$3\,x-2\,y=-1$$

$$(4m-3)\,x-(3m-2)\,y=-2m+1$$

A.

Poniendo $3m-2=0$ será

$m=\frac{2}{3}$ y ademas

$$(4m-3).x=-2m+1$$
$$(4.\tfrac{2}{3}-3)x=-2.\tfrac{2}{3}+1$$
$$-\tfrac{1}{3}x=-\tfrac{1}{3}$$
$$x=1$$

B.

Para $4m-3=0$ será

$m=\frac{3}{4}$ y

$$-(3m-2)\,y=-2m+1$$
$$-(3.\tfrac{3}{4}-2)\,y=-2.\tfrac{3}{4}+1$$
$$-\tfrac{1}{4}\,y=-\tfrac{2}{4}$$
$$y=2$$

Nota. Muchas veces conviene formar ecuaciones mas sencillas en lugar de las dadas, como se ve en los ejemplos siguientes.

Ejemplo V. $$\sqrt{x+y} = a+b \qquad (1)$$

$$x-y = (a-b)\sqrt{x+y} \qquad (2)$$

Resol. La segunda ecuacion despues de ordenada seria del segundo grado. Puede evitarse el segundo grado. elevando (1) al cuadrado, y poniendo $a+b$ que tenemos en (1), en lugar de la raiz que está en(2). Se obtienen las ecuaciones simples:

$$x+y = (a+b)^2$$
$$x-y = a^2-b^2$$

Sumando y restando se obtiene:

$$x=a(a+b); \quad y=b(a+b)$$

Ejemplo VI. Búscanse x é y en las ecuaciones

$$\tfrac{1}{2}(a+b-c)x+\tfrac{1}{2}(a-b+c)y=a^2+(b-c)^2$$
$$\tfrac{1}{2}(a-b+c)x+\tfrac{1}{2}(a+b-c)y=a^2-(b-c)^2$$

Se hallarán ecuaciones mas simples
1) por adicion de las ecuaciones propuestas, de donde

$$ax+ay = 2a^2 \quad \text{ó bien}$$
$$x+y = 2a \qquad (1)$$

2) por sustraccion:
$$(b-c)x+(-b+c)y = 2(b-c)^2$$
de donde $$x-y = 2(b-c) \qquad (2)$$

Ahora se obtendrán los valores de x é y, sumando y restando las ecuaciones simples (1) y (2), y serán:

$$x = a+b-c$$
$$y = a-b+c$$

Ejemplo de aplicacion. Un maestro y su compañero recibieron 42 pesos 5 reales para una obra, y trabajaron el maestro 14 dias, y el compañero 24, logrando el primero en 6 dias de trabajo 9 reales mas que el último en 8 dias. Se busca el jornal de cada uno.

Resol. Sea x el jornal del maestro é y el de su compañero, y será la hechura del primero $14x$ y la del segundo $24y$; por consiguiente lograron ambos $14x+24y$ y esto es igual á 42 pesos 5 reales $=341$ reales. Luego se tiene la ecuacion

$$14x+24y = 341 \qquad (1)$$

Ademas, en 6 dias de trabajo el maestro logró $6x$, y en 8 dias el compañero $8y$; luego para la segunda condicion del problema se saca la otra ecuacion

$$6x = 8y + 9 \qquad (2)$$

Multiplíquese esta ecuacion por 3, poniendo á un tiempo la cantidad y en el primer miembro, y será

$$18x - 24y = 27 \qquad (3)$$

Sumando $$14x + 24y = 341 \qquad (1)$$

se sigue $$32x = 368$$
$$x = 11\tfrac{1}{2}$$

Póngase este valor de x en (2) y se obtendrá

$$69 = 8y + 9$$

de donde $$y = 7\tfrac{1}{2}$$

Luego el jornal del maestro es $11\frac{1}{2}$, y el del compañero $7\frac{1}{2}$ reales.

§. 108

Con mas de dos incógnitas.

Dada una ecuacion con *varias* incógnitas, el valor de las últimas no puede hallarse de manera que sea determinado. Para determinar perfectamente las incógnitas, se necesitan tantas ecuaciones independientes unas de otras, cuantas incógnitas hay que determinar.

Por los métodos ya espuestos, y un sistema de n ecuaciones independientes se hallarán las n incógnitas que contienen, *eliminando* primeramente una de las incógnitas, con lo cual se obtiene un sistema de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas; luego se eliminará otra incógnita de este sistema, y se tendrá un sistema de $n-2$ ecuaciones con $n-2$ incógnitas; y así empleando siempre el mismo procedimiento, finalmente se sacará una ecuacion con una sola incógnita, cuyo valor por lo tanto puede determinarse. El valor así encontrado se sustituye en una ecuacion del sistema precedente que tiene dos incógnitas. Despues se sustituyen los dos valores ya determinados en una ecuacion del sistema antepenúltimo y se hallará una tercera incógnita, y en adelante siempre de la misma manera, sustituyendo los valores ya encontrados en una ecuacion del sistema que precede inmediatamente, se sacarán todas las incógnitas.

Ejemplo I. *Por el método de sustitucion* resuélvase el sistema de las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 2x+3y+4z= 29 \\ 2) & 3x+4y-5z=-2 \\ 3) & 4x-5y+6z= 17 \end{array}\right\} \qquad (I)$$

RESOL. Se sigue de la primera ecuacion

$$4) \quad z=\frac{29-2x-3y}{4}$$

y sustituyendo este valor de z en las ecuaciones 2) y 3) será:

$$3x+4y-\frac{5(29-2x-3y)}{4}=-2$$

$$4x-5y+\frac{6(29-2x-3y)}{4}=17$$

dos ecuaciones con dos incógnitas, las cuales por reduccion tomarán la forma mas simple

$$\left.\begin{array}{ll} 5) & 22x+31y= 137 \\ 6) & 2x-19y=-53 \end{array}\right\} \qquad (II)$$

De la ecuacion 5) se deduce

$$7) \quad y=\frac{137-22x}{31}$$

y cuando este valor de y se sustituye en la ecuacion 6)

$$2x-\frac{19(137-22x)}{31}=-53$$

una ecuacion con una sola incógnita, de donde se saca:

$$x=2$$

Póngase ahora el valor de x ya determinado en la ecuacion 6) del sistema (II) ó tambien en la ecuacion 7), y se deducirá:

$$y=3$$

y finalmente poniendo los valores de x é y en la ecuacion 4) se sigue:

$$z=4$$

EJEMPLO II. *Por el método de combinacion* han de resolverse las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} 1) & 2x+3y-4z=-2 \\ 2) & 4x-5y+6z= 22 \\ 3) & 6x-7y-8z=-50 \end{array}$$

RESOL. Para z se hallan los valores

$$4) \quad z=\frac{2+2x+3y}{4}$$

$$5)\quad z=\frac{22-4x+5y}{6}$$

$$6)\quad z=\frac{50+6x-7y}{8}$$

luego combinando 4) con 5) y 6) se tendrá

$$\frac{2+2x+3y}{4}=\frac{22-4x+5y}{6}$$

$$\frac{2+2x+3y}{4}=\frac{50+6x-7y}{8}$$

ó bien

$$\left.\begin{array}{ll}7) & 14x-y=38\\ 8) & -2x+13y=46\end{array}\right\}\quad (II)$$

por donde y tiene los valores

$$9)\quad y=14x-38$$

$$10)\quad y=\frac{46+2x}{13}$$

los cuales por combinacion dan

$$14x-38=\frac{46+2x}{13}$$

de donde se infiere:

$$x=3$$

Este valor puesto en 9) nos suministra:

$$y=4$$

y finalmente, cuando los valores de x é y se sustituyen en 4), se tendrá:

$$z=5$$

Ejemplo III. *Por el método de los coeficientes,* resuélvanse las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}1) & 4x-3y-2z=-11\\ 2) & 5x-4y+3z=\ \ 18\\ 3) & 6x-5y-4z=-25\end{array}$$

Resol. Para eliminar z, multiplíquese 1) por 3 y 2) por 2, y se tendrá:

$$\begin{array}{ll} & 12x-9y-6z=-33\\ & 10x-8y+6z=\ \ 36 \quad \text{luego sumando}\\ \hline 4) & 22x-17y=3\end{array}$$

De igual modo puede restarse la ecuacion 3) del doble de la ecuacion 1):

$$\begin{array}{rl} & 8x-6y-4z=-22 \\ & 6x-5y-4z=-25 \\ \hline 5) & 2x-y=3 \end{array}$$

Las ecuaciones 4) y 5) forman un sistema con dos incógnitas. Multiplicando 5) por 17 y restando de la ecuacion así transformada la ecuacion 4) se tiene:

$$\begin{array}{l} 34x-17y=51 \\ 22x-17x=\ 3 \\ \hline 12x=48 \end{array}$$

$$x=4$$

Póngase este valor de x en 5) y será:

$$y=5$$

y cuando los valores de x é y se sustituyen en 1) se tendrá:

$$z=6$$

Ejemplo IV. *Por el método del factor indeterminado* resuélvase el sistema:

$$\begin{array}{rl} 1) & x+2y+3z=38 \\ 2) & 4x-3y+2z=16 \\ 3) & 3x+4y-5z=4 \end{array}$$

Resol. Dadas n ecuaciones con n incógnitas, se multiplicarán n—1 de las mismas con n—1 factores indeterminadas y se sumarán todas. Luego multiplicaremos 1) por p, 2) por q y sumaremos estas dos ecuaciones así transformadas con la última. Por esto se tiene:

$$4)\quad (p+4q+3)x+(2p-3q+4)y+(3p+2q-5)z=38p+16q+4$$

Para hallar x de una manera que sea independiente de y y z, los coeficientes de estas cantidades se igualarán á cero:

$$\begin{array}{rl} 5) & 2p-3q+4=0 \\ 6) & 3p+2q-5=0 \end{array}$$

por lo cual la ecuacion 4) se reduce á

$$(p+4q+3)x=38p+16q+4$$

ó bien á

$$7)\qquad x=\frac{38p+16q+4}{p+4q+3}$$

Los valores de p y q se hallarán por medio de 5) y 6) y serán

$$p=\frac{7}{13};\qquad q=\frac{22}{13}$$

y sustituidos estos en 7) se sacará

$$x=5$$

Ademas, para determinar y de una manera independiente, en 4) los coeficientes de x y z se igualarán á cero:

$$8)\quad p+4q+3=0$$
$$9)\quad 3p+2q-5=0$$

de donde se saca

$$p=\frac{13}{5};\quad q=-\frac{7}{5}$$

y como la ecuacion 4) se reduce á

$$(2p-3q+4)\,y = 38p+16q+4$$
$$y=\frac{38p+16q+4}{2p-3q+4}$$

sustituyendo los últimos valores de p y q, se tendrá

$$y=6$$

Finalmente, para hallar z, en 4) pónganse los coeficientes de x é y iguales á cero:

$$10)\quad p+4q+3=0$$
$$11)\quad 2p-3q+4=0$$

por donde

$$p=-\frac{25}{11};\quad q=-\frac{2}{11}$$

y la ecuacion 4) se reduce á

$$(3p+2q-5)z = 38p+16q+4$$

$$z=\frac{38p+16q+4}{3p+2q-5}$$

ó cuando los valores de p y q se sustituyen, será

$$z=7$$

Nota. En todo caso particular se seguirán los métodos que conduzcan al resultado tan pronto como sea posible. Así por ejemplo, en el último cálculo, despues de haber encontrado $x=5$, se puede sustituir este valor inmediatamente en las ecuaciones 1) y 3), por donde se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2y+3z &= 33 \\ 4y-5z &= -11 \end{aligned}$$

con las dos incógnitas y y z, que se determinarán por el tercer método.

Ejemplo V. Resuélvanse las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad x+y+z = 3a+b+c \\ &2)\quad x+y+t = a+3b+c \\ &3)\quad x-z-t = a+b-c \\ &4)\quad y+z-t = 3a-b-c \end{aligned}\right\}\qquad (I)$$

Resol. Se formará un sistema con las tres incógnitas x, y, z, eliminando t por adicion de 2) y 3), y despues de 2) y 4). Tendremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} 5) & x+y+z=3a+b+c \\ 6) & 2x+y-z=2a+4b \\ 7) & x+2y+z=4a+2b \end{array}\right\} \qquad (II)$$

Ahora puede formarse un sistema con las dos incógnitas x é y, sumando 5) y 6) y despues 6) y 7), lo que da

$$\left.\begin{array}{ll} 8) & 3x+2y=5a+5b+c \\ 9) & 3x+3y=6a+6b \end{array}\right\} \qquad (III)$$

Restando 8) de 9) se tiene

$$y=a+b-c \qquad (\alpha)$$

La ecuacion 9) nos suministra

$$x+y=2a+2b$$
$$x=2a+2b-y$$
$$x=a+b+c \qquad (\beta)$$

Para hallar el valor de z, se deduce de 5)

$$z=3a+b+c-(x+y)$$

Pero $x+y=2a+2b$, luego será

$$z=a-b+c \qquad (\gamma)$$

Finalmente se tendrá t por la ecuacion 2)

$$t=a+3b+c-(x+y)$$

de donde

$$t=b+c-a \qquad (\delta)$$

§. 109

Teoria de las desigualdades.

I. Los principios generales del cálculo con desigualdades son las siguientes, que se demuestran facilmente:

A. Una desigualdad.

1) *No se altera una desigualdad, añadiendo ó quitando á sus dos miembros una misma cantidad, cualquiera que sea el signo de esta.* Si $a>b$ será $a\pm c>b\pm c$. Síguese

α) Puede *trasladarse* cualquier término de un miembro de una desigualdad á otro, mudando el signo de dicho término. Si $a-b>c-d$ será $a-b+d>c$.

β) Cualquiera desigualdad puede reducirse de manera que el segundo miembro sea cero. Si $a-b>c-d$ será $a-b-c+d>0$.

γ) Pueden *mudarse* á un tiempo todos los signos de una desigualdad, *invirtiendo* al mismo tiempo el signo que indica la desigualdad. Si $b-a>-c$ será $a-b<c$; equivale, pues, esto á trasladar todos los términos al otro miembro.

2) *No se altera una desigualdad multiplicando ó dividiendo sus dos miembros por una misma cantidad positiva; pero si esta cantidad es negativa, se debe invertir el signo de la desigualdad.* Si $-7>-8$ será $-7.3>-8.3$; pero multiplicando por -3, será $+7.3<+.8.3$. Se demuestra fácilmente en general.

3) *Una desigualdad queda verdadera, sustituyendo en el mayor miembro otra cantidad, de manera que este miembro se haga aun mayor, ó en el menor miembro una cantidad que la haga aun menor.* Si $a-b>c$ y $d>a$, será *á fortiori* $d-b>c$; y si $e<b$, será *á fortiori* $a-e>c$; y finalmente si $f<c$, será *á fortiori* $a-b>f$.

B. Dos desigualdades.

1) *Pueden sumarse miembro á miembro dos desigualdades que existan en el mismo sentido.* Si $a>b$, $c>d$, se verifica $a+c>b+d$. Pero si $a>b$ y $c<d$, no se sigue $a+c>b+d$.

2) *Pueden restarse miembro á miembro dos desigualdades que lo sean en sentido contrario,* dando á la desigualdad resultante el signo de la que sirve de minuendo. Así de $a>b$, $c<d$, se deduce $a-c>b-d$ Pero de $8>7$ y $6>2$ no se sigue $8-6>7-2$.

3) *Pueden multiplicarse miembro á miembro dos desigualdades que lo sean en el mismo sentido, con tal que sean positivos los dos miembros de cada una.* Si $a>b$, $c>d$, será $ac>bd$, si todas las cantidades son positivas. Pero si $5>3$ y $-6>-7$, no se sigue $-5.6>-3.7$.

4) *Pueden dividirse miembro á miembro dos desigualdades, que se verifican en sentido contrario y entre dos cantidades positivas, dando á la desigualdad resultante el signo de la que sirve de dividendo,* Si $a>b$ y $c<d$, será $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ si todas las cantidades son positivas; pero de $10>8$ y $5>4$ no se sigue $\frac{10}{5}>\frac{8}{4}$.

Como consecuencia de 3) se saca:

5) *Puede elevarse cualquier desigualdad á cualquier potencia con esponente impar; pero si el esponente es par, los dos miembros de la desigualdad tienen que ser positivos.* Si $3>2$, $3>-2$, $-3<-2$ será $3^3>2^3$, $3^3>(-2)^3$ y $(-3)^3<(-2)^3$. Pero si $3>2$, y $3>-5$ solo será $3^2>2^2$ y no será $3^2>(-5)^2$.

6) *Puede estraerse á cualquier desigualdad cualquier raiz de grado impar; pero si la raiz es de grado par, los dos miembros de la desigualdad tienen que ser positivos y á la mayor raiz se le pondrá el signo +*. Así de las desigualdades $27>8$, $27>-8$, $-27<-8$,

se saca estrayendo la tercera raiz, $3>2$, $3>-2$, $-3<-2$, Ademas si $16>9$, se sigue estrayendo la raiz cuadrada, $4>\pm3$, pero no se sigue $-4>\pm3$. Luego dada la espresion $(a-b)^2>(c-d)^2$, será $a-b>c-d$ si $a-b$ es positivo.

II. Desigualdades con incógnitas.

A. *Una incógnita.* Las reglas que acabamos de esplicar bastan para determinar *los límites* de una incógnita dada por una desigualdad. Si, por ejemplo, para x se tiene la condicion general

$$ax+b>c+dx \qquad (1)$$

haciendo la trasposicion y reduciendo, se sigue

$$(a-d)x>c-b$$

de donde

$$x>\frac{c-b}{a-d} \text{ si } a-d \text{ es una cantidad positiva.}$$

$$x<\frac{c-b}{a-d} \text{ si } a-d \text{ es una cantidad negativa.}$$

La primera espresion da *un límite inferior*, y la segunda *un límite superior* de la incógnita.

B. *Mas de una incógnita.* Teniendo dos desigualdades con dos incógnitas

$$ax+by>c$$
$$a'x+b'y>c'$$

deben distinguirse tres casos, segun que a y a' tengan á la vez signos positivos ó negativos, ó signos contrarios.

I. Si a y a' son positivos, se tendrá

$$x>\frac{c-by}{a}; \qquad x>\frac{c'-b'y}{a'}$$

luego x ha de *ser mayor que la mayor de estas espresiones*, y en esta podrá asignarse á y un valor arbitrario.

II. Si a y a' son negátivos, se tendrá

$$x<\frac{c-by}{a}; \qquad x<\frac{c'-b'y}{a'}$$

luego x ha de *ser menor que la menor de estas espresiones*, dando en esta á y un valor cualquiera que sea.

III. Si a y a' tienen signos contrarios, por ejemplo si $a>0$ y $a'<0$ será

$$x>\frac{c-by}{a} \qquad \text{y} \qquad x<\frac{c'-b'y}{a'}$$

y esto exige que se verifique la desigualdad

$$\frac{c'-b'y}{a'} > \frac{c-by}{a}$$

por lo cual se determina un límite de y, y se unirán á cada valor de y, que satisface á este límite, los valores de x correspondientes comprendidos entre los límites de esta incógnita.

Las mismas consideraciones nos conducirán á la determinacion de los límites de dos variables, dado un sistema de varias desigualdades entre dos variables. Sea por ejemplo:

$$\begin{aligned} 2y-x &> 0 \\ 1-2x-3y &> 0 \\ 7+4x+\ y &> 0 \end{aligned}$$

Resolviendo respecto á x, se tiene

$$x<2y\ ;\qquad x<\frac{1-3y}{2};\quad x>-\frac{7+y}{4} \qquad (\alpha)$$

Luego se debe tener á la vez

$$2y>-\frac{7+y}{4};\qquad \frac{1-3y}{2}>-\frac{7+y}{4}$$

y se deduce $y>-\frac{7}{9}$, $y<\frac{9}{5}$. Luego, si y ha de ser *entero*, no tiene otro valor sino 0 y 1.

Para $y=0$, de (α) se saca

$$x<0;\ x<\tfrac{1}{2};\quad x>-\tfrac{7}{4}=-1\tfrac{3}{4}$$

luego al valor 0 de y solo corresponde el valor -1 de x con tal que x sea *entero*.

Para $y=1$, de (α) se sigue

$$x<2;\quad x<-1;\quad x>-2$$

No corresponde un entero á estas condiciones.

Por consiguiente las desigualdades propuestas solo pueden satisfacerse por el par de valores $y=0$, $x=-1$.

ECUACIONES INDETERMINADAS DE PRIMER GRADO.

§. 110.

De las ecuaciones indeterminadas en general

1° Cuando el número n de las incógnitas escede al número m de las ecuaciones dadas para resolver, pueden eliminarse tantas incógnitas cuantas ecuaciones hay, menos una, y quedará finalmente para resolver una ecuacion con $n-(m-1)=n-m+1$ incógnitas. Tal ecuacion resultante es *indeterminada*, pudiendo sustituirse una infinidad de valores diferentes é independientes uno de otro en lugar de $n-m$ de estas incógnitas, y tomará por esto tambien la última incógnita una infinidad de valores diferentes.

Llámanse por lo tanto *indeterminadas* las ecuaciones siempre que esceda el número de las incógnitas al de las ecuaciones dadas. El cálculo, cuyo objeto es resolver ecuaciones de esta especie, dícese *el análisis indeterminada.*

Si se exige que sean *enteros* todos los valores de las incógnitas, podrá no ser infinito el número de soluciones, y aun á veces no tendrá el problema solucion alguna, principalmente si se añade la condicion de que ademas de *enteros*, sean los valores tambien *positivos.*

El objeto de la análisis indeterminada es, pues, hallar *los valores enteros* y *positivos* de las incógnitas que entran en las ecuaciones indeterminadas.

2º El caso mas fácil es la solucion *de una ecuacion con dos incógnitas*, que tiene la forma general

$$ax \pm by = c \qquad (1)$$

en donde a, b, c, son números *enteros positivos* y ademas a y b *primos relativos entre sí.*

a) Puede, pues, a hacerse siempre positivo, y si tenemos $+b$ como coeficiente de y, tambien c tendrá el signo positivo, suponiendo que x é y han de ser números positivos. Ademas, si $-b$ es coeficiente de y, tenemos del mismo modo c con signo positivo, cumpliéndose la condicion $by < ax$. En la condicion opuesta $by > ax$, la cantidad $c = -c'$ seria negativa; pero la ecuacion $ax - by = -c'$ puede escribirse $by - ax = c'$, ecuacion que tiene la forma (1) y son b, a, c' positivos.

b) Ademas, toda ecuacion de primer grado con dos variables puede reducirse á la forma (1) en donde a, b, c no tengan un factor que sea comun á todos. Ahora, si a y b tuvieren un factor comun d, dividiendo la ecuacion por este factor, tendriamos una ecuacion de la forma

$$a'x \pm b'y = \frac{c}{d}$$

En la suposicion que x é y han de ser enteros, como a' y b' lo son, todo el primer miembro lo es tambien y por consiguiente tambien lo seria el segundo miembro $\frac{c}{d}$ y c seria divisible por d, que divide á a y b. Pero esto no es posible, pues reducida la ecuacion á su forma mas sencilla, á una vez a, b, c no tienen un factor comun. Luego a y b no tienen un factor comun, y para que una ecuacion con dos incógnitas pueda resolverse en números enteros, es necesario que la ecuacion reducida á su forma mas sencilla tenga por coeficientes de las incógnitas números *relativos primos entre sí.*

3° Por la condicion de que los valores de las incógnitas sean números *enteros* y *positivos* se infiere ademas:

a) las ecuaciones de la forma $ax+by=c$ no tienen sino un número limitado de valores para las incógnitas. Siendo, pues,

$$x=\frac{c-by}{a}\ ;\quad y=\frac{c-ax}{b}$$

para que x ó y sean positivos, ha de ser $by<c$ y $ax<c$, luego $y<\frac{c}{b}$ y $x<\frac{c}{a}$ y ademas ha de ser $y>0$ y $x>0$.

b) las ecuaciones de la forma $ax-by=c$ tienen un número ilimitado de valores para las incógnitas. Pues será

$$x=\frac{c+by}{a}\ ;\quad y=\frac{-c+ax}{b}$$

luego será x siempre una cantidad positiva por grande que sea y, é y será una cantidad positiva, si $ax>c$ ó $x>\frac{c}{a}$ por grande que sea.

§. 111.

Primer método de resolucion de una ecuacion con dos incógnitas.

Para resolver la ecuacion $ax\pm by=c$, se busca el valor de la incógnita que tiene el menor coeficiente, completamente como si la otra fuese conocida. Se espresa el cociente así encontrado por un entero y un quebrado, y este quebrado se pone igual á una tercera incógnita p. La nueva ecuacion así formada se resuelve buscando la segunda incógnita por medio de la tercera, espresando el nuevo cociente que se encuentra de igual modo por un entero y un quebrado, y este nuevo quebrado se pone igual á una cuarta incógnita q. Repitiendo siempre el mismo procedimiento, finalmente se encontrará para una de las incógnitas auxiliares un valor que no es fraccionario, sino entero. Este valor se sustituye en la ecuacion de las incógnitas que precede inmediatamente, por lo cual se obtiene la incógnita precedente; y sustituyendo el valor de esta en la ecuacion que precede, se hallará otra incógnita &a. Hallada la última incógnita auxiliar con sus valores diferentes que satisfacen á las condiciones de la ecuacion, finalmente se determinarán los valores correspondientes de las incógnitas buscadas.

Problema I. Determinar los valores (enteros y positivos) de x é y en la ecuacion

$$3x+5y=49$$

Resol. Teniendo x el menor de los coeficientes, será

$$\begin{array}{l|l} x=\dfrac{49-5y}{3}=16-y+\dfrac{1-2y}{3} & \text{sea } p=\dfrac{1-2y}{3} \\ y=\dfrac{1-3p}{2}=-p+\dfrac{1-p}{2} & \text{sea } q=\dfrac{1-p}{2} \\ p=1-2q \quad \text{que es entero.} & \end{array}$$

Por sustitucion sucesiva es

$$\begin{aligned} p&=1-2q \\ y&=-p+q=-1+3q \\ x&=16-y+p=18-5q \end{aligned}$$

Ahora x ha de ser un *número positivo* y por consiguiente debe ser $5q<18$, $q<\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$, y como tambien q ha de ser un número entero, *el máximo valor* de q será 3. Ademas, en la ecuacion penúltima, y ha de ser positivo, luego será $3q>1$ y $q>\frac{1}{3}$, y el *mínimo valor* de q será 1. Luego para q no pueden tomarse sino los valores 1, 2, 3, y por consiguiente las dos últimas ecuaciones darán los valores de x é y que se buscan:

para $q=$	1	2	3
será $x=$	13	8	3
$y=$	2	5	8

Problema II. Búscanse x é y en la ecuacion

$$36x-23y=98$$

Resol. Teniendo y el menor coeficiente será

$$\begin{array}{l|l} y=\dfrac{36x-98}{23}=x-4+\dfrac{13x-6}{23} & \text{sea } p=\dfrac{13x-6}{28} \\ x=\dfrac{23p+6}{13}=p+\dfrac{10p+6}{13} & \text{sea } q=\dfrac{10p+6}{13} \\ p=\dfrac{13q-6}{10}=q+\dfrac{3q-6}{10} & \text{sea } r=\dfrac{3q-6}{10} \\ q=\dfrac{10r+6}{3}=3r+2+\dfrac{r}{3} & \text{sea } s=\dfrac{r}{3} \\ r=3s & \end{array}$$

Por sustitucion sucesiva es

$$\begin{aligned}
r &= 3s \\
q &= 3r+2+s=2+10\,s \\
p &= q+r=2+10\,s+3\,s=2+13\,s \\
x &= p+q=2+13\,s+2+10\,s=4+23\,s \\
y &= x-4+p=23s+2+13\,s=2+36\,s
\end{aligned}$$

Serán x é y positivos, si s es igual á cualquier número positivo ó cero; luego tenemos una infinidad de valores:

para $s=$	0	1	2	3	....
será $x=$	4	27	50	73	....
$y=$	2	38	74	110	....

§. 112.

Segundo método de resolver una ecuacion con dos incógnitas.

Si el quebrado $\frac{a}{b}$ se convierte en *fraccion continua* y despues se forman *las reducidas* consecutivas, es sabido por el Teor. I del § 47 que la reducida *penúltima* $\frac{p}{q}$, restada de la última que es $\frac{a}{b}$, produce un quebrado comun cuyo numerador es ± 1, es decir que tenemos

$$\frac{a}{b}-\frac{p}{q}=\frac{aq-bp}{bq}=\frac{\pm 1}{bq}$$

de donde $\quad aq-bp=\pm 1$

Aplícase esta propiedad de las reducidas para resolver las ecuaciones indeterminadas de primer grado. Distinguiremos dos casos:

I. $\quad ax-by=c$

El quebrado $\frac{a}{b}$, formado de los coeficientes de las incógnitas, se convierte en fraccion continua y fórmanse las reducidas consecutivas. Si la *penúltima* es $\frac{p}{q}$, será

$$aq-bp=\pm 1$$

de donde, si se multiplica por $\pm c$, de manera que el término absoluto se haga positivo $=c$ se deduce

$$a\,(\pm cq)-b\,(\pm cp)=c \qquad (1)$$

Esta ecuacion tiene la misma forma que (I), y será

$$x=\pm cq;\quad y=\pm cp$$

una solucion del problema en dos números enteros. Para hallar las otras soluciones, puede añadirse al minuendo y sustraendo de (1) un comun múltiplo de *a* y *b*, por ejemplo *abn*, y por esto la misma ecuacion se convertirá en

$$a(\pm cq+bn)-b(\pm cp+an)=c \qquad (2)$$

y los valores generales de x é y serán

$$x=\pm cq+bn;\quad y=\pm cp+an \qquad (3)$$

Si $a>b$, se convertirá en fraccion continua el quebrado $\frac{b}{a}$, y designando la penúltima reducida por $\frac{q}{p}$, será

$$\frac{b}{a}-\frac{q}{p}=\frac{bp-aq}{ap}=\frac{\pm 1}{ap} \quad \text{de donde}$$

$$bp-aq=\pm 1 \quad \text{ó bien} \quad aq-bp=\mp 1$$

y síguese el mismo cálculo, multiplicando por $\mp c$.

$$\text{II.} \qquad ax+by=c$$

Resuélvese primeramente la ecuacion $ax-bz=c$ segun el método que acabamos de esplicar, y serán los valores buscados

$$x=\pm cq+bn;\quad y=-z=\mp cp-an$$

Ejemplo I. Dada la ecuacion

$$5x-17y=10$$

y convirtiendo $\frac{5}{17}$ en fraccion continua, las reducidas son

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{7},\ \frac{5}{17}$$

y tenemos $\quad \frac{5}{17}-\frac{2}{7}=\frac{5.7-17.2}{17.7}=\frac{+1}{17.7}$

luego $\quad 5.7-17.2=+1$

y cuando se multiplica por 10, se sigue

$$5.70-17.20=10$$

de donde $\quad 5(70+17n)-17(20+5n)=10$

y por consiguiente serán las soluciones

$$x=70+17n\ ; \qquad y=20+5n$$

Para n podrá tomarse cualquier número positivo ó negativo, entero ó fraccionario; pero si los valores de x é y tienen que ser *enteros* y *positivos* no podrá tomarse para n sino un número *entero* y ademas deben cumplirse las dos condiciones

$$17n+70>0 \quad \text{ó bien} \quad n>-\tfrac{70}{17}=-4\tfrac{2}{17}$$

$$5n+20>0 \quad \text{ó bien} \quad n>-\tfrac{20}{5}=-4$$

Luego puede ser $n=-3, -2, -1, 0, +1, +3 \ldots\ldots +\infty$, y

para $n=$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	....
será $x=$	19	36	53	70	87	104	....
$y=$	5	10	15	20	25	30	....

Ejemplo II. Búscanse los valores de x é y en

$$19x-7y=5$$

Convirtiendo $\frac{7}{19}$ en fraccion continua, las reducidas son

$$\tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{3}{8},\ \tfrac{7}{19}$$

y tenemos

$$\frac{7}{19}-\frac{3}{8}=\frac{7.8-19.3}{19.8}=\frac{-1}{19.8}$$

luego
$$19.3-7.8=+1$$
$$19.15-7.40=5$$

$$19\,(15+7.n)-7\,(40+19n)=5$$

y será $\quad x=15+7.n\ ; \qquad y=40+19n$

El menor valor de n es -2; luego

para $n=$	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	....
será $x=$	1	8	15	22	29	36	....
$y=$	2	21	40	59	78	97	....

Ejemplo III. Resolver la ecuacion

$$19x+11y=112$$

Si $\frac{11}{19}$ se convierte en fraccion continua, las reducidas serán

$$\tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{4}{7},\ \tfrac{11}{19}$$

de donde

$$\frac{11}{19}-\frac{4}{7}=\frac{11.7-19.4}{19.7}=\frac{+1}{19.7}$$

luego $19.(-4)+11.7=1$

$$19.(-4.112)+11.(7.112)=112$$

$$19.(-4.112+11n)+11\,(7.112-19n)=112$$

y por consiguiente los valores de x é y son

$$x=-448+11n\ ;\qquad y=784-19n$$

Para que x é y sean enteros y positivos, tenemos la doble condicion

$$11n>448 \quad \text{ó bien} \quad n>\frac{448}{11}=40\frac{8}{11}$$

$$19n<784 \quad \text{ó bien} \quad n<\frac{784}{19}=41\frac{5}{19}$$

Esto solo es posible para $n=41$, y el problema no tiene sino una sola solucion que es

$$x=-448+11.41=3$$
$$y=\quad 784-19.41=5$$

§. 113.

Resolucion de una ecuacion con mas de dos incógnitas.

Dada una ecuacion con *tres* incógnitas, se sustituirán valores cualesquiera (enteros y positivos) en lugar de una de las incógnitas, por lo cual la ecuacion se reduce á varias otras con dos incógnitas que pueden resolverse por los métodos ya espuestos.

Mas pronto se sacarán *todas las soluciones posibles* de esta manera:

I. Segun el primer método, buscando cada vez la incógnita que tiene el *menor* coeficiente.

Ejemplo. Resuélvase la ecuacion

$$15x+4y+6z=55$$

Resol. El *menor* de los coeficientes tiene y, luego

$$y=\frac{55-15x-6z}{4}=13-3x-z+\frac{3-3x-2z}{4}=13-3x-z-p$$

en donde $p=\dfrac{3x+2z-3}{4}$; búsquese z y será

$$z=\frac{4p-3x+3}{2}=2p-x+1-\frac{x-1}{2}=2p-x+1-q$$

en donde $q=\frac{x-1}{2}$; búsquese x y será

$x=1+2q$

Ahora por sustitucion succesiva será

$$x=1+2q$$
$$z=2p-3q$$
$$y=10-3q-3p$$

la resolucion general en números enteros, poniendo en lugar de p y q números enteros cualesquiera ó tambien cero.

Si ademas de enteros, los valores han de ser positivos, se deberán cumplir las tres condiciones

$$1+2q>0 \quad \text{ó bien} \quad q>-\tfrac{1}{2} \qquad 1)$$
$$2p-3q>0 \qquad\qquad p>\tfrac{3}{2}q \qquad 2)$$
$$10-3q-3p>0 \qquad\qquad p+q<\tfrac{10}{3} \qquad 3)$$

Poniendo en 3) en lugar de p la cantidad $\frac{3}{2}q$ que es menor, el primer miembro se hará aun menor, y será *á fortiori* $\frac{3}{2}q+q<\frac{10}{3}$ de donde $q<\frac{4}{3}$; luego, con respecto á la desigualdad 1) q ha de estar entre los límites $-\frac{1}{2}$ y $+\frac{4}{3}$, es decir q no tiene otros valores sino

$$q=0 \qquad y \qquad q=+1$$

Ahora, si $q=0$ las desigualdades 2) y 3) dan $p>0$ y $p<\frac{10}{3}$; luego

para $q=0$ puede ser $p=1,\ 2,\ 3$ $\qquad (\alpha)$

y si $q=+1$, de 2) y 3) se sigue $p>\frac{3}{2}$ y $p<\frac{7}{3}$; luego

para $q=1$ puede ser $p=2$ $\qquad (\beta)$

y no hay otras soluciones. Sustituyendo los valores de p y q en las espresiones de x, y, z, se sigue que el problema en números enteros y positivos, no tiene otras resoluciones sino

$x=1$	1	1	3
$y=7$	4	1	1
$z=2$	4	6	1

II. Por el segundo método, *aplicando la teoría de las fracciones continuas.* Propongámonos resolver la misma ecuacion

$$1) \qquad 15x+4y+6z=55$$

Resol. Trasládese al otro miembro la incógnita que tiene el *mayor* coeficiente; será

$$4y+6z=55-15x=5\,(11-3x)$$

El primer miembro es divisible por 2, luego lo será tambien el segundo y puede igualarse

$$2) \qquad 11-3x=2\,t \quad \text{en donde } t \text{ es } \textit{un entero positivo} > 0,$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, se sigue

$$3) \qquad 2y+3z=5t$$

Convirtiendo $\frac{2}{3}$ en fraccion continua, las reducidas son

$$\tfrac{0}{1},\ \tfrac{1}{1},\ \tfrac{2}{3}$$

de donde

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{1}=\frac{2.1-3.1}{3.1}=\frac{-1}{3.1}$$

y sígnese $\qquad 2.1-3.1=-1, \quad$ ó bien

$$2(-1)+3.1=1$$

luego, si se multiplica por 5t

$$2(-5t)+3(5t)=5t$$

$$2(3n-5t)+3\,(5t-2n)=5t$$

Comparando esta ecuacion con 3) y tomando el valor de x de 2), se sigue

$$x=\frac{11-2t}{3}$$
$$y=3n-5t$$
$$z=5t-2n$$

Puede escribirse

$$x=3+\frac{2-2t}{3}=3-\frac{2t-2}{3}$$

De aquí se saca, que x *no es un número par;* pues siendo divisible por 2 el último término $\frac{2t-2}{3}$ del último miembro, no lo es el primero 3. Ademas 2t—2 por lo ménos equivale á cero; luego será 3 el *máximo* valor de x y por consiguiente x no tiene otros valores sino 1 y 3.

De la ecuacion 2) se sigue

$$t=\frac{11-3x}{2}$$

luego para $x=1$, será $t=4$, y para $x=3$, será $t=1$. Por esto los valores de x, y, z podrán escribirse

$x=1$	$x=3$
$y=3n-20$	$y=3n-5$
$z=20-2n$	$z=5-2n$

Ahora, tambien los valores de z é y han de ser mayores de cero; luego para $x=1$, debe ser

$$\left.\begin{array}{ll} 3n-20>0 & \text{es decir } n>\frac{20}{3}=6\frac{2}{3} \\ 20-2n>0 & \qquad\qquad n<10 \end{array}\right\} n=7,\ 8,\ 9$$

y para $x=3$, debe ser

$$\left.\begin{array}{ll} 3n-5>0 & \text{es decir } n>\frac{5}{3}=1\frac{2}{3} \\ 5-2n>0 & \qquad\qquad n<\frac{5}{2}=2\frac{1}{2} \end{array}\right\} n=2$$

Sustituyendo estos valores de n, se tienen los mismos valores que hemos encontrado ántes por el primer método.

De igual modo pueden resolverse las ecuaciones con 4, 5, 6... incógnitas,

§. 114

Resolucion de un sistema de ecuaciones indeterminadas.

Dado un sistema de varias ecuaciones indeterminadas, por eliminacion sucesiva finalmente se hallará una ecuacion con dos, tres....incógnitas que puede resolverse. Hecho esto, por sustitucion conveniente se determinarán tambien las incógnitas eliminadas.

Ejemplo I. Determinar los valores de x, y, z, t en

$$\begin{array}{ll} 1) & x-2y+4z=9 \\ 2) & x-3y+4t=15 \\ 3) & 2x-3z+4t=13 \end{array}$$

Resol. Para eliminar t, se resta 2) de 3), de donde se sigue

$$4) \qquad x+3y-3z=-2$$

Ahora multiplíquese 1) por 3 y 4) por 4, y súmense las ecuaciones resultantes; se tendrá

$$\begin{array}{r} 3x-\ 6y+12z=27 \\ 4x+12y-12z=-8 \\ \hline 7x+6y=19 \end{array}$$

Pero esta ecuacion da

$$y=\frac{19-7x}{6}=3-x+\frac{1-x}{6}=3-x+p; \quad p=\frac{1-x}{6}$$

$$x=1-6p; \quad y=3-1+6p+p=2+7p$$

Si los valores de las incógnitas han de ser enteros positivos, solo puede ser $y=0$, de donde tenemos *una sola* solucion:

$$x=1 \quad \text{luego} \quad z=3 \qquad \text{de } 4)$$
$$y=2 \qquad\qquad t=5 \qquad \text{de } 2)$$

EJEMPLO II, ¿Qué número dividido por 5 da el resto 2, dividido por 7 el resto 3, y dividido por 9 el resto 4?

RESOL. Designando los cocientes respectivos por x, y, z, el número buscado N se representará por

$$1) \quad N=5x+2$$
$$2) \quad N=7y+3$$
$$3) \quad N=9z+4$$

La comparacion de 1) con 2) nos suministra la ecuacion indeterminada $5x+2=7y+3$ ó bien

$$5x-7y=1$$

de donde

$$x=\frac{1+7y}{5}=y+\frac{1+2y}{5}\ ; \quad p=\frac{1+2y}{5}$$

$$y=\frac{5p-1}{2}=2p+\frac{p-1}{2}\ ; \quad q=\frac{p-1}{2}$$

$$p=2q+1\ ; \quad \text{luego } y=2p+q=5q+2$$

Dando este valor á y que está en la ecuacion 2), se saca

$$N=7\,(5q+2)+3=35q+17$$

y comparando esta espresion de N con que está en 3), se sigue otra ecuacion indeterminada $35q+17=9z+4$, ó bien

$$9z-35q=13$$

de donde

$$z=\frac{35q+13}{9}=3q+1+\frac{8q+4}{9}; \quad r=\frac{8q+4}{9}$$

$$q=\frac{9r-4}{8}=r+\frac{r-4}{8}\ ; \quad s=\frac{r-4}{8}$$

$r=8s+4$; luego por sustitucion

$$q=9s+4 \quad \text{y} \quad z=35s+17$$

El valor de z puesto en 3) da $N=9\,(35s+17)+4$ ó bien

$$N=315s+157$$

como forma general de todos los números, que divididos por 5, 7, 9, dan los restos 2, 3, 4. Para $s=0$ síguese el mínimo de estos números, que es $N=157$.

ARTICULO II.

Ecuaciones de segundo grado.

A. Con una sola incógnita.

§. 115.

Ecuaciones cuadradas incompletas.

Una ecuacion ordenada de segundo grado puede contener tres clases de términos: un término con el cuadrado de la incógnita, un término con la primera potencia de la incógnita, que tenga un coeficiente conocido, y finalmente un término conocido independiente de la incógnita. Será por consiguiente la forma general de una ecuacion de segundo grado con una sola incógnita:

$$x^2+ax+b=0$$

Tal ecuacion de segundo grado que tiene todos los términos posibles, dícese *completa*. Será *incompleta*, faltando el término con la primera potencia de la incógnita, como en

$$x^2+b=0$$

en donde b puede designar cualquier cantidad positiva ó negativa.

Para resolver la ecuacion incompleta sea $b=-c$, y será

$$x^2-c=0 \qquad (1)$$

luego por transposicion de c

$$x^2=c$$

y estrayendo la raiz cuadrada que puede tener los dos signos, se saca

$$x=\pm\sqrt{c} \qquad (2)$$

Se infiere: *Las ecuaciones incompletas de segundo grado tienen dos raices numéricamente iguales con signos opuestos.*

Considerando el primer miembro de (1) como la diferencia de dos cuadrados, se sigue inmediatamente por descomposicion en factores

$$(x-\sqrt{c})\,(x+\sqrt{c})=0 \qquad (3)$$

Un producto de dos factores puede ser $=0$, siendo cero uno ú otro de los factores; luego la ecuacion (3) nos suministra otras dos ecuaciones simples

$$x-\sqrt{c}=0 \quad \text{y} \quad x+\sqrt{c}=0$$

y por consiguiente de (1) por descomposicion se obtienen las mismas raices que ántes, á saber

$$x=+\sqrt{c} \quad \text{y} \quad x=-\sqrt{c}$$

Ejemplo. Propongamos resolver la ecuacion

$$\frac{8}{x+\sqrt{34-x^2}}+\frac{8}{x-\sqrt{34-x^2}}=x$$

Resol. Quitando los denominadores se obtiene

$$8(x-\sqrt{34-x^2})+8(x+\sqrt{32-x^2})=x\ (2x^2-34)$$

luego, resolviendo los paréntesis y reduciendo

$$16x=x\ (2x^2-34)$$

ó bien $16=2x^2-34$

de donde $x^2=25$

y finalmente $x=\pm 5$

Corolario. Como una ecuacion incompleta de segundo grado, así se resuelve cualquier ecuacion *binómia* de cualquier grado.

Si $x^n-a=0$ (4)

será $x^n=a$

luego $x=\sqrt[n]{a}$ (5)

Sábese por los §§ 86 y 96 que la n^{sima} raiz de a tiene n valores diferentes, y por consiguiente la ecuacion (4) binómia de n^{sima} grado tendrá tambien n raices diferentes.

§. 116

Ecuaciones cuadradas completas.

La forma general de la ecuacion cuadrada completa es

$$x^2+ax+b=0 \qquad (1)$$

Para resolver tal ecuacion, se escribirá la misma en la forma

$$x^2+ax=-b \qquad (2)$$

y podrán considerarse los dos términos del primer miembro como los dos primeros términos del cuadrado de un binómio.

Añadiendo $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$, es decir el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, á los dos miembros, tenemos

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b$$

en donde el primer miembro es el cuadrado perfecto de $x+\frac{a}{2}$; luego estrayendo la raiz cuadrada se sigue

$$x+\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$

de donde $$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b} \qquad (3)$$

Comparando la fórmula (3) con la ecuacion (1) se saca esta regla general:

La incógnita de una ecuacion de segundo grado, reducida á cero, es igual á la mitad del coeficiente del segundo término tomada con signo contrario mas ó ménos la raiz cuadrada de la cantidad que se obtiene, restando del cuadrado de dicha mitad el término conocido.

Luego, la ecuacion del segundo grado tiene dos raices y estas serán

1) reales é iguales, si $\frac{a^2}{4}=b$

2) reales y desiguales, si $\frac{a^2}{4}>b$

3) complejas y desiguales, si $\frac{a^2}{4}<b$

Ejemplo I. Resuélvase la ecuacion

$$\frac{15-9x}{x^2-7x}=1$$

Resol. Quitando el denominador se tiene

$$15-9x=x^2-7x$$

ó bien $$x^2+2x=15$$

Para completar el primer miembro, de modo que sea un cuadrado perfecto, añadiremos á los dos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, á saber $\left(\frac{2}{2}\right)^2=1^2=1$, de dondo sale

$$x^2+2x+1=16$$

Ahora el primer miembro es el cuadrado perfecto de $x+1$, luego estrayendo la raiz cuadrada se saca

$$x+1=\pm 4$$

de donde $$x=-1\pm 4$$

ó bien $$x'=+3\,; \qquad x''=-5$$

resultados que se obtienen inmediatamente por aplicacion de la fórmula (3), pues en la ecuacion

$$x^2+2x-15=0$$

tenemos $a=2$, $b=-15$, luego la fórmula (3) se convierte en

$$x=-\tfrac{2}{2}\pm\sqrt{\tfrac{4}{4}+15}=-1\pm\sqrt{16}=-1\pm 4$$

Ejemplo II. Resolver la ecuacion

$$\frac{171}{x+10}=5+\frac{48}{x+3}$$

Resol. Quitando los denominadores tenemos

$$171x+513=5x^2+65x+150+48x+480$$

ó bien $$5x^2-58x=-117$$

luego $$x^2-\frac{58}{5}x+\frac{117}{5}=0$$

El resultado segun la fórmula es

$$x=+\frac{29}{5}\pm\sqrt{\left(\frac{29}{5}\right)^2-\frac{117}{5}}$$

ó bien $$x=\frac{29\pm 16}{5}$$

ó finalmente $$x'=9; \qquad x''=2\tfrac{3}{5}$$

Ejemplo III. Resolver la ecuacion

$$\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}-\sqrt{x-b}}=\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$$

Resol. Quitando los denominadores se tiene

$$\sqrt{(x-a)(x-b)}+x-b=x-a-\sqrt{(x-a)(x-b)}$$

ó bien $$\sqrt{(x-a)(x-b)}=\frac{b-a}{2}$$

de donde $$(x-a)(x-b)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

y resolviendo los paréntesis del primer miembro será

$$x^2-(a+b)\,x+ab-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=0$$

Segun la fórmula (3) el resultado será

$$x=+\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-ab}$$

ó bien $$x=+\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\frac{(a-b)^2}{2}}$$

ó finalmente $$x=\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

§. 117.

Ejemplos de aplicacion

Ejemplo. I. Hallar en la recta que junta dos puntos luminosos A y B el punto C, donde deberia colocarse una pantalla para que recibiera de ambos cantidades, iguales de luz [fig 34].

Resol. Es sabido el principio de la física: *la intensidad de la luz crece en razon inversa del cuadrado de la distancia*, es decir, que una pantalla colocada á distancias 2, 3, 4, 5 . . . veces mayores de un punto luminoso, recibe de él 4, 9, 16, 25 . . . veces ménos luz.

Sea d la distancia entre los dos puntos luminosos A y B, y la intensidad respectiva de uno y otro a y b á saber, la cantidad de luz que la pantalla recibe respectivamente, cuando se coloca á la unidad de distancia de cada uno de los puntos luminosos.

Si la distancia AC se designa por x, será $BC=d-x$.

Ahora recibiendo la pantalla una cantidad de luz $=a$, cuando tiene una distancia desde A que es $=1$, la cantidad de luz que recibe en las distancias

$$1\;;\quad 2\;;\quad 3\;;\quad 4\;;\;\ldots.x \qquad \text{será}$$

$$a\;;\quad \frac{a}{4}\;;\quad \frac{a}{9}\;;\quad \frac{a}{16}\;;\;\ldots\frac{a}{x^2}$$

Luego en el punto C la pantalla recibe de A una cantidad de luz que es $\frac{a}{x^2}$.

De la misma manera, la cantidad de luz que la pantalla recibe de B en la distancia $d—x$, será $\frac{b}{(d-x)^2}$

Estas dos cantidades de luz han de ser iguales: luego tenemos la ecuacion

$$\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2} \qquad (1)$$

En lugar de reducirla á la forma comun, podremos rebajarla inmediatamente al primer grado, estrayendo la raiz cuadrada:

$$\frac{\sqrt{a}}{x}=\pm\frac{\sqrt{b}}{d-x}$$

de donde sale

$$x=\frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$$

ó bien tenemos dos valores de x

$$x'=d.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad y \quad x''=d.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \qquad (2)$$

Discusion de las fórmulas. Los dos valores de x nos enseñan, que hay dos posiciones de la pantalla, en donde recibe una igual cantidad de luz de ambos puntos luminosos. Respecto á las intensidades de estos, distinguiremos tres casos:

I. Caso: sea $a>b$. El primer valor x' coloca la pantalla entre los puntos A y B, y mas cerca del segundo que del primero; pues, es evidente que en el quebrado que forma la segunda parte de x', el numerador es menor que el denominador y mayor que la mitad del último. Luego será $x<d$ y $>\frac{d}{2}$.

El segundo valor x'' coloca la pantalla en un punto C' que está en la prolongacion de AB en el sentido AB. Pues la fraccion que forma la segunda parte de x'', es >1 y ademas positiva, y por consiguiente será $x''>d$ y tiene el sentido ó la direccion de AB.

II. Caso: sea $a<b$. Es la inversion del caso precedente. El primer valor x' es $<d$ y aun $<\frac{d}{2}$; pues tenemos

$$x'=d.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<d.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} \quad \text{ó bien} \quad <d.\tfrac{1}{2}$$

Por consiguiente el punto C estará entre A y B, y mas cerca de A.

El segundo valor x'' se hace negativo, y el punto C se hallará en la prolongacion de AB en el sentido BA.

III. Caso: sea $a=b$. Los dos valores de x se convierten en

$$x'=\frac{d}{2} \quad y \quad x''=\infty$$

Es evidente, que en la hipótesis $a=b$, estará igualmente iluminada la pantalla que se coloque en medio del intervalo AB. Para esplicar el segundo valor de x, se ve por la fórmula, que x'' crece sin límite, cuando la diferencia entre a y b va disminuyendo, de modo que al hacer $a=b$, no habrá ya posicion donde colocar la pantalla en la prolongacion de AB; y en efecto, en todas las posiciones estará mas cerca de B que de A, y por consiguiente estará desigualmente iluminada por las luces iguales. Sin embargo, el último resultado nos enseña que la diferencia entre las cantidades de luz que la pantalla recibe de los puntos A y B, será tanto menor, cuanto mayor es la distancia de la pantalla desde A y B. Pues en (1), en donde los dos miembros representan las cantidades de luz que recibe la pantalla de los puntos luminosos, nunca tendremos una perfecta igualdad si $a=b$; pero la diferencia de estos dos miembros en dicha suposicion es

$$\frac{a}{x^2}-\frac{a}{(d-x)^2}=\frac{a}{x^2}\left(1-\frac{1}{\left(\frac{d}{x}-1\right)^2}\right)$$

que se hace $=0$ si $x=\infty$ y en general tiene valores cada vez menores, si x va aumentando.

Ejemplo II. Un pilon puede llenarse por dos tubos, por uno, 2 horas mas pronto que por el otro. Por los dos tubos juntos el pilon se llena en $1\frac{7}{8}$ horas. ¿Cuántas horas se necesitan para llenarlo, corriendo cada uno de los tubos separadamente?

Resol. Sea x el número de horas que se necesita para llenar el pilon por solo el primer tubo, y sera $x+2$ el número de horas que tarda el segundo, cuando corre solo. Ademas, el problema contiene una doble espresion de una misma cantidad, á saber: el volúmen del agua que dan los dos tubos juntos es igual al volúmen del pilon, que puede tomarse como unidad del volúmen.

Ahora, si el volúmen del pilon $=1$, el primer tubo, que llena el mismo en x horas, dará en una hora una cantidad de agua que es $=\frac{1}{x}$.

El segundo tubo que llena el pilon en $x+2$ horas, dará en una hora la cantidad $\frac{1}{x+2}$.

Luego corriendo los tubos juntos, la cantidad del agua para una hora será

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}$$

y en $1\frac{7}{8}$ horas la cantidad del agua será

$$1\tfrac{7}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)$$

Pero esta cantidad es el volúmen del pilon, que es la unidad; luego tenemos la ecuacion

$$1\tfrac{7}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}\right)=1$$

Quitando los denominadores, se sigue

$$15\,(x+2+x)=8x\,(x+2)$$

de donde $$x^2-\tfrac{7}{4}\,x=\tfrac{15}{4}$$

luego $$x=\frac{7}{8}\pm\sqrt{\frac{49}{64}+\frac{15}{4}}$$

ó bien $$x=\frac{7}{8}\pm\frac{17}{8}=\begin{cases}+3\\-\tfrac{5}{4}\end{cases}$$

Tenemos dos resultados $x'=+3$ y $x''=-\frac{5}{4}$. El segundo, como negativo no tiene sentido ninguno y debe desecharse, pues el tiempo que se necesita para llenar el pilon ha de ser positivo. Luego el tiempo que tarda el primer tubo en llenar el pilon es 3 horas; y como el segundo tubo tarda 2 horas mas, este llenará el pilon en 5 horas.

Ejemplo III. Un correo tarda 14 horas en llegar desde un lugar A hasta otro B. Al mismo tiempo otro correo sale desde un lugar C, que dista de A $2\frac{1}{2}$ leguas mas que B, y para llegar á A al mismo tiempo que el primer correo, el último ha de lograr $\frac{1}{2}$ hora de tiempo en 5 leguas. Se busca la distancia entre los dos lugares A y B.

Resol. El planteo del problema se funda en la comparacion de los tiempos que los dos correos tardan en hacer 5 leguas: el primer correo tarda en esto $\frac{1}{2}$ hora mas que el otro. Luego se buscan primeramente estos dos tiempos por medio de la incógnita x, que es la distancia entre A y B.

En andar x leguas el primer correo tarda 14 horas, luego en 1 legua tardará $\frac{14}{x}$ horas, y en 5 leguas $\frac{14.5}{x}$ horas.

El segundo correo hace un camino de $x+2\frac{1}{2}$ leguas en el mismo tiempo de 14 horas; por consiguiente en una legua tardará $\frac{14}{x+2\frac{1}{2}}$ horas, y en 5 leguas $\frac{14.5}{x+2\frac{1}{2}}$ horas.

Al tiempo del segundo se debe añadir $\frac{1}{2}$ hora para que sea igual al tiempo del primero; luego tenemos la ecuacion

$$\frac{14.5}{x}=\frac{14.5}{x+2\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}$$

Quitando los denominadores se deduce

$$14.5\,(x+2\tfrac{1}{2})=14.5x+\tfrac{1}{2}\,x\,(x+2\tfrac{1}{2})$$

de donde

$$x^2+\tfrac{5}{2}\,x=350$$

$$x=-\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}+350}$$

$$x'=17\tfrac{1}{2}\,;\qquad x''=-20$$

La distancia entre A y B ha de ser una cantidad positiva; luego el segundo valor debe desecharse y la distancia buscada será $17\frac{1}{2}$ leguas.

Ejemplo IV. Dejando caer una piedra en un pozo de mina, se ha observado que transcurrieron t segundos desde el momento de soltarla, hasta el momento de llegar al oido del observador el golpe que dió en el fondo. Se desea calcular la profundidad del pozo, sabiendo que la velocidad del sonido es uniforme y de a metros por segundo; que un cuerpo que cae en el vacío anda $\frac{1}{2}g$ metros en el primer segundo, y que los espacios son como los cuadrados de los tiempos. Se prescinde enteramente de la resistencia del aire.

Resol. El tiempo t puede partirse en dos partes, una de las cuales es el tiempo t' que tarda la piedra en caer por la profundidad x, y la otra es el tiempo t'' que tarda el sonido en correr por el mismo espacio de abajo hacia arriba.

El tiempo t' se calcula por la proporcion

$$\tfrac{1}{2}g:x=1^2:t'^2$$

de donde

$$t'=\sqrt{\frac{2x}{g}}$$

El tiempo t'' se sigue de la proporcion

$$a:x=1:t''$$

de donde

$$t''=\frac{x}{a}$$

Pero $t'+t''=t$, luego tenemos la ecuacion

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{a}=t$$

Dejando solo el radical en el primer miembro y elevando despues al cuadrado los dos miembros de la ecuacion resultante, tendremos

$$x^2-2a\left(t+\frac{a}{g}\right)x+a^2t^2=0$$

ó bien cuando se multiplica por g^2

$$g^2x^2-2a(tg+a).gx+a^2t^2g^2=0$$

Puede considerarse gx como incógnita y será segun la fórmula (3)

$$gx=a(tg+a)\pm\sqrt{a^2(tg+a)^2-a^2t^2g^2}$$

de donde sale

$$x=\frac{a}{g}\left\{tg+a\pm\sqrt{a(a+2tg)}\right\}$$

Pareceria segun esto que el problema tiene dos soluciones, pues los dos valores de x son reales y positivos, y sin embargo es evidente *á priori* que solo debe tener una. Para conseguir el verdadero resultado observemos que el sonido debe correr en t segundos un espacio at que es mayor que la profundidad del pozo: luego la profundidad debe ser menor que at. Pero el primer valor de x es mayor que at, y solo el segundo menor que esta cantidad. Luego la solucion efectiva del problema se obtiene por el segundo signo y será

$$x=\frac{a}{g}\left\{tg+a-\sqrt{a(a+2tg)}\right\}$$

Nota. En los tres últimos ejemplos teniamos siempre una solucion estraña á las cuestiones que se querian resolver. Para esplicarla debe observarse que en el enunciado de un problema, hay en general dos clases de condicioues que deben cumplir las incógnitas: unas que se llaman *condiciones algebráicas* que *bastan* para plantear el problema y siempre pueden traducirse en ecuaciones; otras que se llaman *condiciones físicas* y que sujetan á las incógnitas á ser, por ejemplo, números reales, ó enteros, ó positivos, á estar comprendidas entre límites determinados &a, y que no pudiendo espresarse en las ecuaciones deben comprobarse despues.

§. 118.

Relaciones entre las cantidades conocidas de una ecuacion de segundo grado y sus raices.

1º Estando reducida á cero una ecuacion de segundo grado

$$x^2+ax+b=0$$

las dos raices son

$$x'=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\ ;\ x''=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$

La suma de las mismas es

$$x'+x''=-a \qquad (4)$$

y el producto es

$$x'.x''=+b \qquad (5)$$

es decir: *En una ecuacion de segundo grado reducida á cero,*

1) *La suma de las raices es igual al coeficiente de la incógnita del segundo término con signo opuesto.*

2) *El producto de las raices es igual al tercer término, que es conocido.*

2º Ahora, cuando sustituimos en $x^2+ax+b=0$ la cantidad $-(x'+x'')$ en lugar de *a* y $x'x''$ en lugar de *b*, la misma ecuacion tomará la forma

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0 \qquad (6)$$

la cual puede transformarse en

$$(x-x')(x-x'')=0 \qquad (7)$$

Luego: *El primer miembro de toda ecuacion de segundo grado, reducida á cero, puede representarse como producto de dos factores de primer grado, formados restando de la incógnita cada una de las raices.*

Un producto de dos factores se hace cero, haciéndose cero uno ú otro de estos. De la última ecuacion, por lo tanto, se siguen las dos ecuaciones simples de primer grado.

$$x-x'=0 \qquad y \qquad x-x''=0$$

y esta es la razon porque una ecuacion de segundo grado tiene dos raices y no mas ni ménos.

3º Puede plantearse fácilmente una ecuacion de segundo grado que tenga dos raices dadas α y β. Pues formando las diferencias $x-\alpha$ y $x-\beta$, la ecuacion buscada será

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

ó bien cuando la multiplicacion se efectúa

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

Así, por ejemplo dadas las raices $+5$ y -3, la ecuacion correspondiente será

$$(x-5)(x+3)=0 \quad \text{ó bien} \quad x^2-2x-15=0$$

4º Sea ahora

$$x^2+ax+b$$

un trinómio de segundo grado y podrá dividirse este trinómio por la difereucia $x—x'$, en donde x' es una raiz de la ecuacion $x^2+ax+b=0$.

En efecto, por la division se obtiene

$$\begin{array}{l|l} x^2+ax+b & x-x' \\ \cline{2-2} x^2-x'x & x+(a+x') \\ \cline{1-1} (a+x')\,x+b & \\ (a+x')\,x-(a+x')\,x' & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\text{residuo} \qquad =(a+x')\,x'+b=x'^2+ax'+b$$

Este residuo es cero; pues segun la suposicion x' es una raiz de la ecuacion $x^2+ax+b=0$, es decir que x' puesto en lugar de x hace el trinómio x^2+ax+b igual á eero.

Luego siendo cero el residuo de la division, el trinómio x^2+ax+b es divisible por $x-x'$ sin resto. El cociente exacto es $x+(a+x')$ ó bien $x-x''$, si se pone $a+x'=-x''$, y será divisible el trinómio tambien por $x-x''$, de manera que tengamos completamente

$$x^2+ax+b=(x-x')\,(x-x'') \qquad (8)$$

Como x' es una raiz de la ecuacion $x^2+ax+b=0$, así lo será x''; pues si se pone $x=x''$, el segundo miembro de la ecuacion (8) se hace igual á cero, y por consiguiente será cero tambien el primero.

5° De la ecuacion (8) se infiere: *Un polinómio de segundo grado* x^2+ax+b *puede descomponerse en dos factores de primer grado, formados restando de la variable x cada una de las raices de la ecuacion* $x^2+ax+b=0$

Así, para descomponer el trinómio x^2+5x+6 en dos factores de primer grado, se resuelve la ecuacion

$$x^2+5x+6=0$$

lo que dará las raices

$$x'=-2\,; \qquad x''=-3$$

y los dos factores serán $x-x'=x+2$ y $x-x''=x+3$, de donde

$$x^2+5x+6=(x+2)\,(x+3)$$

Si en el trinómio dado, el primer término que tiene el cuadrado de la variable x, tuviere un coeficiente, este primeramente podrá sacarse fuera del trinómio como factor. Así tenemos

$$4x^2-20x+24=4\,(x^2-5x+6)=4\,(x-2)\,(x-3)$$

6° Puede descomponerse un trinómio x^2+ax+b de segundo grado aun directamente, completando los dos primeros términos, de suerte que sean un cuadrado perfecto y formando una diferencia de dos cuadrados que puede descomponerse en dos factores, uno de los cuales es una suma y el otro la diferencia de las mismas cantidades. Así se tendrá

$$x^2+ax+b=x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a^2}{4}-b\right) \quad \text{ó bien}$$

$$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)^2 \quad \text{de donde}$$

$$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right)\left(x+\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\right) \qquad (9)$$

y el segundo miembro contiene los dos factores de primer grado que se buscan.

El trinómio en (9) se hará cero solamente en los dos casos

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=x'$$

$$x=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=x''$$

es decir, como arriba se tiene el teorema: *una ecuacion de segundo grado* $x^2+ax+b=0$ *siempre tiene dos raices, y no mas ni ménos que dos raices.*

7° Si en $x^2+ax+b=0$, *b* es positiva y ademas $\frac{a^2}{4}<b$, las raices serán imaginarias; en todo otro caso son reales y si

las raices son	será la ecuacion correspondiente:
$+\alpha,\ +\beta$	$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
$-\alpha,\ -\beta$	$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$
$+\alpha,\ -\beta;\ \ \alpha>\beta$	$(x-\alpha)(x+\beta)=x^2-(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$
$-\alpha,\ +\beta;\ \ \alpha>\beta$	$(x+\alpha)(x-\beta)=x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$

y concluimos: *La ecuacion* $x^2+ax+b=0$

1) *tiene raices con signos iguales, si el último término es positivo, y tiene raices con signos desiguales, si el último término es negativo.*

2) *tiene ambas raices positivas ó la mayor positiva, si el segundo término es negativo, y tiene ambas raices negativas ó la mayor negativa, si el segundo término es positivo.*

Por estas reglas se saben inmediatamente los signos de las raices. Así la ecuacion

$$x^2+5x-7=0$$

tiene raices con signos desiguales y la mayor es negativa.

§. 119.

Ecuaciones superiores que se resuelven como las de segundo grado.

Como ecuaciones de segundo grado pueden resolverse las ecuaciones superiores:

$$\text{I.} \qquad x^{2n} + ax^n = b$$

$$\text{II.} \qquad \sqrt[m]{x} + a\sqrt[2m]{x} = b$$

I. Para resolver una ecuacion de la primera forma, póngase $x^n = z$, luego $x^{2n} = z^2$, y se tendrá

$$z^2 + az = b$$

de donde $$z = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

ó bien si á z se le restituye su valor

$$x^n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

luego $$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}}$$

II. Para resolver una ecuacion de la segunda forma, póngase $\sqrt[2m]{x} = z$, luego $\sqrt[m]{x} = z^2$, y será como arriba

$$z^2 + az = b$$

de donde $$z = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

ó bien, restituyendo á z su valor

$$\sqrt[2m]{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

luego $$x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{2m}$$

Ejemplo I. Descomponer 48 en 2 factores, de manera que la suma de sus cubos sea $=1792$.

Resol. Si el uno de los factores es x, el otro será $\frac{48}{x}$, y por la segunda condicion del problema, tenemos

$$x^3+\left(\frac{48}{x}\right)^3=1792$$

Quitando el denominador se sigue

$$x^6-1792x^3=-48^3$$

Puede considerarse $x^3=z$ como incógnita y será $x^6=z^2$, luego

$$z=x^3=896\pm\sqrt{896^2-48^3}$$

Tenemos $896=2^7.7$ y $48=2^4.3$, luego será

$$x^3=2^7.7\pm\sqrt{2^{14}.7^2-2^{12}.3^3}=2^7.7\pm2^6\sqrt{2^2.7^2-3^3}$$

$$=2^7.7\pm2^6.13=2^6(14\pm13)$$

y estrayendo la tercera raiz, se sigue

$$x'=2^2.3=12\ ;\quad x''=2^2.1=4$$

El uno de los factores buscados será 12, y el otro $\frac{48}{12}=4$ que es el segundo valor de x.

Ejemplo II. Descomponer 4096 en 2 factores, de manera que la diferencia de sus raices de cuarto grado sea $=2$.

Resol. Si x es uno de los factores, será el otro $\frac{4096}{x}$, luego

$$\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{\frac{4096}{x}}=2$$

y quitando el denominador se sigue

$$\sqrt[4]{x^2}-2\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{4096}$$

ó bien $\qquad \sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}=8$

Puede considerarse $\sqrt[4]{x}=z$ como incógnita, y será $\sqrt{x}=z^2$ por consiguiente

$$z=\sqrt[4]{x}=1\pm\sqrt{1+8}=1\pm3$$

y si se eleva á la 4^a potencia:

$$x'=4^4=256\ ;\quad x''=(-2)^4=16$$

Es $4096=256.16$, luego las raices encontradas representan inmediatamente los dos factores buscados.

Transformacion de la raices bicuadradas.

La ecuacion bicuadrada $x^4+ax^2+b=0$ tiene las raices

$$x=\pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}}$$

es decir, raices de la forma general

$$\sqrt{m\pm\sqrt{n}}$$

Pueden transformarse estas frecuentemente en la suma ó diferencia de dos raices cuadradas, cuyo cálculo numerico procede mas pronto. En efecto, póngase

$$1)\qquad \sqrt{m\pm\sqrt{n}}=\sqrt{y}\pm\sqrt{z}$$

ó elevando al cuadrado

$$m\pm\sqrt{n}=y+z\pm2\sqrt{yz}$$

en donde y, z son dos cantidades indeterminadas, y toman valores determinados igualando

$$2)\qquad y+z=m$$

$$2\sqrt{yz}=\sqrt{n}$$

Elevaremos estas dos ecuaciones al cuadrado y tendremos

$$\begin{aligned} y^2+2yz+z^2 &= m^2 \\ 4yz &= n \end{aligned}$$ luego por sustraccion

$$y^2-2yz+z^2=m^2-n$$

de donde $\qquad 3)\qquad y-z=\sqrt{m^2-n}$

Suponiendo en 1) $y>z$, será $y-z>0$, luego estrayendo la raiz, en la última ecuacion basta el signo positivo. Ahora por 2) y 3) tenemos

$$y+z=m$$

$$y-z=\sqrt{m^2-n}$$

luego por adicion y sustraccion

$$y=\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-n}\ ;\quad z=\tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-n}$$

y puestos estos valores en 1), se sigue

$$\sqrt{m\pm\sqrt{n}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-n}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-n}} \qquad \text{(I)}$$

Se aplicará esta fórmula siempre que m^2-n es *un cuadrado perfecto*. Así por ejemplo:

$$\sqrt{11+\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{121-72}}+\sqrt{\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{121-72}}$$

$$=\sqrt{\frac{11}{2}+\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{11}{2}-\frac{7}{2}}=3+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12-10\sqrt{-13}}=\sqrt{\frac{12}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{144+1300}}-\sqrt{\frac{12}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{144+1300}}$$

$$=\sqrt{6+19}-\sqrt{6-19}=5-\sqrt{-13}$$

La fórmula invertida

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a\pm2\sqrt{a^2-b}} \qquad \text{(II)}$$

se obtiene, elevando el primer miembro al cuadrado y despues estrayendo la segunda raiz; se aplica, si a^2-b es un cuadrado perfecto. Así es:

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{28+2\sqrt{196-180}}$$

$$=\sqrt{28+8}=6$$

$$\sqrt{4+3\sqrt{-1}}+\sqrt{4-3\sqrt{-1}}=\sqrt{8+2\sqrt{16+9}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

En el último ejemplo tenemos una cantidad de forma imaginaria que sin embargo es real.

§. 120.

Resolucion goniométrica de las ecuaciones de segundo grado.

Se simplifica muchas veces el cálculo de las raices por medio de las fórmulas goniométricas, introduciendo un *ángulo auxiliar*. Distinguiremos dos casos, segun que sea en la ecuacion general de segundo grado el signo de b positivo ó negativo, mientras que a tenga un signo cualquiera.

I. $x^2+ax+b=0$

Las raices de esta ecuacion son

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$$

que pueden transformarse facilmente para que tengan la forma

$$x=-\frac{a}{2}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4b}{a^2}}\right) \qquad (1)$$

La cantidad $\frac{4b}{a^2}$ es positiva, y cuando ademas se cumple la condicion de ser esta <1 (lo que sucederá siempre que el resultado haya de ser *real*), puede ponerse [§ 88, 3°]:

$$\frac{4b}{a^2}=\operatorname{sen}^2\varphi \ ; \quad \text{luego } \frac{a}{2}=\frac{\sqrt{b}}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$1-\frac{4b}{a^2}=1-\operatorname{sen}^2\varphi=\cos^2\varphi$$

y el valor de x que está en (1) puede escribirse

$$x=-\frac{\sqrt{b}}{\operatorname{sen}\varphi}\cdot(1\mp\cos\varphi)=-\sqrt{b}\cdot\frac{1\mp\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Ahora por las fórmulas (21) del § 93 tenemos

$$\left.\begin{aligned}\frac{1-\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}&=\frac{1-(1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\varphi)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\\ \frac{1+\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}&=\frac{1+(2\cos^2\frac{1}{2}\varphi-1)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}=\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

y sustituidos estos valores en la ecuacion anterior de x, se sigue

$$\left.\begin{aligned}&x'=-\sqrt{b}\,.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi\ ;\ x''=-\sqrt{b}\,.\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varphi\\ &\text{en donde}\qquad \operatorname{sen}\varphi=\frac{2\sqrt{b}}{a}\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

II. $x^2+ax-b=0$

Las raices de esta ecuacion son las siguientes

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+b}$$

ó bien

$$x=-\frac{a}{2}\left(1\mp\sqrt{1+\frac{4b}{a^2}}\right) \qquad (3)$$

La cantidad $\frac{4b}{a^2}$ es positiva, y como la tangente es susceptibel de todo valor, puede ponerse

$$\frac{4b}{a^2}=\operatorname{tang}^2\varphi;\ \text{luego}\ \frac{a}{2}=\frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tang}\varphi}$$

$$1+\frac{4b}{a^2}=1+\operatorname{tang}^2\varphi=\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

por lo cual el valor de x que está en (3), será

$$x=-\frac{\sqrt{b}}{\operatorname{tang}\varphi}\cdot\left(1\mp\frac{1}{\cos\varphi}\right)=-\sqrt{b}\cdot\frac{\cos\varphi\mp1}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Aplicando las mismas fórmulas (2), se infiere

$$\left.\begin{array}{l} x'=+\sqrt{b}.\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi;\quad x''=-\sqrt{b}.\operatorname{cotang}\frac{1}{2}\varphi \\ \text{en donde}\quad \operatorname{tang}\varphi=\frac{2\sqrt{b}}{a} \end{array}\right\}\qquad(\text{II})$$

Ejemplo. Resolver la ecuacion

$$x^2-23{,}695x-71{,}652=0$$

Resol. La ecuacion dada tiene la forma (II), y es

$$\begin{array}{l} a=-23{,}695 \\ b=\ \ 71{,}652 \end{array}\qquad \operatorname{tang}\varphi=\frac{2\sqrt{b}}{a}=\frac{2.\sqrt{71{,}652}}{-23{,}695}$$

Para tomar los logaritmos, la última ecuacion de tang φ ha de multiplicarse por -1, de suerte que el segundo miembro sea positivo; y como [§ 90 fórm. (6)] tenemos $-\operatorname{tang}\varphi=\operatorname{tang}-\varphi$, se hallará

$$\operatorname{tang}-\varphi=\frac{2\sqrt{71{,}652}}{23{,}695}$$

$$\log\operatorname{tang}-\varphi=\left\{\begin{array}{r} \log 2=0{,}30103 \\ \frac{1}{2}\log 71{,}652=0{,}92761 \\ \hline 11{,}22864-10 \\ \log 23{,}695=1{,}37466 \\ \hline 9{,}85398-10 \end{array}\right.$$

$$-\varphi=\ \ 35^\circ\ 32'\ 40''$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi=-17^\circ\ 46'\ 20''$$

Ahora la fórmula (II) da estos valores de x' y x'':

$$x'=+\sqrt{b}.\operatorname{tang}-17^\circ\ 46'\ 20''=-\sqrt{b}.\operatorname{tang}17^\circ\ 46'\ 20''$$

$$x''=-\sqrt{b}.\operatorname{cotg}-17^\circ\ 46'\ 20''=+\sqrt{b}.\operatorname{cotg}17^\circ\ 46'\ 20''$$

$$\log(-x') = \begin{cases} \frac{1}{2}\log 71{,}652 & = 0{,}92761 \\ \log \text{tang } 17^\circ\, 46'\, 20'' & = 9{,}50587-10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \overline{10{,}43348-10} \\ \log(-x') &= 0{,}43348 \\ -x' &= 2{,}7132 \\ x' &= -2{,}7132 \end{aligned}$$

$$\log x'' = \begin{cases} \frac{1}{2}\log 71{,}652 & = 0{,}92761 \\ \log \text{cotg } 17^\circ\, 46'\, 20'' & = 10{,}49413-10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \overline{11{,}42174-10} \\ \log x'' &= 1{,}42174 \\ x'' &= 26{,}408 \end{aligned}$$

Prueba. En seguida del § 118, 1° la suma de las raices ha de ser igual al coeficiente del segundo término tomado con signo opuesto. En efecto, tenemos

$$x' + x'' = -2{,}7132 + 26{,}408 = 23{,}6948$$

Ademas de esto, el producto de las raices debe ser igual al último término tomado con su signo propio, es decir, debe ser

$$x' . x'' = -71{,}652 \quad \text{ó bien} \quad -x' . x'' = 71{,}652$$

luego $\log(-x') + \log x'' = \log 71{,}652$

lo que se verifica perfectamente; pues tomando estas cantidades como están en el cálculo de arriba, se tiene la igualdad

$$0{,}43348 + 1{,}42174 = 1{,}35522 = \log 71{,}652$$

B. Con dos ó mas incógnitas.

§. 121

Método general de eliminacion entre dos incógnitas.

1° Una ecuacion *completa* de segundo grado con dos incógnitas contiene todos los términos de segundo y primer grado de estas, ademas un término con el producto de las mismas, y finalmente un término conocido ó independiente de las incógnitas. Será por consiguiente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + ay^2 + bxy + cx + dy + e &= 0 \\ x^2 + a'y^2 + b'xy + c'x + d'y + e' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Pueden siempre reducirse las ecuaciones dadas á esta forma, de manera que el cuadrado de una de las incógnitas tenga por coeficiente la unidad y este término se elimina en primer lugar restando una ecuacion de la otra, de donde se saca

$$(a-a')y^2+(b-b')xy+(c-c')x+(d-d')y+(e-e')=0$$

Para eliminar á x completamente, la última ecuacion puede escribirse como se sigue

$$[(b-b')y+(c-c')]x+(a-a')y^2+(d-d')y+(e-e')=0$$

de donde sale

$$x=\frac{(a'-a)y^2+(d'-d)y+(e'-e)}{(b-b')y+(c-c')} \qquad (2)$$

Luego la cantidad x desconocida está espresada por y; sustituido este valor en una de las ecuaciones (1), se sacará una ecuacion que no tenga x, sino solamente y. Pero como se ve, esta ecuacion que da la segunda incógnita, evidentemente es de cuarto grado, que puede reducirse á la forma

$$y^4+Ay^3+By^2+Cy+D=0 \qquad (3)$$

la resolucion de la cual es imposible sin la teoría de las ecuaciones superiores.

Hay diferentes métodos de eliminar una de las incógnitas entre las ecuaciones (1) y pueden aplicarse todos los que hemos espuesto en el Artículo I de este Capítulo; pero todos ellos conducen á una ecuacion de cuarto grado que al presente no puede resolverse.

2º Supongamos que la segunda ecuacion sea de primer grado respecto á una ú otra incógnita, de modo que tengamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x^2+ay^2+bxy+cx+dy+e=0 \\ x+a'y+b'=0 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

y sacamos de la última

$$x=-(a'y+b')$$

valor que sustituido en la primera nos da

$$(a'y+b')^2+ay^2-(by+c)(a'y+b')+dy+e=0$$

que es solamente de segundo grado.

3º Concluimos, que cuando una de las ecuaciones dadas es *de primer grado*, la ecuacion final será de segundo grado y resoluble; pero que la misma será comunmente de cuarto grado ó irresoluble cuando ámbas son *completas* y de segundo grado. Sin embargo, muchas veces pueden resolverse dos ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas, si no son completas ó si los coeficientes tienen propiedades particulares.

EJEMPLO I. Buscar los valores de x é y en las ecuaciones

$$1)\quad x+ay=b$$
$$2)\quad xy=c$$

RESOL. Una de las ecuaciones es de primer grado y la otra del segundo. Aplícase en en este caso con mayor utilidad el *método de sustitucion.* Sale de la primera ecuacion

$$y=\frac{b-x}{a}\qquad\qquad x=b-ay$$

y sustituyendo separadamente estos valores en (2)

$$\frac{x(b-x)}{a}=c\qquad\qquad y\,(b-ay)=c$$

luego

$$x^2-bx+ac=0\qquad\Big|\qquad y^2-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}=0$$

$$x=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-ac}\qquad\Big|\qquad y=\frac{b}{2a}\mp\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}\qquad\Big|\qquad y=\frac{b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Son *pares de solucion* los valores de x é y que tienen delante del signo radical signos opuestos, pues por la ecuacion (1) ha de ser $x+ay=b$, lo que se verifica solamente tomando los signos como hemos indicado.

Comunmente se buscará por eliminacion directa, solamente una de las incógnitas, por ejemplo x, el valor de la cual se sustituirá en una de las ecuaciones dadas, por ejemplo, en 1). Se obtienen con esto inmediatamente *los pares de solucion que deben estar juntos.*

EJEMPLO II. Resolver las ecuaciones

$$1)\quad x+y+3x^2+y^2=a$$
$$2)\quad 2x-y+6x^2+y^2=b$$

RESOL. Ambas ecuaciones son de segundo grado, y aplícase en este caso con mayor utilidad el *método de los coeficientes.* Se pueden eliminar á la vez x y x^2, multiplicando la primera ecuacion por 2, de donde

$$\begin{array}{rl} 2x+2y+6x^2+2y^2 & =2a \\ 2x-\ y+6x^2+\ y^2 & =b \quad \text{restando} \\ \hline 3y \qquad +y^2 & =2a-b \end{array}$$

ó bien $$y^2+3y=2a-b$$

de donde $$y=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+2a-b}$$

§. 122.

Métodos particulares de eliminacion.

Sácase muchas veces el resultado mas pronto empleando métodos particulares de eliminacion, é indicarémos aquí los que se aplican frecuentemente. En el caso de ser ambas ecuaciones *simétricas*, á saber, que ambas ecuaciones no cambian mudando x en y é y en x, no se necesita calcular separadamente *ambas* incógnitas, teniendo estas la misma forma de resultado, con la sola diferencia de que una tenga delante de la cantidad radical que contiene, el signo que es opuesto al de la otra.

$$\text{I.} \qquad \begin{array}{rl} x+y=a & \qquad 1) \\ xy=b & \qquad 2) \end{array}$$

Resol. Elevando al cuadrado la ecuacion 1) que es una *suma* de x é y y restando del resultado el cuádruplo de 2) se puede hallar *la diferencia* de x é y:

$$\begin{array}{rl} x^2+2xy+y^2 & =a^2 \\ 4xy & =4b \\ \hline x^2-2xy+y^2 & =a^2-4b \end{array}$$

$$x-y=\pm\sqrt{a^2-4b} \qquad 3)$$

Por adicion y sustraccion de las ecuaciones 1) y 3) se sigue inmediatamente el resultado que se busca:

$$\begin{array}{rl} x+y= & a \qquad\qquad 1) \\ x-y= & \pm\sqrt{a^2-4b} \qquad 3) \\ \hline \end{array}$$

$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$$

$$y=\tfrac{1}{2}a\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$$

Son *pares de solucion* que tienen signos opuestos delante del signo radical.

$$\text{II.}\qquad x-y=a \qquad 1)$$
$$xy=b \qquad 2)$$

Resol. Elevando al cuadrado la ecuacion 1) que es una *diferencia* de x é y, y sumando con el resultado el cuádruplo de 2), se hallará la *suma* de x é y:

$$\begin{array}{l} x^2-2xy+y^2=a^2 \\ \quad 4xy \quad\;\; =4b \\ \hline x^2+2xy+y^2=a^2+4b \end{array}$$

$$x+y=\pm\sqrt{a^2+4b} \qquad 3)$$

La adicion y sustraccion de 1) y 3) nos da

$$\begin{array}{l} x+y=\pm\sqrt{a^2+4b} \\ x-y=a \\ \hline x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b} \end{array}$$

$$y=-\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4b}$$

La ecuacion 1) no es simétrica, lo que se ve en el resultado.

$$\text{III.}\qquad x^2+y^2=a \qquad 1)$$
$$xy=b \qquad 2)$$

Resol. Con 1) sume y réstese el duplo de 2) para hallar *la suma y la diferencia* de x é y:

$$\begin{array}{l} x^2+y^2=a \\ \quad 2xy=2b \\ \hline x^2+2xy+y^2=a+2b \\ x^2-2xy+y^2=a-2b \end{array}$$

de donde

$$\begin{array}{l} x+y=\pm\sqrt{a+2b} \\ x-y=\pm\sqrt{a-2b} \\ \hline x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}\pm\frac{1}{2}\sqrt{a-2b} \end{array}$$

$$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{a+2b}\mp\frac{1}{2}\sqrt{a-2b}$$

Tenemos cuatro valores de x é y, y forman pares de solucion los signos que tienen en una y otra ecuacion un mismo lugar.

IV. $$x^2-y^2=a \qquad 1)$$
$$xy=b \qquad 2)$$

Resol. Se eleva al cuadrado 1) y se suma con el resultado el cuádruplo del cuadrado de 2) para obtener *la suma* x^2+y^2:

$$\begin{array}{r}
x^4-2x^2y^2+y^4=a^2\\
4x^2y^2\quad\;\; =4b^2\\
\hline
x^4+2x^2y^2+y^4=a^2+4b^2
\end{array}$$

de donde
$$\begin{array}{rl}
x^2+y^2=+\sqrt{a^2+4b^2} & 3)\\
x^2-y^2=a &\\
\hline
\end{array}$$

$$x^2=\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4b^2}$$

$$y^2=-\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4b^2}$$

Estrayendo la raiz cuadrada se tienen x é y. En la ecuacion 3) no escribimos sino el signo positivo delante de la cantidad radical, puesto que la suma x^2+y^2 es positiva, si x é y han de ser reales.

V. $$x^2+y^2=a \qquad 1)$$
$$x+y=b \qquad 2)$$

Resol. Se eleva al cuadrado la ecuacion 2) y se resta la ecuacion 1) para obteuer xy:

$$\begin{array}{rl}
x^2+2xy+y^2=b^2 &\\
x^2\qquad\;\; +y^2=a &\\
\hline
2xy\;\; =b^2-a & 3)
\end{array}$$

Esta ecuacion se resta de 1) para obtener la diferencia $x-y$:

$$x^2-2xy+y^2=a-b^2+a=2a-b^2$$

de donde
$$x-y=\pm\sqrt{2a-b^2} \qquad 4)$$

La adicion y sustraccion de 2) y 4) dan

$$\begin{array}{l}
x+y=b\\
x-y=\pm\sqrt{2a-b^2}\\
\hline
\end{array}$$

$$x=\tfrac{1}{2}b\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2a-b^2}$$

$$y=\tfrac{1}{2}b\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{2a-b^2}$$

VI. $$x^2-y^2=a \qquad 1)$$
$$x \pm y = b \qquad 2)$$

Resol. Se divide 1) por 2) y se obtiene inmediatamente la diferencia $x-y$ ó la suma $x+y$.

VII. $$x^3+y^3=a \qquad 1)$$
$$x+y=b \qquad 2)$$

Resol. Elevaremos 2) al cubo y restaremos 1) del resultado:

$$\begin{array}{r}
x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=b^3 \\
x^3 \qquad\qquad\qquad +y^3=a \\
\hline
3xy(x+y) \qquad =b^3-a
\end{array}$$

luego, cuando se divide por la ecuacion 2) y despues por 3

$$xy=\frac{b^3-a}{3b} \qquad 3)$$

Por medio de 2) y 3) se puede determinar $x-y$ segun I.

VIII. $$x^3-y^3=a \qquad 1)$$
$$x-y=b \qquad 2)$$

Resol. Se resuelve de la misma manera:

$$\begin{array}{r}
x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=b^3 \\
x^3 \qquad\qquad\qquad -y^3=a \\
\hline
-3xy(x-y) \qquad =b^3-a
\end{array}$$

$$xy=\frac{a-b^3}{3b}$$

IX. $$x^4+y^4=a \qquad 1)$$
$$x+y=b \qquad 2)$$

Resol. Elevando 2) á la cuarta potencia y restando 1), se obtiene

$$\begin{array}{r}
x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=b^4 \\
x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +y^4=a \\
\hline
4x^3y+6x^2y^2+4xy^3 \qquad =b^4-a \\
4xy(x^2+2xy+y^2)-2x^2y^2=b^4-a
\end{array}$$

El paréntesis equivale á b^2; luego

$$4b^2xy-2x^2y^2=b^4-a$$

ó bien $$x^2y^2-2b^2xy=\frac{a-b^4}{2}$$

$$xy=b^2\pm\sqrt{\frac{a+b^4}{2}} \qquad 3)$$

Conocido $x+y$ por 2), y xy por 3), se puede buscar $x-y$. De igual modo se resuelve el sistema:

$$x^4+y^4=a \qquad 1)$$
$$x-y=b \qquad 2)$$

§. 123.

Ecuaciones superiores que se resuelven como las de segundo grado.

Muchas ecuaciones de grado superior con dos incógnitas pueden resolverse como las de segundo grado. El método general que debe observarse consiste, en reducir poco á poco las ecuaciones dadas á grados inferiores, hasta llegar á un sistema de dos ecuaciones resolubles.

Esta reduccion se efectúa frecuentemente, descomponiendo en factores los polinómios de la ecuacion de grado superior, y que contienen á las incógnitas, y despues dividiendo una ecuacion por la otra, si los polinómios de estas contienen un factor comun compuesto de las incógnitas. Conduce á esto fin buscar inmediatamente el factor comun por el método del § 31.

Otras veces se reducen las ecuaciones dadas á grados inferiores, por una sustitucion hábil de una cantidad que se encuentra en una de las ecuaciones, poniéndola en la otra. Sin embargo no pueden fijarse reglas generales de eliminacion.

Ejemplo I. $$x^3+y^3=(a+b)(x-y) \qquad 1)$$
$$x^2-xy+y^2=a-b \qquad 2)$$

Resol. Búsquese el máximo comun divisor de los polinómios que forman los primeros miembros de ambas ecuaciones. Se hallará como máximo comun divisor el segundo polinómio mismo, y que este multiplicado por $x+y$ produce el primero. Luego pueden escribirse las ecuaciones dadas en la forma

$$\left.\begin{array}{lr}(x+y)(x^2-xy+y^2)=(a+b)(x-y) & 3)\\ x^2-xy+y^2=a-b & 2)\end{array}\right\}$$

En lugar del segundo paréntesis de 1) puede sustituirse $a-b$, y tendremos el sistema mas simple:

$$\left.\begin{array}{ll}(x+y)(a-b)=(a+b)(x-y) & 3)\\ x^2-xy+y^2=a-b & 2)\end{array}\right\}$$

La primera de estas ecuaciones solo es de primer grado, luego el sistema es resoluble. Se saca de 3) $y=\frac{b}{a}x$, lo que se pone en 2), y dará

$$x^2=\frac{a^2(a-b)}{a^2-ab+b^2}$$

$$x=\pm a\sqrt{\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}}\qquad y=\pm b\sqrt{\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}}$$

Ejemplo II. $$\left.\begin{array}{lll}(x^3+y^3)+xy(x+y) & =15 & 1)\\ (x^2+y^2)x^2y^2 & =20 & 2)\end{array}\right\}$$

Resol. Pueden resolverse los paréntesis y buscar el máximo comun divisor de los primeros miembros de 1) y 2). Pero sábese por el Ejemplo I que $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, y por consiguiente el primer miembro de 1) se descompone en los factores $(x+y)(x^2-xy+y^2+xy)=(x+y)(x^2+y^2)$. Luego otra forma de las ecuaciones dadas es

$$\left.\begin{array}{ll}(x+y)(x^2+y^2)=15 & 1)\\ (x^2+y^2)x^2y^2=20 & 2)\end{array}\right\}$$

Ahora dividiremos 1) por 2), y tendremos

$$\frac{x+y}{x^2y^2}=\frac{3}{4}$$

En esta ecuacion y en la ecuacion 2) transcribiremos la cantidad x^2y^2 en el segundo miembro y tendremos el sistema

$$\left.\begin{array}{ll}x+y=\frac{3}{4}x^2y^2 & 3)\\ x^2+y^2=\frac{20}{x^2y^2} & 4)\end{array}\right\}$$

que, siguiendo el cálculo de V en el § precedente, nos dará una ecuacion que contiene solamente á la cantidad xy. En efecto

se sigue de 3) $$x^2+2xy+y^2=\frac{9}{16}x^4y^4$$

luego restando 4) $$x^2+y^2=\frac{20}{x^2y^2}$$

se obtiene $$2xy=\frac{9}{16}x^4y^4-\frac{20}{x^2y^2}$$

ó bien $$x^6y^6-\frac{32}{9}x^3y^3-\frac{320}{9}=0 \qquad 5)$$

en donde x^3y^3 puede considerarse como incógnita, cuyo valor será

$$x^3y^3=\frac{16\pm 4.14}{9} \quad \text{de donde} \quad xy=\begin{cases}+2 \\ -2\sqrt[3]{\frac{5}{9}}\end{cases} \qquad 6)$$

Sustituido el *primer valor* en 3), tenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{lr} x+y=3 & 7) \\ xy=2 & 8) \end{array}\right\}$$

y sígueso ahora el cálculo de I en el § precedente

$$\begin{array}{l} x^2+2xy+y^2=9 \\ \quad 4xy \qquad =8 \\ \hline x^2-2xy+y^2=1 \\ \qquad x-y=\pm 1 \end{array}$$

Esta ecuacion forma con 7) el sistema

$$\left.\begin{array}{lr} x+y=3 & 7) \\ x-y=\pm 1 & 9) \end{array}\right\}$$

de donde $$\begin{array}{l} x=2,1 \\ y=1,2 \end{array}$$

El otro valor de xy que está en 6) nos suministrará otros tantos valores de x é y, que serán irracionales.

Ejemplo III. $$\left.\begin{array}{lr} (x^2-y^2)(x-y)=16xy & 1) \\ (x^4-y^4)(x^2-y^2)=640x^2y^2 & 2) \end{array}\right\}$$

Resol. Puede dividirse la segunda ecuacion por la primera, con lo cual se tendrá el nuevo sistema mas simple

$$\left.\begin{array}{lr} (x^2-y^2)(x-y)=16xy & 1) \\ (x^2+y^2)(x+y)=40xy & 3) \end{array}\right\}$$

Efectuando la multiplicacion que está indicada en los primeros miembros se sigue

$$\begin{array}{l} x^3-xy^2-x^2y+y^3=16xy \\ x^3+xy^2+x^2y+y^3=40xy \\ \hline 2xy^2+2x^2y \qquad =24xy \qquad (\alpha) \end{array}$$

de donde $$x+y=12 \qquad 4)$$

y elevando esta ecuacion al cuadrado, se saca la relacion

$$x^2+y^2=144-2xy \qquad 5)$$

Los valores de $x+y$, y de x^2+y^2 que tenemos en 4) y 5) podemos sustituir en 3), por lo cual obtenemos

$$12\,(144-2xy)=40xy$$

de donde sale
$$xy=27 \qquad 6)$$
y con 4) tenemos el sistema

$$\begin{aligned} x+y&=12 \qquad 4)\\ xy&=27 \qquad 6)\end{aligned}$$

de donde $x=9,\ 3$; $y=3,\ 9$.

La ecuacion (α) es divisible por xy, luego estará satisfecha por el valor $xy=0$, luego será $x=0$, ó $y=0$, ó á la vez $x=y=0$. Sustituyendo $x=0$, la ecuacion 1) da $y=0$, y sustituyendo $y=0$, se obtiene $x=0$. Por consiguiente tenemos como otra solucion $x=y=0$.

Ejemplo IV.
$$\left.\begin{aligned} x^4+9y^4-6x^2y^2-x^2+3y^2&=132 \quad 1)\\ y^4-10y^2x+25x^2&=1 \quad 2)\end{aligned}\right\}$$

Resol. La última ecuacion es un cuadrado perfecto, y lo son tambien los tres primeros términos de la primera ecuacion. Luego otra forma de las ecuaciones dadas es

$$\left.\begin{aligned} (x^2-3y^2)^2-(x^2-3y^2)&=132 \quad 3)\\ (y^2-5x)^2&=1 \quad 4)\end{aligned}\right\}$$

La primera de estas es una ecuacion completa de segundo grado con la incógnita x^2-3y^2 que puede hallarse, y la segunda dará separadamente el valor de y^2-5x. Se saca

$$\left.\begin{aligned} x^2-3y^2&=12 \text{ ó } -11 \quad 5)\\ y^2-5x&=\pm 1 \quad 6)\end{aligned}\right\}$$

Combinando estos diferentes valores, tenemos que resolver los sistemas

$$\left.\begin{aligned} x^2-3y^2&=12\\ y^2-5x&=+1\end{aligned}\right\}\text{(I)} \qquad \left.\begin{aligned} x^2-3y^2&=-11\\ y^2-5x&=+1\end{aligned}\right\}\text{(III)}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2-3y^2&=12\\ y^2-5x&=-1\end{aligned}\right\}\text{(II)} \qquad \left.\begin{aligned} x^2-3y^2&=-11\\ y^2-5x&=-1\end{aligned}\right\}\text{(IV)}$$

Para eliminar y, el triplo de la segunda ecuacion de cada sistema se sumará con la primera correspondiente, de donde quedan para resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2-15x&=15 \quad \text{y será} & y^2&=5x+1\\ x^2-15x&=9 & y^2&=5x-1\\ x^2-15x&=-8 & y^2&=5x+1\\ x^2-15x&=-14 & y^2&=5x-1\end{aligned}$$

Se obtienen fácilmente los resultados que son los siguientes:

$$x_1=\tfrac{1}{2}\,(15\pm\sqrt{285})\qquad y_1=\pm\sqrt{38{,}5\pm2{,}5\sqrt{285}}$$

$$x_2=\tfrac{1}{2}\,(15\pm3\sqrt{29})\qquad y_2=\pm\sqrt{36{,}5\pm7{,}5\sqrt{29}}$$

$$x_3=\tfrac{1}{2}\,(15\pm\sqrt{193})\qquad y_3=\pm\sqrt{38{,}5\pm2{,}5\sqrt{193}}$$

$$x_4=\begin{cases}14\\1\end{cases}\qquad y_4=\begin{cases}\pm\sqrt{69}\\\pm2\end{cases}$$

Ejemplo V.
$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}&=m \qquad 1)\\ x+y&=n \qquad 2)\end{aligned}\right\}$$

Resol. Tenemos

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2$$

luego
$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2$$

Puede sustituirse este valor en 1) y saldrá

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=m+2$$

de donde
$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{-1\pm\sqrt{4m+9}}{2} \qquad 3)$$

Pongamos por brevedad

$$\tfrac{1}{2}\,(-1\pm\sqrt{4m+9})=a \qquad 4)$$

y tendremos que resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}&=a \qquad 5)\\ x+y&=n \qquad 6)\end{aligned}\right\}$$

De la última ecuacion sacamos $y=n-x$, y sustituyendo este valor en 5), hallamos

$$\frac{x}{n-x}+\frac{n-x}{x}=a \qquad 7)$$

ecuacion de segundo grado que puede resolverse y los valores correspondientes de y se tomarán de 6).

Respecto á la cantidad irracional a, cuyo valor finalmente ha de sustituirse en el resultado, se calculará mas pronto, de esta manera. Síguese de 6) y 5)

$$\begin{array}{l} x^2+2xy+x^2=n^2 \\ x^2 \qquad\quad +y^2=a.xy \\ \hline 2xy \qquad =n^2-axy \end{array}$$

de donde $\qquad xy=\frac{n^2}{a+2} \qquad 8)$

con lo cual $\qquad x+y=n \qquad 9)$

forma un sistema mas sencillo, de donde sale

$$x=\tfrac{1}{2}n\left\{1\pm\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}\right\}$$

$$y=\tfrac{1}{2}n\left\{1\mp\sqrt{\frac{a-2}{a+2}}\right\}$$

y sustituyendo el valor de a que está en 4) y haciendo el denominador racional, el resultado será:

$$x=\tfrac{1}{2}n\left\{1\pm\sqrt{(m+6\mp2\sqrt{4m+9}):m}\right\}$$

$$y=\tfrac{1}{2}n\left\{1\mp\sqrt{(m+6\mp2\sqrt{4m+9}):m}\right\}$$

§. 124.

Valores máximos y mínimos de segundo grado.

A. Funciones enteras.

1° Dícese *funcion* una cantidad cualquiera variable que depende de otra. Así en

$$y=ax^2+bx+c \qquad (1)$$

y es una funcion de x, que se supone como variable independiente y susceptible de todo valor *real* posible desde $-\infty$ hasta $+\infty$. La funcion (1) es una funcion *algébrica*, pues no contiene á x sino como base de una potencia; ademas es *racional*, no teniendo sino esponentes enteros de x; es *entera*, no estando x en un denominador, y finalmente es de *segundo grado*, pues el esponente mas alto de x no escede á 2.

Aunque tome x todo valor real posible, no sucede lo mismo con la variable independiente y. Siempre puede asignarse á y tal valor real, que x se haga imaginario, lo que es contra nuestra suposicion. Resolviendo (1) segun x, se sigue

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)+4ay}}{2a} \qquad (2)$$

de donde se concluye, que comunmente para *un mismo* valor de y existen dos valores diferentes de x, y que hay tambien valores reales de y, á los que no corresponden valores reales de x, á saber, si la cantidad subradical en (2) para un valor determinado de y es negativa.

2° Puede representarse muy bien el cambio de una funcion, por ejemplo de

$$y=\frac{1}{10}x^2-3x+6 \qquad (\alpha)$$

sustituyendo valores sucesivos en lugar de la variable independiente x, y calculando los valores de y que corresponden. Así en el ejemplo propuesto

para $x=$	-10	-5	-2	0	$+2$	$+5$	$+10$	$+15$	$+20$	$+25$	$+30$	$+35$
es $y=$	46	23	12	6	0	-6	-14	$-16{,}5$	-14	-6	$+6$	$+23$

Trazando ahora un sistema de coordenadas XX′, YY′ con el orígen O [fig. 35], tómense los valores de x como *abscisas*, y los valores correspondientes de y como *ordenadas*. Levántese, por ejemplo, en el punto —5 de OX′ la ordenada Aa$=23$, en el punto —2 la ordenada Bb$=12$ &a. Tendremos muchos puntos a, b, c, d....i, k, que unidos los unos con los otros producen una línea curva, y la imagen de la mudanza de la funcion y. Por encima de XX′ la curva no tiene límite; pues creciendo x, aumentará y, y finalmente para $x=\pm\infty$ será tambien $y=\infty$, pero en sentido positivo. Luego son posibles todos los valores *positivos* de y; pero *no lo son los negativos*, siendo Ji el mayor valor negativo que existe. Llámase este *el mínimo* de y, considerando á y como una cantidad que decrece desde $+\infty$ por todos los valores positivos y negativos hasta este valor determinado que es —16,5 y que no es susceptible de valores menores que estos, sino que despues, de nuevo comienza á crecer. Tenemos siempre dos ordenadas y iguales para diferentes valores de x; solo la ordenada Ji que corresponde al mínimo no se repite.

En (α) mudaremos solo el signo del primer término, de suerte que tengamos la nueva funcion

$$y=-\frac{1}{10}x^2-3x+6 \qquad (\beta)$$

y calcularemos de igual modo valores diferentes de y. Será para

$x=-40$	-30	-25	-20	-15	-10	-5	-2	0	$+2$	$+5$	$+10$
$y=-34$	$+6$	$+18$	$+26$	$+28{,}5$	$+26$	$+18$	$+11$	$+6$	-1	-11	-24

La curva está representada en la fig. 36; su posicion es la opuesta; son posibles todos los valores negativos de y, y existe solamente un número limitado de valores positivos, entre los cuales el *máximo* es Ji $=28{,}5$ que corresponde á $x=-15$. Luego tal curva tiene un *máximo*. Tambien en este caso siempre existen dos ordenadas iguales para diferentes valores de x; solo la ordenada Ji que correspondo al máximo viene una vez.

3º Se infiere de esto:

a) si en la funcion $y=ax^2+bx+c$ el coeficiente a es positivo, la funcion es susceptible de todos los valores desde $+\infty$ hasta un límite cierto que es *el mínimo* de la funcion.

b) si en la misma funcion, el coeficiente a es negativo, la funcion es susceptible de todos los valores desde $-\infty$ hasta un límite cierto que es *el máximo* de la funcion.

En uno y otro caso el límite puede ser positivo ó negativo.

Puede considerarse tambien $+\infty$ como un máximo, y $-\infty$ como un mínimo. Ahora, si a es positivo, y será $=+\infty$, tanto para $x=+\infty$, como para $x=-\infty$; y puede decirse que en este caso la funcion tiene tambien *dos máximos* $=+\infty$. Pero si a es negativo, será $y=-\infty$ tanto para $x=+\infty$ como para $x=-\infty$, y la funcion tendrá dos mínimos $=-\infty$. Luego concluimos: La funcion

$$y=ax^2+bx+c \tag{1}$$

tiene *dos máximos* $=+\infty$ y *un mínimo* finito, si a es positivo; pero tiene *dos mínimos* $=-\infty$ y *un máximo finito*, si a es negativo.

4º Para hallar el valor máximo ó mínimo *finito*, sirve la observacion de que existe solamente un valor de x en el caso de ser y un máximo ó mínimo. Resolviendo (1) segun x, se saca como arriba

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(b^2-4ac)+4ay}}{2a} \tag{2}$$

y como demuestra el doble signo de la cantidad radical, siempre existen 2 valores de x para un mismo valor de y, solo si la cantidad subradical es cero, se tiene *un* valor de x. Luego para el caso del máximo ó mínimo tenemos

$$x=-\frac{b}{2a}\,; \quad 4ay+b^2-4ac=0 \tag{3}$$

de donde se pueden calcular los valores correspondientes de x é y que se buscan. Para obtener el valor máximo ó mínimo de y, tambien podrá sustituirse en la funcion (1) el valor de x que está en (3).

5º Síguese el mismo resultado de otra manera. La variable x se supone como cantidad real, luego no serán posibles otros valores de y, sino aquellos que en (2) satisfacen á la condicion

$$4ay+b^2-4ac \geqq 0 \qquad (4)$$

ó bien á $$4ay \geqq 4ac-b^2 \qquad (5)$$

Ahora 1) si a es positivo, (5) puede dividirse por a sin mudar el signo de la desigualdad [§ 109, A, 2)] y tenemos que debe ser

$$y \geqq \frac{4ac-b^2}{4a}$$

Por consiguiente, siempre puede ser y mayor que la cantidad que está en el segundo miembro, pero nunca puede ser menor que esta; luego *el mínimo valor* de y es

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a} \qquad (6)$$

Pero en este caso la cantidad radical en (2) es cero, y sacamos que el valor correspondiente de x, es

$$x=-\frac{b}{2a} \qquad (7)$$

Supongamos 2) que a sea negativo, y no podemos dividir la desigualdad (5) sin mudar su signo. Luego dividiendo tendremos

$$y \leqq \frac{4ac-b^2}{4a}$$

y será *y un máximo* en el caso de la igualdad.

De todo se sigue que

$$\left.\begin{array}{l}\text{para } x=-\dfrac{b}{2a} \text{ es } y=\dfrac{4ac-b^2}{4a} \text{ un Mínimo ó un Máximo} \\ \text{segun que sea } a \text{ positivo ó negativo.}\end{array}\right\} \quad (8)$$

§. 125.

Ejemplos de aplicacion.

Ejemplo I. Búscase el máximo ó mínimo de la funcion

$$y=5x^2-10x+7 \qquad (\alpha)$$

Resol. Como el coeficiente de x^2 es positivo, la funcion tendrá dos máximos $=+\infty$ y un mínimo finito para

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{10}{2.5}=+1$$

y puesto este valor en (α) se obtiene este minimo buscado $y=2$.

Ejemplo II. Buscar el máximo ó mínimo de

$$y=5x-6x^2 \qquad (\beta)$$

Resol. El coeficiente de x^2 es negativo, luego la funcion tendrá dos mínimos $=-\infty$ y un máximo finito para $x=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{12}$; y poniendo este valor en (β), se sigue este máximo $y=-\frac{25}{24}$. Por consiguiente, la funcion no tiene ningun valor positivo.

Ejemplo III. Descomponer el número N en dos sumandos, de manera que el producto de estos sea un máximo.

Resol. Sea x uno de los sumandos y será $N-x$ el otro, luego el producto buscado

$$y=x\ (N-x)=Nx-x^2$$

El coeficiente de x^2 es negativo, luego existe un producto máximo para $x=-\frac{b}{2a}=\frac{N}{2}$, á saber, descomponiendo el número N en dos sumandos *iguales*.

Demuéstrase fácilmente el teorema general:

Descomponiendo un número en varios sumandos *iguales*, el producto de estos será *un máximo*, es decir que será mayor que todo otro producto de sumandos desiguales del mismo número.

En efecto, si tenemos

$$t+u+v+w+\ldots\ldots=N \text{ constante} \qquad (a)$$
$$P=t.u.v.w.\ldots. \qquad (b)$$

haciendo $t'=\frac{1}{2}(t+u)=u'$, se saca

$$t'+t'+v+w+\ldots\ldots=N \text{ constante}$$
$$P'=t'.t'.v.w.\ldots.$$

y será $P'>P$, pues $t'.t'>t.u$, siendo la suma $t'+t'=t+u$ la misma que ántes é iguales los sumandos t' y t' del primer miembro. Luego el producto P se aumenta, haciéndose iguales dos de sus factores, y por consiguiente será P un máximo, si todos son iguales.

Ejemplo IV. Búscase, si existe un máximo ó mínimo de la funcion

$$y=\frac{1}{t}+\frac{1}{u}$$

para $t+u=N$ constante.

Resol. Se tiene $y=\frac{u+t}{ut}=\frac{N}{ut}$, y el denominador es un máximo si $u=t$; luego será la funcion *un mínimo* si $u=t$.

Síguese en general, *si* $t+u+v+w+\ldots=N$ es constante, *la suma de los valores recíprocos* $\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}+\ldots$ *será un mínimo* para $t=u=v=w=\ldots$

Ejemplo V. Corren dos puntos con velocidades uniformes v y v' sobre dos rectas perpendiculares hacia el punto O en donde estas se cortan. Búscase la mínima distancia que pueden tener los puntos, si al tiempo de salir distan de O respectivamente d y d' metros.

Resol. La mínima distancia y que se busca es hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son partes de las dos rectas perpendiculares. Suponiendo que la mínima distancia tenga lugar x segundos despues de salir, los puntos en aquel tiempo distarán respectivamente $(d-cx)$ y $(d'-c'x)$ metros de O, y será por consiguiente

$$y^2=(d-cx)^2+(d'-c'x)^2$$

ó bien $$y^2=(c^2+c'^2)\,x^2-2\,(dc+d'c')\,x+(d^2+d'^2)$$

El coeficiente de x^2 es positivo, y por esto tendrá y^2 verdaderamente un mínimo que tiene lugar despues de

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{cd+c'd'}{c^2+c'^2}$$

segundos. Póngase este valor en la ecuacion de y^2 y se tendrá la mínima distancia

$$y=\pm\frac{cd'-dc'}{\sqrt{c^2+c'^2}}$$

en donde debe tomarse el signo conveniente que haga á y positivo.

Ejemplo VI. Dado un triángulo ABC [fig. 37] y en el lado AB un punto P, se quiere inscribir otro triángulo PQR, que tenga el lado QR paralelo á AB y cuya area sea la mayor posible.

Resol. Sea $h=CD$ la altura, $a=AB$ la base de ABC, $y=FD$ la altura y $x=RQ$ la base de PQR. Tendremos

$$2\triangle PQR=x\,.\,y \qquad (a)$$

La semejanza de los triángulos nos da las relaciones

$$\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h} \quad \text{de donde} \quad x=a-\frac{a}{h}y$$

luego $$2\triangle PQR=ay-\frac{a}{h}y^2 \qquad (\beta)$$

y esta funcion tiene verdaderamente un máximo, siendo el coeficiente de y^2 negativo. El máximo se halla para $y=\frac{h}{2}$, á saber, cuando RQ pasa por la mitad de la altura.

§. 126.

Valores máximos y mínimos de segundo grado.

B. Funciones fraccionarias é irracionales.

1º Una funcion algébrica fraccionaria de segundo grado tiene la forma general

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \qquad (1)$$

y el problema es determinar los valores que puede tomar. Ordenando (1) segun las potencias de x, se deduce

$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+(c-c'y)=0$$

$$x=\frac{-(b-b'y)\pm\sqrt{(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)}}{2(a-a'y)} \qquad (2)$$

Solo son posibles los valores de y que verifican la condicion

$$(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)\geqq 0 \qquad (3)$$

y serán los estremos, máximos ó mínimos en el caso de la igualdad. Como en esta suposicion desaparece en (2) la cantidad radical, se saca el valor de x que correspondo al máximo ó mínimo

$$x=-\frac{b-b'y}{2(a-a'y)} \qquad (4)$$

en donde para y ha de sustituirse su valor máximo ó mínimo conveniente. Para buscar estos, ordenaremos la espresion (3) que despues de ordenada, tomará la forma

$$Ay^2+By+C\geqq 0 \qquad (5)$$

en donde por brevedad escribimos A, B, C en lugar de los coeficientes mas complicados que resultan, á saber

$$A=b'^2-4a'c';\quad B=2(2a'c+2ac'-bb');\quad C=b^2-4ac \tag{6}$$

El polinomio (5), segun el § 118, puede descomponerse en factores, y designando por y' é y'' á las raices de la ecuacion $Ay^2+By+C=0$, que á la vez son los máximos ó mínimos, si estos existen, tendremos la condicion

$$A(y-y')(y-y'')\geqq 0 \tag{7}$$

Distínguense varios casos, conforme á los diferentes valores de A y de las raices y' é y''.

I. *Sea* $A=0$. No vale en esta suposicion la condicion (7), sino de (5) sacamos una espresion de primer grado

$$By+C\geqq 0 \quad \text{de donde} \quad y\geqq -\frac{C}{B} \quad \text{ó} \quad y\leqq -\frac{C}{B}$$

segun que sea B positivo ó negativo; lo primero da un mínimo, y lo segundo da un máximo, y no teniendo otra condicion ninguna, concluimos que

La funcion para $A=0$, $B>0$ *tiene dos máximos infinitos* $=+\infty$, *y un mínimo finito* $=-\dfrac{C}{B}$; y *para* $A=0$, $B<0$ *tiene dos mínimos infinitos* $=-\infty$, *y un máximo finito tambien* $=-\dfrac{C}{B}$.

II. *Sean* A *positivo y las raices reales desiguales.* Si A es positivo, en (7) el producto $(y-y')(y-y'')$ ha de ser positivo, luego los dos factores deben tener un mismo signo. Tomando y' como la mayor raiz, deben cumplirse á la vez las condiciones

ó 1) $\begin{matrix} y-y'>0 \\ y-y''>0 \end{matrix}$ de donde $\left.\begin{matrix} y>y' \\ y>y'' \end{matrix}\right\}$ luego $y>y'$

ó 2) $\begin{matrix} y-y'<0 \\ y-y''<0 \end{matrix}$ de donde $\left.\begin{matrix} y<y' \\ y<y'' \end{matrix}\right\}$ luego $y<y''$

Por consiguiente: en este caso, no es susceptible la funcion y *de valores contenidos entre los límites* y' *é* y'', *pero puede tener todos los otros valores entre* $-\infty$ y $+\infty$. *Será* y' *un mínimo, é* y'' *un máximo finito.*

III. *Sean* A *negativo y las raices reales desiguales.* Ahora el producto $(y-y')(y-y'')$ tiene que ser negativo, luego debe ser á la vez

ó 1) $\begin{matrix} y-y'>0 \\ y-y''<0 \end{matrix}$ de donde $\left.\begin{matrix} y>y' \\ y<y'' \end{matrix}\right\}$ luego $y''>y>y'$

Pero esta condicion no puede verificarse, pues el mismo valor de y no puede ser á la vez mayor que la mayor raiz y menor que la menor raiz. Queda la segunda suposicion:

$$1) \quad \begin{matrix} y-y' < 0 \\ y-y'' > 0 \end{matrix} \quad \text{de donde} \quad \left.\begin{matrix} y < y' \\ y > y'' \end{matrix}\right\} \text{luego } y' > y > y''$$

lo que puede cumplirse. Por consiguiente:

En este caso, la funcion solo es susceptible de valores que están contenidos entre los límites y' *é* y'', *y no tiene ningun otro valor. Es* y' *un máximo é* y'' *un mínimo absolutamente.*

IV. *Sean* A *positivo y las raices reales iguales ó imaginarias.* Haciendo en el II caso $y''=y'$, se sigue que y puede tomar todo valor entre $-\infty$ y $+\infty$, sin límite ninguno. En efecto, si en (7) es $y''=y'$, se saca la condicion

$$A(y-y')^2 \geqq 0 \qquad (8)$$

y será, para $A>0$, esta espresion siempre positiva, cualquiera que sea el valor de y. Luego concluimos que la funcion no tiene límites finitos.

Si las raices son imaginarias y por consiguiente números complejos conjugados, $y'=\alpha+\beta i$, $y''=\alpha-\beta i$, la espresion (7) se convierte en

$$A(y-\alpha-\beta i)(y-\alpha+\beta i)=A[(y-\alpha)^2+\beta^2]>0 \qquad (9)$$

que tambien siempre es positivo, y no tiene y un límite determinado. Observamos que en (8) es posible el signo de la igualdad en el caso de ser $y=y'$, pero que no lo es en (9). Síguese

En este caso, la funcion no tiene límite ninguno, sino puede tomar todo valor posible entre $-\infty$ y $+\infty$.

V. *Sean* A *negativo y las raices reales iguales ó imaginarias.* Tenemos las mismas espresiones (8) y (9); pero nunca puede suceder que sean positivas; luego concluimos que comunmente no existe ningun valor real de y, y que solo para (8), en el caso de la igualdad, existe un solo valor real de y, que es y'.

2° Discusion del último caso. Parece muy estraño el último resultado, de que la funcion

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \qquad (1)$$

no tenga ningun valor, si A es negativo y las raices de (5) son imaginarias y que no tenga sino un solo valor, si en la misma suposicion para A, estas raices son reales é iguales. Aunque no pueda dudarse de la verdad de esta conclusion, haremos, á pesar de esto, *una discusion* de las condiciones que forman el último caso, y podremos considerarla como un ejercicio en la teoría de las raices de ecuaciones de segundo grado.

Si la espresion (7), ó lo que es lo mismo, la espresion (5), nunca es positiva, puede escribirse que debe ser

$$Ay^2+By+C \leqq 0 \tag{10}$$

y se entiende con esto que para cualquier valor real de y, la espresion queda negativa, ó que á lo mas se haga igual á cero, teniendo por segunda condicion

$$A=b'^2-4a'c'<0 \tag{11}$$

Se verificará la condicion indicada en (10) si la espresion

$$z=Ay^2+By+C$$

tiene un máximo cuyo valor sea negativo ó á lo mas igual á cero. Pero como A es negativo, segun el § 124, la funcion z tiene un máximo, que se saca para $y=-\frac{B}{2A}$ y es

$$\frac{4AC-B^2}{4A}$$

Luego se verifica la condicion (10), si tenemos

$$\frac{4AC-B^2}{4A} \leqq 0$$

El denominador A es negativo, luego debe ser el numerador $4AC-B^2$ positivo, ó finalmente debe ser

$$\left.\begin{array}{rr} & B^2-4AC \leqq 0 \\ \text{en donde} & A<0 \end{array}\right\} \tag{12}$$

Sustituyamos en estas desigualdades los valores de A, B y C que están en (6); resulta que debe ser

$$\left.\begin{array}{c} (2a'c+2ac'-bb')^2-(b^2-4ac)(b'^2-4a'c') \leqq 0 \\ b'^2-4a'c'<0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Dividamos la primera desigualdad por $a^2a'^2$, la segunda por a'^2; no se mudarán los signos de las desigualdades por estos divisores positivos. Sale

$$\left.\begin{array}{c} \left(2\frac{c}{a}+2\frac{c'}{a'}-\frac{b}{a}\,\frac{b'}{a'}\right)^2-\left(\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b'^2}{a'^2}-4\frac{c'}{a'}\right) \leqq 0 \\ \frac{b'^2}{a'^2}-4\frac{c'}{a'}<0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Sean t, t' y v, v' las raices de las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \\ a'x^2+b'x+c'=0 \end{array}\right\} \qquad (15)$$

que pueden formarse con los términos de la funcion (1), de manera que tengamos [§ 118, 1°]

$$\frac{b}{a}=-(t+t'); \quad \frac{c}{a}=tt'; \quad \frac{b'}{a'}=-(v+v'); \quad \frac{c'}{a'}=vv' \qquad (16)$$

y podremos transformar (14) para que tenga la forma siguiente:

$$\left\{2tt'+2vv'-(t+t')(v+v')\right\}^2-\left\{(t+t')^2-4tt'\right\}\left\{(v+v')^2-4vv'\right\} \leqq 0$$

$$(v+v')^2-4vv'<0$$

que puede reducirse á

$$\left.\begin{array}{l} \left\{2tt'+2vv'-(t+t')(v+v')\right\}^2-(t-t')^2(v-v')^2 \leqq 0 \\ (v-v')^2<0 \end{array}\right\} \qquad (17)$$

La primera de estas espresiones es la diferencia de dos cuadrados que puede descomponerse en dos factores, y resolviendo los pequeños paréntesis que contienen, se saca

$$(tt'+vv'-t'v-tv')(tt'+vv'-tv-t'v') \leqq 0$$

Cada uno de estos paréntesis puede descomponerse en otros dos factores, y sale

$$(t-v)(t-v')(t'-v)(t'-v') \leqq 0 \qquad (18)$$

cantidad que es idéntica á $B^2-4AC \leqq 0$ que está en (12) y solamente es otra forma de la misma.

La segunda condicion de (17), que es $(v-v')^2<0$, no puede verificarse por valores reales de v y v', luego serán imaginarias estas raices, y tendrán la forma compleja conjugada:

$$\left.\begin{array}{l} v=\alpha'+\beta' i \\ v'=\alpha'-\beta' i \end{array}\right\} \qquad (m)$$

resultando ahora

$$(t-v)(t-v')=(t-\alpha'-\beta' i)(t-\alpha'+\beta' i)=(t-\alpha')^2+\beta'^2$$
$$(t'-v)(t'-v')=(t'-\alpha'-\beta' i)(t'-\alpha'+\beta' i)=(t'-\alpha')^2+\beta'^2$$

con lo cual la condicion (18), junta con la otra $(v-v')^2<0$, forma esta nueva

$$[(t-\alpha')^2+\beta'^2]\,[(t'-\alpha')^2+\beta'^2] \leqq 0 \qquad (19)$$

Las cantidades α' y β' son reales, y si suponemos tambien reales á t y t', serán reales y positivas todas las partes

$$(t-\alpha')^2; \quad \beta'^2; \quad (t'-\alpha')^2; \quad \beta'^2$$

que constituyen la espresion anterior. A lo mas puede ser $(t-\alpha')^2=0$, ó $(t'-\alpha')^2=0$, pero nunca toman valores negativos; luego no puede acontecer que el primer miembro de (19) sea $\leqq 0$ Solo estará satisfecha (19), si t y t' tambien son imaginarios de la forma

$$\left.\begin{array}{l} t=\alpha+\beta i \\ t'=\alpha-\beta i \end{array}\right\} \quad (n)$$

Sustituyamos tambien ahora estos valores, juntamente con los de (m); tendremos

$$(\alpha+\beta i-\alpha'-\beta' i)(\alpha+\beta i-\alpha'+\beta' i)(\alpha-\beta i-\alpha'-\beta' i)\times$$
$$(\alpha-\beta i-\alpha'+\beta' i)$$

$$=[(\alpha-\alpha')+i(\beta-\beta')]\,[(\alpha-\alpha')+i(\beta+\beta')][(\alpha-\alpha')-i(\beta+\beta')]\times$$
$$[(\alpha-\alpha')-i(\beta-\beta')]$$

Multiplíquese el primer factor por el último, el segundo por el tercero, y saldrá

$$[(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2][(\alpha-\alpha')^2+(\beta+\beta')^2]\leqq 0 \qquad (20)$$

Ahora, cuando los coeficientes a, b, c, a', b', c' de la funcion (1), son cantidades reales como siempre suponemos, serán reales tambien las cantidades $\alpha, \beta, \alpha' \beta'$. Pues tenemos, por ejemplo, por adicion y multiplicacion de las ecuaciones (n), con respecto á (16)

$$2\alpha = t+t'=-\frac{b}{a}, \text{ luego } \alpha \text{ real,}$$

$$\alpha^2+\beta^2=t.t'=\frac{c}{a}, \quad \text{luego tambien } \beta \text{ real.}$$

Solo serán α ó β imaginarias, si los cocientes $\frac{b}{a}$ ó $\frac{c}{a}$ lo son, y lo serán estos cocientes, si α ó β lo son. Pero si $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ son reales, serán positivos los cuadrados que tenemos en (20) y no puede hacerse que el primer miembro de (20) sea menor que cero ó negativo.

Luego concluimos, *que para satisfacer á la primera condicion* contenida en (20), de que el primer miembro sea negativo, se necesita que unas ú otras de las cantidades $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ sean imaginarias y que lo sean tambien unas ú otras de los coeficientes a, b, c, a', b', c'.

Pero la primera condicion (20) es el caso V para raices imaginarias de y, como se ve por la espresion (9) que nunca puede ser igual á cero. Por consiguiente, *supone esta parte del caso V que la funcion* (1) *tenga coeficientes imaginarios*, y es una consecuencia sencilla que valores reales de x no pueden producir reales de y.

Tomaremos ahora *la segunda condicion* que está en (20), que se representa por el signo de la igualdad. Será cero la espresion (20), si uno ú otro de los factores es cero, y á este fin se necesita que tengamos á la vez

$$\alpha-\alpha'=0;\quad \beta-\beta'=0;\quad \text{luego } \alpha=\alpha',\ \beta=\beta'$$

ó tambien $\alpha-\alpha'=0;\quad \beta+\beta'=0;\quad$ luego $\alpha=\alpha',\ \beta=-\beta'$

Una y otra suposicion, en virtud de (m) y (n), hace que sean idénticas las raices v y v' á las raices t y t'. Pero por medio de estas raices, la funcion (1) se escribe [§ 118, 5°]

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=\frac{a(x-t)(x-t')}{a'(x-v)(x-v')} \qquad (21)$$

Como t y t' no se distinguen de v y v', simplificando la última fraccion, no queda sino

$$y=\frac{a}{a'}$$

es decir la funcion no tiene sino un valor constante, cualquiera que sea el valor de x. Este es el caso V para raices reales é iguales, que solo da *un* valor de x y *supone este caso* que y de *ninguna manera* es una funcion de x, y no tiene de la última sino la apariencia esterior.

Observamos, sin embargo, que la espresion (18) puede reducirse á cero, sin que existe la condicion $A=(v-v)^2<0$, ó lo que es lo mismo, si $A\geqq 0$. A este fin se necesita y basta, que por lo ménos una de las raices t y t' sea igual á una de las otras v ó v'; y se ve que (21) se transforma en una ecuacion de primer grado que no tiene ni un máximo ni un mínimo. Pero puede suceder tambien que en (18) á un tiempo sean las dos raices t y t' iguales á las otras v y v'. Quítase luego en (21) la cantidad independiente x y no queda sino $y=\frac{a}{a'}$, como anteriormente. Síguese de esto que la funcion y nunca tiene un máximo ó mínimo si $B^2-4AC=0$.

3° Como las funciones fraccionarias, trataremos las funciones que tienen la forma

$$ax^2+a'y^2+bxy+cx+c'y+d=0 \qquad (22)$$

es decir funciones entre dos variables x é y que constituyen una ecuacion completa de segundo grado. Depende una variable de la otra, y siendo de segundo grado, podrán estar sujetas ambas á no pasar límites ciertos. En efecto, si ordenamos (22) segun x, se tiene

$$ax^2+(by+c)x+(a'y^2+c'y+d)=0$$

de donde $x=\dfrac{-(by+c)\pm\sqrt{(by+c)^2-4a(a'y^2+c'y+d)}}{2a}$ (23)

Está x espresado por y, y dícese una funcion de esta forma *irracional*, tiene pues la variable independiente debajo de un signo radical. De la misma manera puede y espresarse por x. Buscando el límite de una de estas cantidades, la ecuacion (22) ha de resolverse segun la otra, y síguese el cálculo de N° 1. Puede hallarse, por ejemplo, el valor máximo ó mínimo que tiene y, poniendo igual ó mayor de cero la cantidad subradical en (23).

§. 127.

Ejemplos de aplicacion.

Ejemplo I. Búscanse los valores que puede tener la funcion

$$y=\frac{2x^2}{4x^2-3} \qquad (1)$$

Resol. Tenemos

$$x=\pm\sqrt{\frac{3y}{4y-2}}=\pm\frac{\sqrt{3y(4y-2)}}{4y-2} \qquad (2)$$

Será x real, si $3y(4y-2)\geqq 0$. La igualdad da los valores estremos de y, y la desigualdad nos conduce á saber, si estos límites son máximos ó mínimos. Para que sea positivo el primer miembro, se necesita que sea á la vez $3y>0$, $4y-2>0$, de donde $y>0$, $y>\frac{1}{2}$, *luego* $y>\frac{1}{2}$; ó tambien que sea $3y<0$, $4y-2<0$, de donde $y<0$. $y<\frac{1}{2}$, *luego* $y<0$. Por consiguiente no admite la funcion valores contenidos entre 0 y $\frac{1}{2}$, pudiendo tomar todos los otros. Es $\frac{1}{2}$ un *mínimo* y cero un *máximo* relativo, aunque no lo sean absolutamente. Los valores correspondientes de x son 0, y $\pm\infty$, como se saca escribiendo en (2) los límites ya encontrados de y. Represéntase la funcion en la fig. 38.

Ejemplo II. Determinar los límites de

$$y=\frac{6x-x^2}{4x^2+3} \qquad (3)$$

Resol. Se deduce

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-3y(4y+1)}}{4y+1}\,;\quad -12y^2-3y+9>0 \qquad (4)$$

Descomponiendo la última raiz en factores, tiene que cumplirse la condicion $-12(y+1)(y-\frac{3}{4})>0$. A este fin los dos parénnesis deben tener signos desiguales, y se sacará que la funcion no es susceptible de otros valores sino los que están entre los límites -1 y $+\frac{3}{4}$; es -1 *un mínimo*, y $+\frac{3}{4}$ *un máximo absolutamente*. Los valores correspondientes de x para estos, son los mismos -1 y $+\frac{3}{4}$ como se sigue de la primera (4), en donde la cantidad radical es cero [fig. 39].

Ejemplo III. Búscanse los límites de

$$y=\frac{2x^2-3}{4x^2-6x} \tag{5}$$

Resol. Obsérvase siempre el mismo procedimiento. Para y resulta la condicion $9y^2-12y+6 \geqq 0$. ó bien descomponiendo en factores

$$9\left(y-\tfrac{2}{3}-\frac{\sqrt{-2}}{3}\right)\left(y-\tfrac{2}{3}+\frac{\sqrt{-2}}{3}\right)=9\left[(y-\tfrac{2}{3})^2+\tfrac{2}{9}\right]>0$$

y esto se verifica siempre. Luego no hay límites para y.

Ejemplo IV. ¿Tiene todo valor posible la fraccion

$$y=\frac{x}{x^2+ax+b}? \tag{6}$$

Resol. Tenemos

$$x=\frac{-(ay-1)\pm\sqrt{(ay-1)^2-4b^2y^2}}{2y};\quad (a^2-4b)\,y^2-2ay+1 \geqq \tag{7}$$

$$y=\frac{a\pm2\sqrt{b}}{a^2-4b}=\frac{1}{a\mp2\sqrt{b}} \tag{8}$$

Designando la primera raiz que es la mayor por y', y la segunda por y'', la condicion para y que tenemos en (7), se convierte en

$$(a^2-4b)\,(y-y')\,(y-y'') \geqq 0$$

Suponiendo que $a^2-4b>0$, se hallará que la funcion no tiene valores entre y' é y'', y que si $a^2-4b<0$, solo los tiene entre y' é y''. Supónese ademas que b es positivo. Los valores correspondientes de x son $\mp\sqrt{b}$.

Ejemplo V. Determinar los valores que puede tener

$$y=2x+\sqrt{4+2x} \tag{9}$$

Resol. Síguese que $(y-2x)^2=4+2x$, de donde

$$x=\tfrac{1}{4}\left\{2y+1\pm\sqrt{(2y+1)^2+4(4-y^2)}\right\} \tag{10}$$

Debiendo ser la cantidad subradical $\geqq 0$, se deduce $y \geqq -\frac{17}{4}$, luego será $-\frac{17}{4}$ *un mínimo* para $x = -\frac{15}{8}$. Tambien x tiene *su mínimo* $= -2$, para $y = -4$. Como se ve, el mínimo de y no corresponde al de x [fig. 40].

Ejemplo VI. Sean a, b, a', b' cantidades positivas, y se buscan los límites de

$$y = \frac{a+bx}{\sqrt{a'+b'x^2}} \qquad (11)$$

Resol. La variable x no tiene límite ninguno. Resulta de (11) que $y^2(a'+b'x^2) = (a+bx)^2$, de donde

$$x = \frac{ab \pm \sqrt{a^2b^2 + (b'y^2 - b^2)(a^2 - a'y^2)}}{b'y^2 - b^2} \qquad (12)$$

y debe ser $\qquad -a'b'y^4 + (a^2b' + a'b^2)\, y^2 \geqq 0$

ó bien $\qquad -a'b'y^2 \left[y^2 - \frac{a^2b' + a'b^2}{a'b'}\right] \geqq 0$

El primer factor $-a'b'y^2$ siempre es negativo, luego debe ser negativo tambien el segundo, ó bien

$$y^2 < \frac{a^2b' + a'b^2}{a'b'}$$

El segundo miembro es positivo, luego estará contenido y entre los límites reales

$$y = \pm\sqrt{\frac{a^2b' + a'b^2}{a'b'}} \quad \begin{cases} \text{Máximo,} \\ \text{Mínimo.} \end{cases}$$

Ejemplo VII. En un círculo quiere inscribirse un rectángulo cuya circunferencia sea *un máximo* [fig. 41).

Resol. El diámetro $AC = 2r$, es una diagonal del rectángulo, y llamando x ó y á los lados del último, se tiene $y = \sqrt{4r^2 - x^2}$. La circunferencia del rectángulo es

$$z = 2x + 2y = 2x + 2\sqrt{4r^2 - x^2}$$

de donde $\qquad (z - 2x) = 2\sqrt{4r^2 - x^2}$

$$x = \frac{z \pm \sqrt{z^2 + (32r^2 - 2z^2)}}{4}; \quad \text{luego} \quad z^2 \leqq 32r^2; \quad z \leqq 4r\sqrt{2}$$

y la última espresion da *un máximo* para z, es decir para la circunferencia del rectángulo. Pero para el máximo es $x=\frac{1}{4}z$, luego si el valor máximo de z se sustituye, se sigue $x=r\sqrt{2}$. Ademas es $z=2x+2y$ ó bien $y=\frac{1}{2}(z-2x)=r\sqrt{2}$, es decir tenemos $x=y$, y el rectángulo buscado es un cuadrado. No tiene este solamente la mayor circunferencia, sino tambien la mayor area de todos los que pueden inscribirse, lo que puede demostrarse fácilmente.

Ejemplo VIII. Descomponer un número N en dos factores, de manera que la suma de estos sea *un mínimo.*

Resol. Sea x uno de los factores, será $\frac{N}{x}$ el otro, y la suma de los mismos

$$z=x+\frac{N}{x}$$

Resuélvase la ecuacion segun x, y se tendrá $x^2-zx+N=0$, de donde

$$x=\tfrac{1}{2}\left\{z\pm\sqrt{z^2-4N}\right\} \quad \text{y debe ser} \quad z\geqq 2\sqrt{N}$$

Luego $z=2\sqrt{N}$ es *un mínimo.* Para este valor, se sigue $x=\frac{1}{2}z=\sqrt{N}$, y será el otro factor $\frac{N}{\sqrt{N}}=\sqrt{N}$; por consiguiente son iguales los factores que se buscan.

Demuéstrase fácilmente en general [cf. §125 Ejemp. III]: *Descomponiendo un número en factores iguales por muchos que sean, la suma de los mismos es un mínimo.*

Ejemplo IX. En una esfera ha de inscribirse un cilindro, cuya superficie total sea un máximo ó mínimo [fig. 42].

Resol. Designando por R el radio de la esfera, por r el del cilindro, por h la altura del último, sacamos que una de las bases del cilindro es $=r^2\pi$, y la superficie cilíndrica (curva) $=2r\pi.h$; luego la superficie total tiene la espresion

$$S=2r^2\pi+2r\pi h \tag{a}$$

Esta fórmula pertenece á cualquier cilindro circular recto. Ademas de esto, debiendo ser inscrito en la esfera dada, tenemos la segunda relacion $DF^2=DG^2+FG^2$, ó bien $R^2=r^2+\frac{h^2}{4}$, de donde

$$h=2\sqrt{R^2-r^2} \tag{b}$$

Póngase este valor en (a) y tendremos la superficie total

$$S=2r^2\pi+2r\pi.2\sqrt{R^2-r^2} \tag{c}$$

Sea por brevedad

$$\frac{S}{2\pi}=z \qquad (d)$$

y tendrá S un máximo ó mínimo, segun que lo tenga z. La ecuacion (c) ahora se escribe mas breve:

$$z=r^2+2r\sqrt{R^2-r^2} \qquad (e)$$

en donde r es una variable independiente. Podremos resolver la ecuacion segun r; tendremos

$$r^2=\tfrac{1}{5}\left\{z+2R^2\pm\sqrt{-4(z^2-R^2z-R^4)}\right\} \qquad (f)$$

Luego debe ser

$$z^2-R^2z-R^4\leqq 0 \qquad (g)$$

Las raices de esta ecuacion son

$$z=\frac{R^2}{2}(1\pm\sqrt{5}) \qquad (h)$$

La segunda es negativa y no puede ser límite de la cantidad positiva z; luego será un límite la primera. Búscase solamente, si es un máximo ó un mínimo. Para conseguir esto con toda certeza, designaremos la primera raiz con $+z'$, y la segunda con $-z''$, y la condicion (g) se convierte en

$$(z-z')\,(z+z'')\leqq 0$$

El primer miembro debe ser negativo. Pero z, en el problema no toma sino valores positivos, luego es positivo $z+z''$, y debe ser negativo $z-z'$, es decir que tenemos $z\leqq z'$ y será z' *un máximo*. Luego es

$$z=\frac{R^2}{2}(1+\sqrt{5}) \quad \text{un Máximo}$$

La superficie máxima del cilindro es segun (d)

$$S=2z\pi=R^2\pi\,(1+\sqrt{5}) \qquad (i)$$

El valor correspondiente de r se deduce de (f), escribiendo en lugar de z, el valor de su máximo

$$r^2=\tfrac{1}{5}(z+2R^2)=\tfrac{1}{5}\left[\frac{R^2}{2}(1+\sqrt{5})+2R^2\right]$$

$$\text{ó bien } r^2=\frac{R^2}{10}(5+\sqrt{5});\quad r=R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

Para la altura h del cilindro, sale de (b)

$$h=2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

ECUACIONES ESPONENCIALES.

§. 128.

Resolucion de las ecuaciones esponenciales.

Llámase una ecuacion *esponencial*, si tiene la incógnita por esponente de una potencia, ó por índice de una raiz ó tambien por parte de uno ó de otro. Pueden resolverse frecuentemente ecuaciones de esta especie por medio de los logaritmos, reduciéndolas à ecuaciones algébricas, que serán de primero, segundo ó mas alto grado. Añadiremos aquí las formas de las ecuaciones esponenciales que se presentan con mas frecuencia en el cálculo.

I. $a^{bx+c}=d$

Tomando los logaritmos resulta

$$(bx+c)\log a=\log d$$
$$xb\log a+c\log a=\log d$$
$$x=\frac{\log d-c\log a}{b\log a}$$

II. $\sqrt[bx+c]{a}=d$

Tómense los logaritmos y saldrá

$$\frac{\log a}{bx+c}=\log d$$

$$\log a=xb\log d+c\log d$$

$$x=\frac{\log a-c\log d}{b\log d}$$

III. $\sqrt[cx+d]{a}=b^{mx+n}$

Síguese por los logaritmos

$$\frac{\log a}{cx+d}=(mx+n)\log b$$

$$\frac{\log a}{\log b}=cmx^2+(dm+cn)\,x+dn$$

$$x^2+\frac{dm+cn}{cm}\,x=\frac{\log a-dn\log b}{cm\log b}$$

$$x=\frac{-(dm+cn)\pm\sqrt{(dm-cn)^2+4cm\log a:\log b}}{2cm}$$

IV. $a^{2x}+pa^x=q$

Sea $a^x=z$, luego $a^{2x}=z^2$, y será

$$z^2+pz=q$$

$$z=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

$$a^x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

$$x\log a=\log\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right)$$

$$x=\log\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right):\log a$$

V. $\sqrt[x]{a}+p\sqrt[2x]{a}=q$

Sea $\sqrt[2x]{a}=z$, luego $\sqrt[x]{a}=z^2$, y se tendrá

$$z^2+pz=q$$

$$z=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

$$\sqrt[2x]{a}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

$$\frac{\log a}{2x}=\log\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right)$$

$$x=\tfrac{1}{2}\log a:\log\left(-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}\right)$$

VI. $x^{a+\log x}=b$

Tomando los logaritmos, póngase $\log x=z$. Saldrá

$$(a+\log x)\log x=\log b$$

$$(a+z)\,z=\log b$$

$$z^2+az=\log b$$

$$z=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+\log b}$$

$$\log x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+\log b}$$

VII. 1) $a^x.b^y=p$
2) $c^x:d^y=q$

Tómense los logaritmos, y resultarán ecuaciones algébricas de primer grado con dos incógnitas, que pueden resolverse:

3) $x\log a+y\log b=\log p$
4) $x\log c-y\log d=\log q$

VIII. 1) $a^{x+2y}.b^x=c^y$
2) $d^{x-y}:e^y=f^{2x-y}$

Tómense los logaritmos, y saldrán ecuaciones resolubles:

3) $(x+2y)\log a+x\log b=y\log c$
4) $(x-y)\log d-y\log e=(2x-y)\log f$

CAPITULO V.

SERIES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS.

ARTICULO I.

Series.

§. 129.

Esplicaciones.

1º Llámase *serie* cualquier continuacion de términos que se derivan unos de otros segun una ley determinada. Es *finita* ó *infinita* una serie, segun que sea finito ó infinito el número de sus términos, y dícese *creciente* ó *decreciente* segun que vayan estos aumentando ó disminuyendo. El término que tiene el n^{simo} lugar, contando desde el principio de la serie, y que puede por lo tanto representar cualquier término, se llama *término general*. Los términos dependen del lugar que tienen, y por esto el término general será una funcion de n. Conocido el término general, conócese toda la serie; pues esta puede formarse, poniendo los números naturales en lugar de n, que está en el término general. Sea, por ejemplo, el término general de una serie $t = n(n+1)$, y será la serie

$$1.2,\ 2.3,\ 3.4,\ 4.5,\ 5.6 \ldots$$

La suma de todos los términos de una serie se dice *la suma de la serie* ó tambien el *término sumatorio*, aunque propiamente no sea un término de la misma serie.

El *índice* de un término es el número (entero) que indica el lugar que el término ocupa en la serie. Así t_3, t_4 designan los términos que tienen el 3º y 4º lugar en la serie; t_n designa el n^{simo} término, y S_n la suma de los primeros n términos.

2ª Las series mas sencillas son *las progresiones* y hay *progresiones aritméticas y geométricas simples.*

A) *Una progresion aritmética simple* es una serie, en donde se deriva cualquier término del precedente, *sumando con este un número constante.* Llámase este sumando constante *la diferencia* de la progresion. Así

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21 \ldots.$$

es una progresion aritmética con la diferencia 3. Se obtiene la diferencia, *restando* cualquier término del siguiente. Dada la diferencia y el primer término, se tiene toda la progresion aritmética. Sea por ejemplo 6 el primer término y 2 la diferencia y será la progresion

$$6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16 \ldots.$$

B) *Una progresion geométrica simple* es una serie, en donde se deriva cualquier término del precedente, *multiplicando con este un número constante.* Dícese este factor constante *cociente* de la progresion geométrica. Dado el primer término y el cociente, se tiene toda la serie:

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486 \ldots. \qquad (\alpha)$$

en donde el primer término es 2, y el cociente 3. Se obtiene el cociente, dividiendo cualquier término por el precedente. La progresion geométrica es creciente ó decreciente, segun que sea el cociente mayor ó menor que la unidad. La progresion (α) es creciente, pues el cociente 3 es >1; tendremos una progresion decreciente, si tomamos por cociente $\frac{1}{3}$ que es <1:

$$2,\ \tfrac{2}{3},\ \tfrac{2}{9},\ \tfrac{2}{27},\ \tfrac{2}{81},\ \tfrac{2}{243} \ldots.$$

3° Ademas, hay *series compuestas* y pueden ser estas de diferente especie; las mas simples son las siguientes:

A) *Progresiones aritméticas compuestas* son aquellas que tienen por términos los productos de los términos correspondientes de dos ó mas progresiones aritméticas simples. Así es aritmética compuesta la progresion:

$$2.5,\ 6.8,\ 10.11,\ 14.14,\ 18.17,\ 22.20 \ldots$$

pues consta de las dos progresiones

$$2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22 \ldots.$$
$$\text{y}\quad 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20 \ldots.$$

una de las cuales tiene la diferencia 4, y la otra la diferencia 3. Es aritmética compuesta tambien la serie:

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ 4^k,\ 5^k,\ 6^k \ldots.$$

si k es un número entero positivo; pues se obtiene, multiplicando consigo mismos, los términos de la progresion aritmética 1, 2, 3, 4, 5, 6......

B) *Progresiones aritmético-geométricas* son aquellas que tienen por términos los productos de los términos correspondientes de una progresion aritmética y otra geométrica Tal es la serie:

$$\tfrac{2}{3},\ \tfrac{4}{6},\ \tfrac{6}{12},\ \tfrac{8}{24},\ \tfrac{10}{48},\ \tfrac{12}{96},\ \tfrac{14}{192}\ldots.$$

que consta de las progresiones

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14....que es aritmética,

y de $\tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{6},\ \tfrac{1}{12},\ \tfrac{1}{24},\ \tfrac{1}{48},\ \tfrac{1}{96},\ \tfrac{1}{192}$..que es geométrica.

4° Dada una série, pueden formarse las diferencias entre los términos consecutivos, y de la nueva serie resultante podrá formarse del mismo modo otra serie de diferencias &a. Así, por ejemplo, restando siempre un término del siguiente y haciendo lo mismo con la serie que resulta &a, obtenemos;

2	8	21	43	76	122	183	(1)
6	13	22	33	46	61		
7	9	11	13	15			
2	2	2	2				

La primera serie se dice *serie principal*, las otras se llaman *series de diferencias*. En este ejemplo la tercera serie de diferencias tiene términos iguales, y llámase por esto la serie principal (1) *una serie aritmética superior de 3r. orden.*

En general: *llámanse series aritméticas superiores* aquellas que entre las series de sus diferencias finalmente tienen una con términos iguales. Es del órden m, si son iguales los términos de la $m^{\text{ésima}}$ serie de diferencias. La progresion aritmética simple es del 1.r órden.

Como pueden formarse series de diferencias, así lo pueden *de sumas*. Así

dada la serie	1,	2,	3,	4.	5,	6	
será	1,	3,	6,	10,	15,	21	la primera
....	1,	4,	10,	20,	35,	56	la segunda
	1,	5,	15,	35,	70,	126....	la tercera

série de sumas. Se obtienen, sumando cada vez el primer término, que siempre es el mismo, y despues el término ya formado, con el que se sigue en la serie anterior.

Es claro que puede formarse una infinidad de series diferentes, combinando una serie superior con otras, ó con progresiones geométricas.

§. 130

Progresiones aritméticas simples.

1º El término general de una progresion aritmética (simple) es

$$t=a+(n-1)d \qquad (1)$$

en donde t designa el término general, n su índice, a el primer término y d la diferencia.

Síguese esto inmediatamente de la formacion de la serie. Si a es el primer término y d la diferencia, la progresion debe ser la siguiente:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d, \dots a+(n-1)d$$

Tiene la diferencia por coeficiente, en cada término, el índice del término, disminuido de 1; luego será el n^{simo} término $=a+(n-1)d$.

2º La suma de una progresion aritmética simple es igual á la semisuma del primer término y del termino general, multiplicada por el índice de este:

$$s=n\frac{a+t}{2} \qquad (2)$$

En efecto, si t es el término general ó último, será el penúltimo $t-d$, el antepenúltimo $t-2d$ &a, y escribiendo la serie dos veces, la última vez en órden invertido, sumaremos:

$$\begin{array}{l}
s=a\quad+(a+d)+(a+2d)+\dots+(t-2d)+(t-d)+t\\
s=t\quad+(t-d)+(t-2d)+\dots+(a+2d)+(a+d)+a\\
\hline
2s=(a+t)+(a+t)+(a+t)+\dots+(a+t)+(a+t)+(a+t)
\end{array}$$

Viene $a+t$ tantas veces, cuantos términos hay en la serie; luego será $2s=n(a+t)$ ó bien $s=n\dfrac{a+t}{2}$.

En la fórmula (2) puede sustituirse el valor del término general que está en (1). Resulta otra fórmula de la suma:

$$s=\tfrac{1}{2}n[2a+(n-1)d] \qquad (3)$$

3º Las fórmulas (1) y (2) contienen 5 cantidades a, d, n, t, s, y dadas 3 de estas, pueden calcularse las otras dos. La tabla de la página 345 contiene todas las combinaciones entre las cantidades dadas y las que se buscan.

4º Síguese de (2) y (3) que

La suma de los n *primeros números naturales es* $s=\frac{1}{2}n(n+1)$

La suma de los n *primeros números pares es* $s=n(n+1)$

La suma de los n *primeros números impares es* $s=n^2$.

Fórmulas para las progresiones aritméticas.

Nº	datos	buscado	fórmulas.
1	a, d, n	t	$t = a + (n-1)\,d$
2	a, d, s		$t = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{[2ds + (a-\frac{1}{2}d)^2]}$
3	a, n, s		$t = \frac{2s}{n} - a$
4	d, n, s		$t = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$
5	a, d, n	s	$s = \frac{1}{2}\,n[2a + (n-1)\,d]$
6	a, d, t		$s = \frac{a+t}{2} + \frac{(t+a)\,(t-a)}{2d}$
7	a, n, t		$s = \frac{1}{2}n(a+t)$
8	d, n, t		$s = \frac{1}{2}\,n[2t-(n-1)d]$
9	a, n, t	d	$d = \frac{t-a}{n-1}$
10	a, n, s		$d = \frac{2s-2an}{n(n-1)}$
11	a, t, s		$d = \frac{(t+a)\,(t-a)}{2s-t-a}$
12	n, t, s		$d = \frac{2nt-2s}{n(n-1)}$
13	a, d, t	n	$n = 1 + \frac{t-a}{d}$
14	a, d, s		$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$
15	a, t, s		$n = \frac{2s}{a+t}$
16	d, t, s		$n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$
17	d, n, t	a	$a = t-(n-1)\,d$
18	d, n, s		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)\,d}{2}$
19	d, t, s		$a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{[(t+\frac{1}{2}d)^2 - 2ds]}$
20	n, t, s		$a = \frac{2s}{n} - t$

FÓRMULAS PARA LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS.

Nº	*datos*	*buscado*	*fórmulas.*
1	a, e, n	t	$t = a\,e^{n-1}$
2	a, e, s		$t = \frac{a+(e-1)s}{e}$
3	a, n, s		$\left((t:a)^{\frac{n}{n-1}} - 1\right) : \left((t:a)^{\frac{1}{n-1}} - 1\right) - \frac{s}{a} = 0$
4	e, n, s		$t = \frac{s(e-1)e^{n-1}}{e^n-1}$
5	a, e, n	s	$s = \frac{a\,(e^n-1)}{e-1}$
6	a, e, t		$s = \frac{e\,t-a}{e-1}$
7	a, n, t		$s = \left(t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}\right) : \left(t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}\right)$
8	e, n, t		$s = \frac{t(e^n-1)}{(e-1)e^{n-1}}$
9	e, n, t	a	$a = \frac{t}{e^{n-1}}$
10	e, n, s		$a = \frac{(e-1)s}{e^n-1}$
11	e, t, s		$a = e\,t-(e-1)s$
12	n, t, s		$\left((a:t)^{\frac{n}{n-1}} - 1\right) : \left((a:t)^{\frac{1}{n-1}} - 1\right) - \frac{s}{t} = 0$
13	a, n, t	e	$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$
14	a, n, s		$\frac{e^n-1}{e-1} - \frac{s}{a} = 0$
15	a, t, s		$e = \frac{s-a}{s-t}$
16	n, t, s		$\frac{e^n-1}{e-1} - \frac{s\,e^{n-1}}{t} = 0$
17	a, e, t	n	$n = \frac{\log t - \log a}{\log e} + 1$
18	a, e, s		$n = \frac{\log [a+(e-1)s] - \log a}{\log e}$
19	a, t, s		$n = \frac{\log t - \log a}{\log (s-a) - \log (s-t)} + 1$
20	e, t, s		$n = \frac{\log t - \log [e\,t-(e-1)\,s]}{\log e} + 1$

Ejemplo I. Búscanse el término general y la suma de la progresion

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13\ldots.$$

Resol. Tenemos $a=1,\ d=3$; luego

$$t=a+(n-1)\,d=1+(n-1).3=3n-2$$

$$s=n\,\frac{a+t}{2}=n\,\frac{1+3n-2}{2}=\frac{n(3n-1)}{2}$$

Así será el 100$^{\text{simo}}$ término $=298$, y la suma de los 100 primeros términos $=14950$.

Ejemplo II. Dada la suma $s=570$, el último término $t=73$ y la diferencia $d=5$ de una progresion aritmética, se busca la progresion misma y el número n de los términos que tiene.

Resol. Las dos ecuaciones fundamentales

$$1)\qquad t=a+(n-1)d$$

$$2)\qquad s=n\,\frac{a+t}{2}$$

nos suministran todo lo que se necesita para hallar las dos incógnitas a y n. Ordenamos 1) y 2) segun a y n, y tendremos

$$3)\qquad a+nd=t+d$$

$$4)\qquad an+nt=2s$$

Para eliminar á la incógnita a, multiplicaremos 3) por n y restando 4) resultará

$$\begin{array}{l} an+n^2d=nt+nd \\ an+n\,t=2s \\ \hline n^2d-nt=nt+nd-2s \\ n^2d-(2t+d)n+2s=0 \end{array}$$

de donde
$$n=\frac{2t+d}{2d}\pm\sqrt{\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2-\frac{2s}{d}}\qquad\text{(I)}$$

Ahora síguese por 3) que $a=(t+d)-nd$, luego

$$a=\tfrac{1}{2}d\mp\sqrt{[(t+\tfrac{1}{2}d)^2-2ds]}\qquad\text{(II)}$$

Esta es la resolucion general del problema. Sustituyendo los valores dados, se sigue

$$n=\frac{151}{10}\pm\frac{1}{10}=\begin{cases}15{,}2\\15\end{cases}\qquad a=\frac{5}{2}\mp\frac{1}{2}=\begin{cases}2\\3\end{cases}$$

El número n de los términos ha de ser entero, luego vale solamente el resultado $n=15$, $a=3$, y la progresion es

$$3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28\cdots$$

Ejemplo III. En una carrera se destinaron premios para los caballeros, de manera que el primero recibió 100 pesos, y cada uno de los otros 12 pesos ménos que el precedente, y recibieron todos la suma de 420 pesos. Búscase el número de los caballeros.

Resol. Los caballeros sean x. Recibiendo el primero 100 pesos, y cada uno de los siguientes 12 pesos ménos que el precedente, recibió el último de los caballeros $100-(x-1)\,12 =112-12x$ pesos, luego todos juntos [fórm. (2)]:

$$\frac{x\,[100+(112-12x)]}{2}=\frac{x(212-12x)}{2}$$

Pero sábese que todos recibieron 420 pesos; luego se tiene la ecuacion

$$\frac{x(212-12x)}{2}=420$$

$$x=\frac{53\pm17}{6}\begin{cases}11\frac{2}{3}\\ 6\end{cases}$$

El número de los caballeros ha de ser entero, luego será 6 el resultado.

§. 131.

Progresiones geométricas.

1° El término general de una progresion geométrica es

$$t=aq^{n-1} \qquad (4)$$

en donde a es el primer término y q el cociente de la progresion.

En efecto, si a es el primer término y q el cociente, será la progresion

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4\ldots aq^{n-1}$$

El esponente de q en cada término es igual al índice del término, disminuido de una unidad; luego será el esponente del n^{simo} término $=n-1$, y este término $=aq^{n-1}$.

2° La suma de una progresion geométrica es

$$s=\frac{tq-a}{q-1} \quad \text{ó tambien} \quad s=a\frac{q^n-1}{q-1} \qquad (5)$$

Tenemos
$$\begin{aligned} s &= a+aq+aq^2+aq^3+\dots+aq^{n-1} \\ sq &= \phantom{a+{}} aq+aq^2+aq^3+\dots+aq^{n-1}+aq^n \end{aligned}$$

luego sustrayendo,
$$sq-s=aq^n-a$$
$$s(q-1)=a(q^n-1)$$
$$s=a\frac{q^n-1}{q-1}$$

y esta es la última fórmula (5). Síguese la primera, efectuando la multiplicacion por a y poniendo $aq^n=aq^{n-1}q=tq$.

3° Si la progresion geométrica es infinita y decreciente, luego su cociente q un quebrado propio y $n=\infty$ se hará $q^n=q^\infty=0$. Por consiguiente será la suma de una progresion geométrica infinita y decreciente

$$s=\frac{a}{1-q} \qquad (6)$$

4° De (5) y (6), para $a=1$, y $q=x$, resultan las fórmulas

$$\frac{x^n-1}{x-1}=1+x+x^2+x^3+\dots+x^{n-1} \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots\text{infin.} \\ &\text{para } x=\text{ quebrado propio.} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Escríbase en (7) y (8) $\frac{a}{b}$ en lugar de x y se tendrá

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{b}{b-a}=1+\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^4}{b^4}+\dots\text{infinit.} \\ &\text{para } b>a \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

5° Por medio de las fórmulas (4) y (5) pueden resolverse todos los problemas sobre las progresiones geométricas; dadas tres de las cantidades a, q, n, t, s, siempre pueden hallarse las otras dos. Una tabla correspondiente se halla en la página 346, en donde c designa el cociente de la progresion.

§. 132.

Suma de la serie aritmético-geométrica.

Problema I Buscar la suma de la serie
$$1+2q+3q^2+4q^3+\dots+nq^{n-1}$$

Resol. Tenemos
$$\begin{aligned} s &= 1+2q+3q^2+4q^3+\dots+nq^{n-1} \\ sq &= \phantom{1+{}} q+2q^2+3q^3+\dots+(n-1)q^{n-1}+nq^n \end{aligned}$$

$$s-sq=(1+q+q^2+q^3+\dots+q^{n-1})-nq^n$$

luego
$$s(1-q)=\frac{q^n-1}{q-1}-nq^n$$

$$s=\frac{nq^n(q-1)-(q^n-1)}{(q-1)^2} \qquad (11)$$

Problema II. Buscar la suma de la serie

$$1+3q+5q^2+7q^3+9q^4+\ldots$$

Resol. Búsquese primeramente el término general de la serie. Los coeficientes 1, 3, 5, 7, 9.... forman una progresion aritmética con el primer término 1 y la diferencia 2. Luego para esta progresion será $t=1+(n-1).2=2n-1$, y tenemos

$$\begin{array}{l} s=1+3q+5q^2+7q^3+9q^4+\ldots+(2n-1)q^{n-1} \\ sq=\quad q+3q^2+5q^3+7q^4+\ldots+(2n-3)q^{n-1}+(2n-1)q^n \\ \hline s-sq=1+2q+2q^2+2q^3+2q^4+\ldots+2q^{n-1}-(2n-1)q^n \\ s-sq=1+2q(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-2})-(2n-1)q^n \end{array}$$

$$s(1-q)=1-(2n-1)q^n+2q.\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$$

$$s=\frac{(2n-1)q^n-1}{q-1}-2q\frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} \qquad (12)$$

Problema III. Buscar la suma de la serie

$$a_1+a_2q+a_3q^2+a_4q^3+\ldots+a_nq^{n-1}$$

en donde $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ forman una progresion aritmética con la diferencia *d*.

Resol. Tenemos

$$\begin{array}{l} s=a_1+a_2q+a_3q^2+a_4q^3+\ldots+a_nq^{n-1} \\ sq=\quad a_1q+a_2q^2+a_3q^3+\ldots+a_{n-1}q^{n-1}+a_nq^n \\ \hline s-sq=a_1+(a_2-a_1)q+(a_3-a_2)q^2+\ldots+(a_n-a_{n-1})q^{n-1}-a_nq^n \end{array}$$

Pero $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=\ldots=a_n-a_{n-1}=d$, luego se sigue

$$s(1-q)=a_1+dq(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-2})-a_nq^n$$

$$s(1-q)=a_1-a_nq^n+dq\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$$

$$s=\frac{a_nq^n-a_1}{q-1}-dq\frac{q^{n-1}-1}{(q-1)^2} \qquad (13)$$

en donde $a_n=a+(n-1)d$. Esta es la fórmula general para la suma de una progresion aritmético-geométrica, de la cual (11) y (12) no son sino casos particulares.

§ 133.

Suma de las potencias de los números naturales.

1º *La suma de las primeras potencias* de los números naturales se halla inmediatamente por el § 130. Designando á esta suma por Σn, se tiene

$$\Sigma n = 1+2+3+4+\ldots\ldots+(n-1)+n = \tfrac{1}{2}n(n+1) \qquad (14)$$

2º Para obtener *la suma de los cuadrados*, póngase

$$\begin{array}{l}
1^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\
2^3=(1+1)^3=1^3+3.1^2+3.1+1 \\
3^3=(2+1)^3=2^3+3.2^2+3.2+1 \\
4^3=(3+1)^3=3^3+3.3^2+3.3+1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n+1)^3 \quad =n^3+3.n^2+3.n+1
\end{array}$$

Súmense todas estas ecuaciones y quítense las series $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots.+n^3$ que vienen en cada miembro con signos iguales, y resultará

$$(n+1)^3=3(1^2+3^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+2+3+\ldots+n)+(n+1)$$

es decir tenemos

$$(n+1)^3=3\Sigma n^2+3\Sigma n+(n+1)$$

de donde
$$3\Sigma n^2=(n+1)^3-3\Sigma n-(n+1) \qquad (\alpha)$$

Conocemos el valor de Σn por (14), y sustituyendo este, tendremos

$$\Sigma n^2=1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \qquad (15)$$

3º *La suma de los cubos* se buscará de igual modo:

$$\begin{array}{l}
1^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \\
2^4=(1+1)^4=1^4+4.1^3+6.1^2+4.1+1 \\
3^4=(2+1)^4=2^4+4.2^3+6.2^2+4.2+1 \\
4^4=(3+1)^4=3^4+4.3^3+6.3^2+4.3+1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n+1)^4 \quad =n^4+4.n^3+6.n^2+4.n+1 \\
\hline
(n+1)^4=4\Sigma n^3+6\Sigma n^2+4\Sigma n+(n+1)
\end{array}$$

$$4\Sigma n^3=(n+1)^4-6\Sigma n^2-4\Sigma n-(n+1) \qquad (\beta)$$

Pueden sustituirse los valores de las sumas ya conocidas, y se tendrá

$$\Sigma n^3=1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+n^3=\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \qquad (16)$$

Esta suma, como se ve, es el cuadrado de Σn.

El mismo cálculo se sigue para determinar la suma de las 4^{as}, 5^{as}, 6^{as}....potencias; pero ofrece cada vez la reduccion final mayores dificultades. Mas pronto para estas sumas se hallarán espresiones de la forma (α) y (β), que bastan para el cálculo que ocurre comunmente.

Ejemplo I. Un número de balas de cañones está puesto por capas en forma de una pirámide cuadrada, de manera que cualquier lado de la capa inferior contenga n balas, y los de las capas que se siguen cada vez una bala ménos. ¿Cuántas balas contiene toda la pirámide?

Resol. El número de las balas, que contiene la capa mas baja es n^2, y esta espresion, á un tiempo, es la espresion general del número de las balas que contienen las capas consecutivas. Poniendo en la misma sucesivamente 1, 2, 3, 4....n en lugar de n y sumando, se tendrá la suma de todas las balas que se encuentran en la pirámide. Luego la suma buscada es

$$\Sigma=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Ejemplo II. Un número de balas está puesto por capas en forma de una pirámide triangular, de manera que cualquier lado de la capa mas baja contenga n balas y los de las capas que se siguen, cada vez una bala ménos. Búscase el número que tiene toda la pirámide.

Resol. La capa mas baja puede partirse en diferentes series paralelas de balas, y serán los números de balas que contienen 1, 2, 3, 4....n, de manera que la suma de todas las balas contenidas en la capa inferior sea la siguiente:

$$s=1+2+3+4+\ldots+n=\tfrac{1}{2}n(n+1)=\frac{n+n^2}{2}$$

Esta espresion, á la vez, es la espresion general para el número de balas que contienen las capas consecutivas. Póngase 1, 2, 3, 4....n en lugar de n y súmese todo, y será el número total que se busca

$$\Sigma=\frac{1+1^2}{2}+\frac{2+2^2}{2}+\frac{3+3^2}{2}+\frac{4+4^2}{2}+\ldots+\frac{n+n^2}{2}$$

$$=\frac{1+2+3+4+\ldots+n}{2}+\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots n^2}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2.2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$$

§. 134

Progresiones aritméticas oompuestas.

Problema I. Buscar la suma de la serio

$$3.5+5.8+7.11+9.14+\ldots\ldots\ldots \qquad (\alpha)$$

Resol. La progresion dada está compuesta de dcs progresiones simples

$$3,\ 5,\ \ 7,\ \ 9,\ldots\ldots(2n+1)$$
$$y \qquad 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ldots\ldots(3n+2)$$

Los términos generales de cada una se buscan por la fórmula (1) del § 130, y el producto de los mismos será el término general de la serie dada (α). Designándole por t_n, tenemos

$$t_n=(2n+1)\,(3n+2)=6n^2+7n+2$$

Escríbase 1, 2, 3, 4 .... n en lugar de n, y se tendrá

$$\begin{aligned}
t_1&=3.5\ =6.1^2+7.1+2\\
t_2&=5.8\ =6.2^2+7.2+2\\
t_3&=7.11=6.3^2+7.3+2\\
t_4&=9.14=6.4^2+7.4+2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
t_n&=\qquad\ =6n^2+7n+2
\end{aligned}$$

$$S=6(1^2+2^2+3^2+\ldots.n^2)+7(1+2+3+\ldots.n)+2n$$

$$S=n(n+1)(2n+1)+\tfrac{7}{2}n(n+1)+2n$$
$$S=\frac{n}{2}[4n^2+13n+13]$$

Problema II. Búscase la suma de la serie

$$1.2.3+4.5.6+7.8.9+10.11.12+\ldots\ldots$$

Resol. La serie está compuesta de las tres

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ldots\ldots\ldots\ldots(3n-2)$$
$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ldots\ldots\ldots\ldots(3n-1)$$
$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ldots\ldots\ldots\ldots3n$$

Luego el término general de la serie dada es

$$t_n=(3n-2)\,(3n-1)\,.3n=27n^3-27n^2+6n$$

y la suma de la serie será

$$S=27\Sigma n^3-27\Sigma n^2+6\Sigma n$$
$$S=\tfrac{3}{4}n(n+1)(9n^2-3n-2)$$

PROBLEMA III. Buscar la suma de

$$2.1^2+3.2^2+4.3^2+5.4^2+6.5^2+\ldots\ldots$$

RESOL. El término general de la serie es

$$t_n=(n+1)n^2=n^3+n^2$$

y por consiguiente la suma

$$S=\Sigma n^3+\Sigma n^2=\tfrac{1}{12}n(n+1)(3n^2+7n+2)$$

PROBLEMA IV. Unas balas de cañon están puestas en capas, las unas sobre las otras, de manera que la capa mas baja tenga la forma de un rectángulo que tiene m balas en el lado mas largo y n en el otro, y que las capas que se siguen arriba, tengan en cada uno de los lados cada vez una bala ménos. Búscase el número total de las balas.

RESOL. Los anchos de las capas, contándolos desde arriba hácia abajo, forman la progresion aritmética

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots\ldots(n-1),\ n \qquad (\alpha)$$

Los largos, contándolos desde abajo hácia arriba, forman la progresion aritmética

$$m,\ m-1,\ m-2,\ m-3,\ldots\ldots \qquad (\beta)$$

y teniendo esta n términos como (α), el último término será $m-n+1$, y el penúltimo $m-n+2$ &a. Escribiendo la última progresion en órden invertido, tendremos que los largos de las capas, desde arriba hácia abajo, forman la progresion aritmética

$$m-n+1,\ m-n+2,\ m-n+3,\ldots\ldots m-n+(n-1),\ m-n+n \qquad (\gamma)$$

El largo de cada capa multiplicado por su ancho, nos da el número de balas que contiene; luego, contando desde arriba hácia abajo, tendremos el número de las balas en las capas consecutivas, multiplicando unos con otros los términos consecutivos de las progresiones (α) y (γ), y designando estas sumas parciales por s_1, s_2, $s_3\ldots\ldots s_n$, resulta

$$s_1=1.(m-n+1)=1.(m-n)+1^2$$
$$s_2=2\ (m-n+2)=2\ (m-n)+2^2$$
$$s_3=3\ (m-n+3)=3\ (m-n)+3^2$$
$$s_4=4\ (m-n+4)=4\ (m-n)+4^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n=n(m-n+n)=n\ (m-n)+n^2$$

Súmense todas estas ecuaciones y resultará el número total de las balas que se busca:

$$S=(1+2+3+4+\dots n)(m-n)+(1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}n(n+1)(m-n)+\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ó bien
$$S=\tfrac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1)$$

§ 135.

Fórmulas generales de las diferencias.

1º Consideremos ahora una serie cualquiera de cantidades y las series de diferencias que pueden formarse de aquellas, segun el método indicado en el § 129, 4º, de manera que tengamos:

$$\begin{array}{lllllllllll}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 \dots\text{serie principal.}\\
& b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & \dots\dots 1^{as}\ \text{diferencias}\\
& & c_1 & & c_2 & & c_3 & & c_4 & & \dots\dots 2^{as}\quad ,,\\
& & & d_1 & & d_2 & & d_3 & & & \dots\dots 3^{as}\quad ,,\\
& & & & e_1 & & e_2 & & & & \dots\dots 4^{as}\quad ,,\\
\end{array}$$
. . . .

Cada uno de los términos en cualquier serie será igual á la diferencia de los dos que están encima á su derecha é izquierda en la serie precedente. Así será, por ejemplo, $b_5=a_6-a_5$ y por inversion: $a_6=a_5+b_5$.

2º Espresando los términos que tienen un índice mayor que 1, por los que tienen el índice precedente, y así en adelante, hasta que tengamos en el resultado solo términos con el índice 1, observaremos que

$$\begin{aligned}
a_1&=a_1\\
a_2&=a_1+b_1\\
a_3&=a_1+2b_1+c_1\\
a_4&=a_1+3b_1+3c_1+d_1\\
a_5&=a_1+4b_1+6c_1+4d_1+e_1\\
a_6&=a_1+5b_1+10c_1+10d_1+5e_1+f_1
\end{aligned}$$
. . . .

Se añade siempre un término mas, que es el primero de la serie de diferencias que se sigue, y en los coeficientes se observa la misma ley que teniamos en el desarrollo del binómio de Newton [§ 61 y § 62], con la sola diferencia de que el esponente de dicho binomio debe tener una unidad ménos que el índice de la cantidad *a* que está en el primer miembro de las igualdades anteriores. Luego aparece que debe ser en general:

$$a_n=a_1+\frac{n-1}{1}b_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}c_1+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}d_1+\dots\ (1)$$

fórmula que tendrá n términos, pues el $n+1^r$ término y todos los siguientes tienen el factor $n-n=0$.

Supongamos que esta fórmula (1) sea verdadera para el n^{simo} término, y demostraremos que lo debe ser tambien para el $n+1^r$ término. En efecto, tenemos $a_{n+1}=a_n+b_n$, y como a_n se espresa por la fórmula (1), así b_n se espresará por la ecuacion

$$b_n=b_1+\frac{n-1}{1}c_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}d_1+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}e_1+\ldots(\alpha)$$

porque la serie $b_1, b_2, b_3, b_4\ldots$ se forma de las series siguientes de la misma manera que la serie $a_1, a_2, a_3, a_4\ldots$ se forma de las que se siguen á esta. Sumaremos (α) con (1) y tendremos

$$a_{n+1}=a_n+b_n$$

$$=a_1+\frac{n-1}{1}b_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}c_1+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}d_1+\ldots$$

$$+\quad b_1+\quad\frac{n-1}{1}c_1+\quad\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}d_1+\ldots$$

$$=a_1+\frac{n}{1}b_1+\frac{n(n-1)}{1.2}c_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d_1+\ldots$$

Escribiendo en (1) $n+1$ en lugar de n, se deduce el mismo resultado. Luego si la fórmula (1) es verdadera para el n^{simo} término, lo será tambien para el $n+1^r$ término; ó bien si es verdadera para un término, cual fuere, lo será tambien para el término siguiente. Pero la fórmula (1) es verdadera para $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$, como se ve en los resultados ya encontrados anteriormente para $a_1, a_2, a_3\ldots a_6$; luego será verdadera tambien para a_7, luego tambien para a_8, a_9, &a, es decir para cualquier término, y representa (1) el término general de la serie.

3° Para hallar la suma de la serie principal, escribimos

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & S_1 & & S_2 & & S_3 & & S_4 & & S_5\ldots & S_{n-1} & S_n \\
& a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5\ldots & \ldots & & a_n \\
& & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & \ldots & \ldots & b_{n-1} & \\
& & & c_1 & & c_2 & & c_3 & & \ldots & c_{n-2} & &
\end{array}$$

en donde $S_1=a_1$; $S_2=S_1+a_2=a_1+a_2$; $S_3=S_2+a_3=a_1+a_2+a_3$ &a. y en general $S_n=S_{n-1}+a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ designa la suma de la serie principal. De esta manera, la serie $0, S_1, S_2, S_3\ldots$ puede considerarse como serie principal, y serán las otras las series consecutivas de las diferencias. Luego es aplicable la fórmula (1) para S_n, solo que debemos escribir $0, a_1, b_1, c_1\ldots$ en lugar de $a_1, b_1, c_1, d_1\ldots$ y ademas $n+1$ en lugar de

n, porque S_n es el $n+1^r$ término de la serie en que está. Será por consiguiente:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}b_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c_1 + \dots \qquad (2)$$

§. 136.

Series aritméticas superiores.

1º Se verifican las fórmulas (1) y (2) del § precedente cualesquiera que sean las cantidades $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ de la serie principal, aunque no observen ninguna ley determinada.

Ahora, si la serie principal *es aritmética* del órden m, serán iguales entre sí las diferencias del órden m, y cero todas las diferencias de los órdenes $m+1$, $m+2$, $m+3$ &a, en general, de todos los órdenes cuyos índices son mayores que m. De consiguiente, haciendo $=0$ aquellas diferencias que lo deben ser, se siguen estas fórmulas de las series aritméticas:

Series aritméticas de 1^r órden $(c_1 = d_1 = \dots = 0)$

$$a_n = a_1 + (n-1)b_1$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}b_1$$

Series aritméticas de 2^o órden $(d_1 = e_1 = \dots = 0)$

$$a_n = a_1 + \frac{n-1}{1}b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}c_1$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}b_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c_1$$

Series aritméticas de 3^r órden $(e_1 = f_1 = \dots = 0)$

$$a_n = a_1 + \frac{n-1}{1}b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}c_1 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}d_1$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}b_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c_1 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}d_1$$

Series aritméticas de m^{simo} órden.

$$a_n = a_1 + \frac{n-1}{1}b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}c_1 + \dots + \frac{(n-1)\dots(n-m)}{1.2.3\dots m}.m_1 \qquad (3)$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}b_1 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-m)}{1.2.3\dots m(m+1)}.m_1 \qquad (4)$$

y desígnase aquí por m_1 la constante diferencia del m^{simo} órden.

2º Efectuando las multiplicaciones indicadas en los numeradores de (3), se verá que a_n es un polinómio de m^{simo} grado de n, porque el último término tiene n otras tantas veces por factor. Luego, despues de reducir, el término general tendrá la forma

$$a_n = A_0 n^m + A_1 n^{m-1} + A_2 n^{m-2} + \ldots + A_{m-1} n + A_m \qquad (\beta)$$

y como $A_0, A_1, A_2 \ldots$ pueden ser cantidades cualesquiera, segun lo sean $a_1, b_1, c_1 \ldots$, deducimos el teorema siguiente:

A) *Cualquier polinómio de m^{simo} grado de una cantidad entera n puede considerarse como término general de una serie aritmética de m^{simo} órden.*

La m^{sima} potencia de n solo viene del último término de (3), y es su coeficiente $= \frac{1}{1.2.3\ldots m} . m_1$, el cual, por otro lado, ha de ser igual á su coeficiente A_0 que tiene en la ecuacion (β); luego será

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m} . m_1 = A_0 \text{ ó bien } m_1 = 1.2.3\ldots m . A_0 \qquad (5)$$

de donde se saca inmediatamente la diferencia constante de la serie aritmética que se produce por el polinómio mencionado de m^{simo} grado.

3º Si multiplicamos entre sí, término por término, m progresiones aritméticas simples, cuya cada una tiene un término general de la forma $a + (n-1)d$, tendremos por término general de la progresion compuesta resultante, un polinómio de m^{simo} grado de n. Luego:

B) *Una progresion compuesta de m factores es una serie aritmética superior de m^{simo}* grado.

Un caso particular es la serie

$$1^m, 2^m, 3^m, 4^m \ldots\ldots\ldots\ldots n^m$$

que resulta multiplicando m veces con sí misma la serie 1, 2, 3, 4... n. Luego será aritmética de m^{simo} órden. Como su término general es $a_n = n^m$, se sigue por (β) que $A_0 = 1$, y por consiguiente, en virtud de (5), es la diferencia constante $m_1 = 1.2.3.4\ldots m$.

§. 137.

Ejemplos de aplicacion.

Ejemplo I. Calcular una tabla de los cubos de los números naturales.

Resol. Estos cubos forman una serie aritmética de 3ʳ órden con la diferencia constante $m_1 = 1.2.3 = 6$. Luego, buscando las diferencias de los tres primeros cubos, todos los otros se hallarán por simple adicion:

1		8		27		64		125		216....
	7		19		37		61		91....	
		12		18		24		30....		
			6		6		6....			

De la misma manera se hallarán las 2as, 4as, 5as....potencias por simple adicion.

Ejemplo II. Calcular todos los valores que tiene la funcion $y=2x^3+3x^2-5x+1$ para valores enteros de x

Resol. Estos valores de y forman una serie aritmética de 3^r órden con la diferencia constante $m_1=1.2.3.2=12$. Por consiguiente, si buscamos los tres primeros valores de y que corresponden á $x=-1, 0, +1$, y si formamos las diferencias correspondientes, se hallarán los otros valores de y por simple adicion:

para $x=$	-1		0		$+1$		$+2$		$+3$		$+4$....	
es $y=$	7		1		1		19		67		157....	
		-6		0		18		48		90....		
			6		18		30		42....			
				12		12		12				

El mismo procedimiento se sigue aun en la construccion de las tablas de los logaritmos, de las funciones trigonométricas &a; obsérvase, pues, que las diferencias de todas estas funciones tienden cada vez mas á hacerse iguales, á medida que crece el índice de su órden.

Ejemplo III. Buscar la suma de la serie infinita

$$1+3x+8x^2+16x^3+\ldots\ldots$$

en donde los coeficientes forman una serie aritmética de 2^r órden con la diferencia constante 3.

Resol. Tenemos

$$\begin{aligned} s &= 1+3x+8x^2+16x^3+\ldots\\ sx &= \phantom{1+{}}x+3x^2+8x^3+\ldots\\ \hline s(1-x) &= 1+2x+5x^2+8x^3+\ldots\\ sx(1-x) &= \phantom{1+{}}x+2x^2+5x^3+\ldots\\ \hline s(1-x)^2 &= 1+x+3x^2+3x^3+\ldots\\ &= 1+x+3x^2(1+x+x^2+x^3+\ldots)\\ &= 1+x+3x^2\cdot\frac{1}{1-x};\ \text{por consiguiente} \end{aligned}$$

$$y=\frac{1+x}{(1-x)^2}+\frac{3x^2}{(1-x)^3}=\frac{1+2x^2}{(1-x)^3}$$

§. 138.

Números figurados.

1° Llámanse *números figurados* los términos de las series de sumas, cuya serie principal es 1, 1, 1, 1...., y son los siguientes:

	1	1	1	1	1	1....
1r órden	1	2	3	4	5	6....
2° órden	1	3	6	10	15	21....
3r órden	1	4	10	20	35	56....
4° órden	1	5	15	35	70	126....
5° órden	1	6	21	56	126	252....
......						

(a)

Cualquier número de cualquier órden es la suma de todos los números del órden que precede, hasta el mismo lugar que ocupa; luego el término general de cualquier órden es á la vez el término sumatorio del órden precedente. Ademas se ve que los números del 1r, 2°, 3r, 4°....órden son los mismos que los de la 2a, 3a, 4a, 5a....columna y que los que están en las hipotenusas consecutivas, son los coeficientes binomiales.

2° Los mismos números figurados pueden escribirse en órden invertido de esta manera:

....

0 0 0 0 1 5 15 35 70....4° órden
0 0 0 1 4 10 20 35......3r „
0 0 1 3 6 10 15 ....2° „
0 1 2 3 4 5 ....1r „
1 1 1 1 1 ....

de suerte que cada serie sea una serie aritmética del mismo órden con la diferencia constante 1, y contenga tantos ceros delante de los números significativos, cuantas unidades tiene el índice de su órden

Luego podremos aplicar la fórmula (3) del § 136

$$a_n = a_1 + \frac{n-1}{1} b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} c_1 + \ldots + \frac{(n-1)\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots m} . m_1$$

escribiendo $n+m$ en lugar de m y poniendo $a_1=b_1=c_1=d_1=\ldots=0$, de manera que la fórmula no retenga sino el último término con m_1, cuya cantidad es $=1$. Por consiguiente será

$$a_n = \frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+1)n}{1.2.3\ldots m}$$

ó bien, cuando escribimos el numerador en órden invertido,

$$a_n = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots\ldots m} \qquad (6)$$

Para $m=1, 2, 3, 4\ldots\ldots$ se sacan las fórmulas particulares:

1r órden, $a_n = \frac{n}{1}$

2º órden, $a_n = \frac{n(n+1)}{1.2}$

3r órden, $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$

4º órden, $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$

&a. &a.

3º Sea ahora la serie principal $\delta, \delta, \delta, \delta\ldots\ldots$, y serán las series de sumas para el primer término 1:

		δ	δ	δ	$\delta\ldots\ldots$
1r órden	1	$1+\delta$	$1+2\delta$	$1+3\delta$	$1+4\delta\ldots\ldots$
2º órden	1	$2+\delta$	$3+3\delta$	$4+6\delta$	$5+10\delta\ldots\ldots$
3r órden	1	$3+\delta$	$6+4\delta$	$10+10\delta$	$15+20\delta\ldots\ldots$
4º órden	1	$4+\delta$	$10+5\delta$	$20+15\delta$	$35+35\delta\ldots\ldots$
....	....	....	....	....	....

(b)

Cada uno de estos números tiene la forma $A+B.\delta$, y es A el número figurado que en la tabla (a) tiene el mismo lugar en el órden precedente, luego escribiendo en (6) $m-1$ en lugar de m, tendremos:

$$A = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)}$$

Ademas, B es el número figurado que en la tabla (a) ocupa el mismo órden, pero el lugar precedente, de manera que escribiendo $n-1$ en lugar de n, la fórmula (6) nos suministro

$$B = \frac{(n-1)n(n+1)\ldots\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)m}$$

Si llamamos T_n al término general del $m^{\text{ésimo}}$ órden, se sacá

$$T_n = A + B\,\delta = \frac{(n-1)n(n+1)\ldots\ldots(n+m-2)}{1.2.3\ldots\ldots m}\left[\frac{m}{n-1} + \delta\right] \qquad (7)$$

Los números de 2º órden

$$1;\ 2+\delta;\ 3+3\delta;\ 4+6\delta;\ 5+10\delta;\ldots\ldots$$

que tienen la forma general

$$T_n = n + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta \qquad (8)$$

se dicen *números poligonales* y son los siguientes:

para $\delta=1$	1	3	6	10	15....	núm. triangulares
$\delta=2$	1	4	9	16	25....	núm. cuadrados
$\delta=3$	1	5	12	22	35....	núm. pentagonales
$\delta=4$	1	6	15	28	45....	núm. hexagonales.

....

Los números de 3ʳ órden

$$1;\ 3+\delta;\ 6+4\delta;\ 10+10\delta;\ 15+20\delta;\ldots.$$

que tienen la forma general

$$T_n=\frac{(n+1)n}{1.2}+\frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1.2.3}\,\delta \qquad (9)$$

se llaman *números piramidales* y son estos

para $\delta=1$	1	4	10	20	35....	de 3 lados
$\delta=2$	1	5	14	30	55....	de 4 ,,
$\delta=3$	1	6	18	40	75....	de 5 ,,
$\delta=4$	1	7	22	50	95....	de 6 ,,

....

El número de las balas de cañon que forman una pirámide regular de 3 ó 4 lados, siempre és el número piramidal correspondiente, miéntras que el número de las balas que las capas contienen, es un número triangular ó cuadrado.

ARTICULO II.

Cálculo del interes compuesto.

§. 139.

Ecuacion general del interes compuesto

1° *Interes compuesto es el interes producido por el capital y sus intereses simples, cuando estos se añaden al capital para producir nuevos intereses.*

Problema I. Dado el *capital inicial* C, hallar el *capital final* K, en que se convierte á interes compuesto dentro de n años, si p es el tanto ó el interes simple que producen 100 en un año.

Resol. 100 pesos en 1 año dan p pesos por intereses, luego 1 peso en 1 año dará $\frac{p}{100}$ pesos por intereses, y 1 peso, por lo tanto, en 1 año se convertirá en $1+\frac{p}{100}$ pesos. Sea por brevedad

$$q=1+\frac{p}{100} \qquad (\text{a})$$

y si 1 peso en 1 año se convierte en q pesos,
C pesos en 1 año se convertirán en Cq pesos
C. . . . . .2 años. . . . . en $Cq.q=Cq^2$ pesos
C. . . . . . . .3. . . . . en $Cq^2.q=Cq^3$. . . .
C. . . . . . . .4. . . . . en $Cq^3.q=Cq^4$. . .
. . . .
C. . . . . . . .n. . . . . Cq^n

De donde resulta que el capital final que se busca es:

$$K=Cq^n \qquad (I)$$

Dícese q el cociente de aumento ó de interes.

Esta ecuacion fundamental se aplica tambien para hallar cualquiera de las cuatro cantidades C, q, n, K, si están dadas las otras tres. Así tenemos en general:

$$\left.\begin{array}{l} K=Cq^n;\ C=\dfrac{K}{q^n};\ q=\sqrt[n]{K:C} \\ n=\dfrac{\log K-\log C}{\log q} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Nota. En el caso de ser los intereses semestres, semisemestres, mensuales, se escribe $1+\frac{p}{200}$, $1+\frac{p}{400}$, $1+\frac{p}{1200}$ en lugar de $1+\frac{p}{100}$ y 2n, 4n, 12n en lugar de n.

Ejemplo I. Se han impuesto 18300 pesos á interes compuesto; ¿qué suma debe recibirse al cabo de 8 años por capital é intereses, si 5 es el tanto por 100?

Resol. Por la primera ecuacion (1) tenemos

$$\log K=\log C+n\log q$$

en donde $C=18300$, $n=8$, $q=1+\frac{5}{100}=1{,}05$. Luego será

$$\log K=\left\{\begin{array}{ll}\log\ 18300 & =4{,}26245\\ 8\log\ 1{,}05 & =0{,}16952\end{array}\right.$$
$$=4{,}43197$$
$$K=27037{,}5 \text{ pesos.}$$

Ejemplo II. ¿Qué capital se necesita imponer á interes compuesto para recibir al cabo de 12 años 8000 pesos por capital é intereses, siendo 4,5 el tanto por 100?

RESOL. Valiéndonos de la segunda ecuacion (1), deducimos

$$\log C = \log K - n \log q$$

en donde $K=8000$, $n=12$, $q=1{,}045$, de manera que

$$\log C = \begin{cases} \log 8000 = 3{,}90309 \\ 12 \log 1{,}045 = 0{,}22944 \end{cases}$$

$$= 3{,}67365$$

$$C = 4716{,}8 \text{ pesos.}$$

EJEMPLO III. 1000 pesos se han convertido, á interes compuesto, en 25 años, en 3386 pesos. ¿Cuál ha sido el tanto por 100?

RESOL. Búscase el cociente del interes q que nos conduce á conocer el tanto p por la ecuacion $q=1+\frac{p}{100}$. Haciendo uso de la tercera ecuacion (1), se tiene

$$\log q = \frac{1}{n} (\log K - \log C)$$

en donde $K=3386$, $C=1000$, $n=25$, luego será

$$\log q = \begin{cases} \log 3386 = 3{,}52969 \\ \log 1000 = 3 \end{cases}$$

$$= 0{,}52969 : 25$$

$$= 0{,}0211876$$

$$q = 1{,}05$$

De consiguiente es $1+\frac{p}{100}=1{,}05$, luego $\frac{p}{100}=0{,}05$ y $p=5$.

EJEMPLO IV. ¿En cuántos años un capital de 2300 pesos se aumenta á 3746,55 pesos, siendo 5 el tanto?

RESOL. Sácase por la última ecuacion (1) el resultado $n=10$.

§. 140

Valor final de un capital impuesto al principio de cada año.

PROBLEMA II. *Hallar el capital A en que se convierte un capital C, impuesto al principio de cada año, por espacio de n años, siendo p el tanto por* 100.

RESOL. Se imponen n diferentes capitales, cada uno de los cuales es $=C$, por los tiempos respectivos

$$n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots 3,\ 2,\ 1 \quad \text{año,}$$

luego serán los valores que tienen al cabo de los n años, los siguientes

$$Cq^n,\ Cq^{n-1},\ Cq^{n-2}, \ldots Cq^3,\ Cq^2,\ Cq$$

cuya suma es el capital A que se busca:

$$A = Cq + Cq^2 + Cq^3 + \ldots + Cq^n$$

y como el segundo miembro es una progresion geométrica, se tiene por el § 131

$$A = Cq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \tag{II}$$

La misma ecuacion puede emplearse para hallar C ó n, si están dadas las otras cantidades, de manera que tengamos en general

$$A = Cq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1};\quad C = \frac{A(q-1)}{q(q^n - 1)};\quad q^n - 1 = \frac{A(q-1)}{Cq} \tag{2}$$

Ejemplo I. Al principio de cada año se impone un capital de 4080 pesos á interes compuesto ¿Qué suma puede recibirse al cabo de 10 años, siendo 4 el tanto por 100?

Resol. Tenemos $C = 4080$, $n = 10$, $q = 1{,}04$. Ademas, para calcular el valor de $q^n - 1$, tenemos $\log q^n = n \log q = 10 \log 1{,}04 = 0{,}1703 = \log 1{,}48013$, de donde $q^n = 1{,}48013$, luego $q^n - 1 = 0{,}48013$. Finalmente es $q - 1 = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$, y sustituyendo estos valores en la primera ecuacion (2), deducimos:

$$A = Cq \frac{q^n - 1}{q - 1} = 4080 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{0{,}48013}{0{,}04}$$

ó bien $\quad A = 102000 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}48013 = 50932{,}2$ pesos.

Ejemplo II. Un capital de 100 pesos prestado por una serie de años, al principio de cada uno de estos, se ha aumentado á 1671,35 pesos, siendo 5 el tanto. BúsCase el número de los años.

Resol. Está dado $A = 1671{,}35$, $C = 100$, $q = 1{,}05$, $q - 1 = 0{,}05$, luego por la última fórmula (2) se tiene

$$1{,}05^n - 1 = \frac{1671{,}32 \cdot 0{,}05}{100 \cdot 1{,}05} = 0{,}79588$$

$$1{,}05^n = 1{,}79588$$

$$n = \frac{\log 1{,}79588}{\log 1{,}05} = \frac{0.25428}{0{,}02119} = 12$$

Ejemplo III. Un capital de C pesos se ha impuesto por n años á interes compuesto, siendo p el tanto, y al cabo de cada año el capital se aumenta (ó disminuye) de C′ pesos. ¿Cuál será la suma que puede recibirse al fin de los n años?

Resol. El capital C impuesto al principio del primer año equivale á Cq^n pesos al cabo de los n años.

El capital C′ que se añade (ó resta) al fin de cada año, produce intereses por años

$$n-1,\ n-2,\ n-3, \ldots .2,\ 1,\ 0$$

luego tiene los valores finales

$$C'q^{n-1},\ C'q^{n-2},\ C'q^{n-3} \ldots . C'q^2,\ C'q,\ C'$$

cuya suma es

$$A' = C' + C'q + C'q^2 + \ldots . + C'q^{n-2} + C'q^{n-1} = C' . \frac{q^n-1}{q-1}$$

la cual ha de sumarse (ó restarse) con Cq^n que produce el capital C por sí mismo. Luego designando el valor total por A, tenemos

$$A = Cq^n \pm C' . \frac{q^n-1}{q-1} \qquad \text{(III)}$$

ecuacion que sirve tambien para calcular los valores de C, C′ y n:

$$\left.\begin{array}{l} C = \dfrac{A(q-1) \mp C'(q^n-1)}{q^n(q-1)}\ ;\quad C' = \dfrac{(A-Cq^n)(q-1)}{q^n-1} \\ n = \dfrac{\log\left[A(q-1)+C'\right] - \log\left[C(q-1) \pm C'\right]}{\log q} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

§. 141.

Cálculo de rentas.

Problema III. Hallar el capital C que se ha de imponer á interes compuesto, para recibir al fin de cada año una renta R, de modo que en n años se haya percibido el capital primitivo y los intereses devengados.

Resol. Resuélvese este problema de la misma manera que el ejemplo III del § precedente, solo que la cantidad A es igual á cero, porque el valor final del capital C que se busca, ha de ser igual al valor que al cabo de los n años tienen los capitales anuales C′=R percibidos. De consiguiente, si en (III) escribimos R en lugar de C′, cero en lugar de A, y tomamos el signo negativo, tendremos por resultado *la ecuacion fundamental de rentas:*

$$Cq^n - R . \frac{q^n-1}{q-1} = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Despejando C ó R ó n, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} C=R.\dfrac{q^n-1}{q^n(q-1)};\quad R=C.\dfrac{q^n(q-1)}{q^n-1} \\ n=\dfrac{\log R-\log\left[R-C\,(q-1)\right]}{\log q} \end{array}\right\}\quad (4)$$

Ejemplo I. Qué capital se necesita imponer á interes compuesto para que recibiendo 1800 pesos anuales, se perciba en 16 años capital y réditos, siendo 6,5 el tanto por 100?

Resol. Este problema se resuelve por la primera ecuacion (4), y es

$$R=1800;\quad n=16;\quad q=1,065;\quad q^n=2,73906$$

$$C=1800.\frac{1,73906}{2,73906\,.\,0,065}$$

$$\begin{array}{rl} \log 1800 & =3.25527 \\ \log 1,73906 & =0,24032 \\ \hline & 3,49559 \\ & 1,25051-2 \\ \hline \end{array}\qquad \begin{array}{rl} \log 2,73906 & =0,43760 \\ \log 0,065 & =0,81291-2 \\ \hline & 1,25051-2 \end{array}$$

$$\log C=4,24508\qquad\qquad C=17582,4 \text{ pesos.}$$

Ejemplo II. Un comerciante tomó 64800 pesos á interés compuesto: satisface por ellos anualmente 8500 pesos. ¿En cuántos años estinguirá la deuda, siendo 4 el tanto por 100?

Resol. Valiéndonos de la tercera fórmula (4), tenemos

$$R=8500;\quad C=64800;\quad q=1,04;\quad q-1=0,04$$

$$n=\frac{\log 8500-\log\left[8500-64800\,.\,0,04\right]}{\log 1,04}$$

$$=\frac{\log 8500-\log 5908}{\log 1,04}=\frac{0.15798}{0,01703}=9,27 \text{ aprox.}$$

Ejemplo III. Un hombre impone por el espacio de m años, al principio de cada uno, C pesos á interes compuesto para disfrutar, por los n años siguientes, una pension de R pesos al cabo de cada año, siendo p el tanto por 100 convenido. Búscase la relacion que hay entre estas cantidades.

Resol. C pesos impuestos por m años, al principio de cada uno, segun la fórmula (II), equivalen á

$$Cq.\frac{q^m-1}{q-1}\ \text{pesos}$$

al cabo de los m años. Ademas, en virtud de la primera fórmula (4), una renta R que se percibe por el espacio de n años, al cabo de cada uno, equivale á un capital de

$$R.\frac{q^n-1}{q^n(q-1)} \text{ pesos}$$

al principio de este tiempo. Debiendo ser iguales estas dos cantidades, se sigue

$$Cq.\frac{q^m-1}{q-1}=R.\frac{q^n-1}{q^n(q-1)} \qquad (V)$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} C&=R.\frac{q^n-1}{q^{n+1}(q^m-1)}\ ;\ R=C.\frac{q^{n+1}(q^m-1)}{q^n-1}\\ q^m-1&=\frac{R}{C}.\frac{q^n-1}{q^{n+1}}\ ;\ 1-\frac{1}{q^n}=\frac{C}{R}.q(q^m-1)\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Las últimas dos ecuaciones conducen á conocer las cantidades m y n.

Ejemplo IV. Una renta anual crece en progresion aritmética, de manera que á los cabos de n años consecutivos se perciban las sumas R, 2R, 3R, 4R....nR. Búscase el valor de la renta que tiene al principio del 1r año.

Resol. Si los valores de las rentas consecutivas, que tienen al principio del 1r año, se designan por C_1, C_2, C_3....C_n, tendremos

$C_1=qR$; $C_2.q^2=2R$; $C_3.q^3=3R$....$C_n.q^n=nR$, de donde

$$C_1=\frac{R}{q}\ ;\ C_2=\frac{2R}{q^2};\ C_3=\frac{3R}{q^3};\ldots.C_n=\frac{nR}{q^n}$$

La suma es el valor V que se busca

$$V=\frac{R}{q}+\frac{2R}{q^2}+\frac{3R}{q^3}+\ldots.+\frac{nR}{q^n}$$

$$V=\frac{R}{q}\left(1+\frac{2}{q}+\frac{3}{q^2}+\frac{4}{q^3}+\ldots.+\frac{n}{q^{n-1}}\right)$$

ecuacion que se resuelve segun el Ejemplo I del § 132 y dá por resultado

$$V=\frac{R[q(q^n-1)-n(q-1)]}{q^n(q-1)^2} \qquad VI$$

CAPITULO VI.

SINTÁXIS ALGÉBRICA.

§. 142.

De la sintáxis algébrica en general.

1. Con el nombre de *sintáxis*, en el álgebra, se entiende su parte que trata de las colocaciones ó composiciones diferentes de objetos, efectuándolas segun una ley fija y determinada.

Dados, por ejemplo, tres objetos diferentes, que designamos por a, b, c, podremos componerlos de diferentes maneras:

ab, ba, ac, bc. . . .de dos en dos,
abc, acb, bac, bca, cab. . . .de tres en tres.

Los objetos dados para formar colocaciones diferentes, se llaman *elementos* y desígnanse ordinariamente por letras ó cifras. Un paréntesis, que contiene los elementos dados, puestos segun el órden del alfabeto, ó segun la posicion natural de los números, se llama *índice*, como

(abcde); (1234); (eioprt)

el primero de los cuales indica, por ejemplo, que a, b, c, d, e han de colocarse de diferentes maneras.

El nombre "*sintáxis*" viene de σύνταξις, palabra derivada de συντάσσω lo que quiere decir *ordenar* unos objetos con otros.

No se considera en los elementos *el valor* de los números ó letras, sino únicamente *la posicion* de los mismos ó el lugar que ocupan. Sin embargo, dícese un elemento *mas alto* que otro, si en el índice está mas á la derecha. Así, dado el índice (abcd), será *b* mas alto que *a*, y *d* mas alto que *a*, *b* y *c*.

2. Cada composicion verificada por medio de los elementos dados, toma el nombre de *grupo* ó *colocacion*. Como los elementos, así tambien las colocaciones, se distinguen en *inferiores* y *superiores*: es superior una colocacion respecto de otra, si contiene un elemento superior mas á la izquierda. Así la colocacion abdc es mas alta que la colocacion abcd, pues el elemento superior *d* está mas á la izquierda.

Dícense *bien ordenadas* colocaciones diferentes, si ninguna de estas va precedida de otra mas alta. Tales son las colocaciones

abc, acb, bac, bca, cab, cba

3. Ademas de esto, las diferentes colocaciones se distribuyen en *clases* y *órdenes*.

Conócese *la clase* de colocacion por el *número* de elementos que contiene: colocaciones que contienen 1, 2, 3, 4.... elementos son de la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª.... clase.

Conócese *el órden* de colocacion por *la letra ó elemento inicial*: colocaciones que tienen un *mismo* elemento inicial, pertenecen al mismo órden y es un órden el 1ro, 2o, 3ro, 4o...., si el elemento inicial es el 1ro, 2o, 3ro, 4o....(diferente) del índice. Así, las colocaciones del índice (abcde)

ab, ac, ad, ae	pertenecen al órden	$a=1^r$	órden
bc, bd, be	„	$b=2^o$	„
cd, ce	„	$c=3^r$	„
de	„	$d=4^o$	„

y son todas de la 2ª clase, miéntras que la colocacion *abc* és una de la 3ª y *dcba* una de la 4ª clase.

4. Al formar diversas colocaciones se distinguen tres casos:

I. Las colocaciones diferentes tienen que distinguirse unas de otras solo por la *posicion* de los elementos, quedando siempre los mismos, *tanto* el número, *como* los elementos empleados. Dícense *permutaciones* las colocaciones de esta especie.

II. Las colocaciones han de ser diferentes solo por *el número* y *la diversidad* de los elementos y no se atiende á la posicion de estos. Desígnanse por el nombre de *combinaciones*.

III. Las colocaciones deben distinguirse por *el número, la diversidad y la posicion* de los elementos, y dícense en este caso, *variaciones*.

Con esto, la sintáxis contiene tres partes que tratan:

I) *de las permutaciones,* II) *de las combinaciones y* III) *de las variaciones.*

ARTICULO I.

Permutaciones.

§. 143.

De las permutaciones en general.

1. *Permutar* elementos dados, es efectuar todas las posiciones posibles, de modo que cada una de las colocaciones formadas contenga todos los elementos dados y cada uno, una vez.

Toda colocacion así obtenida, se llama una *permutacion.* Son permutaciones del índice (abc):

abc, acb, bac, bca, cab, cba

Solo se distinguen por la posicion de los elementos.

El índice puede contener elementos, ó todos diferentes unos de otros, ó tambien algunos iguales. Segun esto se distinguen: *permutaciones sin repeticion*, si todos los elementos dados son desiguales, y *permutaciones con repeticion*, si entre los elementos hay idénticos. Así, son permutaciones

sin repeticion 123, 132, 213, 231. . .del índice (123)
con repeticion 1134, 1143, 1314. . . .del índice (1134).

2. La sintáxis algébrica, pues, tiene por objeto:

1) Determinar *una ley* cierta y fija, por medio de la cual se verifican todas las permutaciones posibles.

2) Determinar *el número de permutacion* que es el de todas las permutaciones que pueden efectuarse con los elementos dados.

3) Determinar *el lugar* que ocupa una permutacion dada entre las otras efectuadas con los mismos elementos.

4) Determinar *la permutacion*, dado el lugar que tiene entre las otras.

§ 144.

Ley de permutacion.

Para efectuar y al mismo tiempo para tener bien ordenadas todas las permutaciones que pueden verificarse con los elementos de un índice dado, se observará este procedimiento:

Yendo de la derecha á la izquierda, en cualquiera permutacion ya formada, se buscará el primer elemento que sea inferior y seguido de otro mas alto, y no mudando el órden de los elementos que están á su izquierda, póngase en su lugar el elemento superior inmediato que está entre los de la derecha, escribiendo despues de él todos los no aun escritos, en la posicion natural.

Se empieza con la permutacion que contiene el índice mismo y es la primera, y empleando siempre el procedimiento mencionado se llegará á encontrar una permutacion en que no pueda mas emplearse, y esta será la última, la mas alta de todas é inversion de la primera.

Así, por ejemplo, el índice (abcd) da las permutaciones:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

Se comprende fácilmente, que por este método salen todas las permutaciones posibles y estas bien ordenadas. Ademas de esto, lo que pertenece á las permutaciones verificadas arriba,

1) No son posibles mas de 4 órdenes que principian con las letras a, b. c, d, los cuales están en las 4 columnas ordenados segun estas mismas letras iniciales.

2) Cada uno de estos órdenes ha de contener todas las permutaciones que pueden efectuarse en este mismo órden, lo que se verificará, por ejemplo, con el primer órden que tiene la inicial a, si á esta, una despues de otra, se añaden todas las permutaciones del índice (bcd), á saber de las otras letras. Y en efecto, la primera columna no contiene sino todas las permutaciones posibles del índice (bcd), precedidas de la misma letra a. Como este índice contiene 3 elementos, no podrán formarse sino 3 órdenes (secundarios) con las iniciales b, c, d, que están uno debajo de otro y contienen á su vez, cada uno, las dos permutaciones que permiten las últimas dos letras que quedan para escribirse. Lo mismo se observará en todas las columnas.

Síguese de esto: *Un índice de* n *elementos distintos suministra* n *órdenes principales, cada uno de los cuales contiene tantas permutaciones cuantas pueden efectuarse con los* (n—1) *elementos que han de añadirse á la letra inicial del órden.* Designando el número de las permutaciones de n elementos por P_n y de consiguiente el de las de (n—1) elementos por P_{n-1}, resulta que debe ser

$$P_n = n \, . \, P_{n-1} \qquad (1).$$

II. Caso. *Permutaciones con repeticion.* El mismo método se aplicará en el caso de ser idénticos unos ú otros de los elementos. Así, el índice (11234) da las permutaciones:

11234	13124	21134	31124	41123
11243	13142	21143	31142	41132
11324	13214	21314	31214	41213
11342	13241	21341	31241	41231
11423	13412	21413	31412	41312
11432	13421	21431	31421	41321
12134	14123	23114	32114	42113
12143	14132	23141	32141	42131
12314	14213	23411	32411	42311
12341	14231	24113	34112	43112
12413	14312	24131	34121	43121
12431	14321	24311	34211	43211

Las nuevas palabras, formadas por la permutacion de sus letras, se dicen *anagramas*. Tales anagramas son:

Révolution française—Un Corse veté la finirá.

La France veut son roy.

§ 145.

Número de permutacion.

I Caso. *Permutaciones sin repeticion.* Para determinar el número de todas las permutaciones que pueden verificarse con un índice de n elementos diferentes, podremos emplear la fórmula (1) del § precedente, escribiendo 2, 3, 4, 5 . . . n en lugar de n, por donde sale

$$\begin{aligned} P_2 &= 2\ P_1 \\ P_3 &= 3 . P_2 \\ P_4 &= 4 . P_3 \\ &\vdots \\ P_n &= n . P_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando entre sí todas estas ecuaciones y reduciendo, se tendrá

$$P_n = 2 . 3 . 4 . 5 \ldots . n . P_1$$

Pero P_1 es $=1$, pues un índice de 1 elemento no da sino una sola colocacion; luego resulta

$$P_n = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . n \qquad (2)$$

Dícese este producto *la facultad* de n y desígnase frecuentemente por el símbolo $n!$

Ejemplo I. El número de permutaciones de las 7 notas de la escala musical es 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7=5040, y si contamos tambien los semitonos hallarémoslo =479001600.

Ejemplo II. Diez personas, que cada dia comen dos veces en mesa redonda, quieren tener cada vez otra posicion Son posibles 1 . 2 . 3 . . . 10=3628800 posiciones diferentes, lo que da 1814400 dias ó casi 5000 años.

II Caso. *Permutaciones con repeticion.*

A. Entre los n elementos sean p iguales. Si todos los elementos dados fuesen distintos, tendríamos un número de permutaciones $=P_n$ y este sería mayor que el verdadero x que se busca; porque cada una de las permutaciones que tenemos en realidad, daria tantas permutaciones nuevas y distintas, cuantas dan p elementos desiguales, es decir P_p. Por consiguiente, el número x buscado, tiene que multiplicarse por el número P_p de permutacion de p elementos distintos para reproducir el número P_n de permutacion de n elementos distintos, y tenemos la igualdad $x . P_p = P_n$, de donde

$$x = \frac{P_n}{P_p} = \frac{1 . 2 . 3 . \ldots . n}{1 . 2 . 3 . \ldots . p} = \frac{n!}{p!} \qquad (3)$$

es decir: *el número de permutacion de* n *elementos, entre los cuales hay* p *idénticos, es la facultad de* n *dividida por la facultad de* p.

B. Supongamos ahora el caso mas general de que entre los n elementos dados se encuentren v distintos que vienen una sola vez, p iguales de una especie, q iguales de otra, r de una tercera &a. El número x de las permutaciones que tenemos en realidad, primeramente habria de multiplicarse por P_p para producir el que tendriamos, si $v+p$ elementos fueran distintos; despues habria de multiplicarse por P_q para hallar el número de permutacion, si entre los n dados fueran $v+p+q$ distintos; ademas, por P_r para igualar el número de permutacion de $v+p+q+r$ elementos distintos &a. Pasando adelante, de esta manera, hallaremos el producto $x.P_p.P_q.P_r \ldots$ igual al número de permutacion de $v+p+q+r+\ldots$ elementos distintos, y como $v+p+q+r+\ldots=n$, este último número será $=P_n$, luego encontraremos $x.P_p.P_q.P_r\ldots=P_n$, de donde sale

$$x=\frac{P_n}{P_p.P_q.P_r\ldots}=\frac{n!}{p!\,q!\,r!\ldots} \qquad (4)$$

La cantidad x tiene que ser entera; luego conduce esta ecuacion al teorema notable:

El producto de los n *primeros números es divisible sin resto por el producto de los* p, q, r . . . *primeros números enteros,* si $p+q+r+\ldots \overline{\overline{<}} n$.

§. 146.

Determinacion del lugar que tiene una permutacion entre las otras.

I Caso: *permutaciones sin repeticion.* Para determinar el lugar que tiene una permutacion dada, por ejemplo *dcab* (en la tabla pág. 371), entre las otras de los mismos elementos, se observará:

1) Que dicha permutacion *dcab* pertenece al 4° órden del índice (abcd) y que va precedida de los 3 órdenes *a, b* y *c.* Pero el órden *a* contiene tantas permutaciones cuantas suministra el índice (bcd) de los elementos *b, c, d,* que han de añadirse á la letra principal de este órden. Del mismo modo el órden *b* contiene las permutaciones del índice (acd), y el órden *c* las del índice (abd). El número de las permutaciones que suministra un índice de 3 elementos es P_3; por consiguiente, la permutacion *dcab* primeramente va precedida de tres órdenes enteros, cada uno de los cuales contiene P_3 permutaciones, luego la permutacion *dcab,* en primer lugar, tiene delante sí $3P_3$ permutaciones.

2) Ademas, la permutacion *dcab,* en el órden *d,* va precedida de todas las permutaciones del índice (abc) hasta la permutacion *cab,* y tiene, por lo tanto, delante sí tambien los órdenes *a* y *b*

del índice (abc), cada uno de los cuales contiene tantas permutaciones cuantas permite un índice de los 2 elementos, que deben añadirse á la letra inicial de estos órdenes. Pero el número de estas permutaciones es P_2; luego, en el órden *d*, la permutacion *dcab* va precedida de $2P_2$ permutaciones.

3) Finalmente, la parte *cab* de la permutacion dada *dcab*, que pertenece al órden *c* del índice (abc), es la primera de dicho órden, pues á la letra inicial *c* se siguen en posicion natural los elementos *a* y *b* que se añaden. Luego la permutacion *dcab* no va precedida de otra que de las encontradas arriba.

De consiguiente, para hallar el lugar que tiene la permutacion, *dcab* entre las otras, se buscará 1) cuántos órdenes preceden al órden *d* del índice (abcd), 2) cuántos preceden al órden *c* del índice (abc), 3) cuántos preceden al órden *a* del índice (ab). El número de permutaciones que cada uno de estos órdenes contiene, se halla facilmente, siendo el de un índice compuesto de un elemento ménos que el índice contiene. De esta manera concluimos: preceden al órden

d del índice	(abcd)	3 órdenes....	$=3.P_3=18$ perm.
c	(abc)	2 órdenes....	$=2.P_2=\ 4$ ....
a	(ab)	ningun órden	$=....=\ 0$ ....
b	(b)	ningun órden	$=....=\ 0$ ....
dcab		suma	$=22$ perm.

Luego á la permutacion *dcab* preceden 22 permutaciones, y será la misma la 23ª. Se ve: 1) al principio de los renglones están puestos segun su órden las letras de la permutacion dada; 2) en los índices consecutivos se quitan estas letras, una despues de la otra; 3) el número de los órdenes que preceden es idéntico al de las letras del índice correspondiente hasta la letra que está al principio del renglon; 4) el número P contiene un indicador igual al número de las letras del índice, ménos uno.

Ejemplo I. ¿Qué lugar tiene *Paris* entre las permutaciones del índice (aiprs)?

Resol. Preceden al órden

P del índice	(airs)	2 órdenes....	$2.P_4=48$
a	(irs)	ningun órden...	$=\ 0$
r	(is)	1 órden......	$1.P_2=\ 2$
i	(s)	ningun órden....	$=\ 0$
s	( )	ningun órden...	$=\ 0$
Paris		suma	$=50$

Luego será *Paris* la 51ª permutacion.

Ejemplo II. ¿Qué permutacion de (ioqtu) es *Quito*?
Resol. Preceden al órden

Q del índice	(ioqtu)	2 órdenes........	$2.P_4=48$
u	(iotu)	3 órdenes	$3.P_3=18$
i	(iot)	ningun órden..........	$=0$
t	(ot)	1 órden	$1.P_1=1$
o	(o)	ningun órden........	$=0$
Quito			suma $=67$

Luego *Quito* es la 68ª permutacion.

Ejemplo III. ¿Qué permutacion de (abcilmort) es *Baltimore*?
Resol. Preceden al órden

B del índice	(abcilmort)	1 órden ...1	$.P_8=$	40320 perm.
a	(acilmort)	ningun órden..	$=$	0
l	(cilmort)	2 órdenes..2	$.P_6=$	1440
t	(cimort)	5 órdenes..5	$.P_5=$	600
i	(cimor)	1 órden... 1	$.P_4=$	24
m	(cmor)	1 órden...1	$.P_3=$	6
o	(cor)	1 órden....1	$.P_2=$	2
r	(cr)	1 órden.. .1	$.P_1=$	1
e	(c)	ningun órden ..	$=$	0
Baltimore			suma $=$	42393 perm.

Luego es la 42394ª permutacion.

Ejemplo IV. ¿Qué permutacion de (acknoruvy) es *Nueva York*?
Resol. Preceden al órden

N del índice	(acknoruvy)	3 órdenes... 3	$.P_8=$	120960 perm.
u	(ackoruvy)	5 órdenes....5	$.P_7=$	25200
e	(ackorvy)	1 órden......1	$.P_6=$	720
v	(akorvy)	4 órdenes....4	$.P_5=$	480
a	(akory)	ningun órden....	$=$	0
Y	(kory)	3 órdenes....3	$.P_3=$	18
o	(kor)	1 órden......1	$.P_2=$	2
r	(kr)	1 órden......1	$.P_1=$	1
k	(k)	ningun órden	$=$	0
Nueva York			suma $=$	147381 perm.

Luego es la 147382ª permutacion.

II Caso: *permutaciones con repeticion.* Aplícase el mismo método con la sola diferencia de que los órdenes de los elementos repetidos han de escribirse separadamente.

Ejemplo I. ¿Qué permutacion de (11234) es el número 42131?

Resol. Conforme á la tabla de las permutaciones del índice (11234) establecida en el § 144, concluimos de esta manera:

Preceden al órden

4 del índice	(11234)	el órden 1........	$4!=24$	perm.
		los órdenes 2, 3 . . 2.	$\frac{4!}{2!}=24$	
2 del índice	(1123)	el órden 1........	$3!=6$	
1 del índice	(113)	ningun órden......	$=0$	
3 del índice	(13)	el órden 1..........	$1!=1$	
1 del índice	(1)	ningun órden........	$=0$	
42131		suma	$=55$	perm.

Luego, 42131 es la 56ª permutacion.

Ejemplo II. Qué permutacion es *Salmanassar?*

Resol. El índice es (aaaalmnrsss), y preceden al órden

S de	(aaaalmnrsss)	el órden *a*........	$\frac{10!}{3!3!}$	$=100800$	perm.
		los órdenes *l, m, n, r*...4.	$\frac{10!}{4!3!}$	$=100800$	
a de	(aaaalmnrss)	ningun órden....		$=0$	
l de	(aaalmnrss)	el órden *a*........	$\frac{8!}{2!2!}$	$=10080$	
m de	(aaamnrss)	el órden *a*...	$\frac{7!}{2!2!}$	$=1260$	
a de	(aaanrss)	ningun órden....		$=0$	
n de	(aanrss)	el órden *a*........	$\frac{5!}{2!}$	$=60$	
a de	(aarss)	ningun órden....		$=0$	
s de	(arss)	los órdenes *a, r*. . 2.	$\frac{3!}{2!}$	$=6$	
s de	(ars)	los órdenes *a, r*. . 2	$2!$	$=4$	
a de	(ar)	ningun órden......		$=0$	
r de	(r)	ningun órden......		$=0$	
Salmanassar		sumo		$=213010$	

Luego es la 213011ª permutacion.

Ejemplo III. Qué permutacion es *Nabuchodonosor?*

Resol. El índice es (abcdhnnoooorsu); luego preceden al órden

N de	(abcdhnnooooorsu)	los órdenes a, b, c, d, h	$5.\frac{13!}{2!4!}$	$=648648000$
a de	(abcdhnooooorsu)	ningun órden............		$= 0$
b de	(bcdhnooooorsu)	ningun órden............		$= 0$
u de	(cdhnooooorsu)	los órd. c, d, h, n, r, s ..	$6.\frac{10!}{4!}$	$= 907200$
		el órden o...........	$1.\frac{10!}{3!}$	$= 604800$
c de	(cdhnoooors)	ningun órden..........		$= 0$
h de	(dhnoooors)	el órden d..........	$1\frac{8!}{4!}$	$= 1680$
o de	(dnoooors)	los órdenes d, n....	$2.\frac{7!}{4!}$	$= 420$
d de	(dnooors)	ningun órden............		$= 0$
o de	(nooors)	el órden n..........	$1.\frac{5!}{3!}$	$= 20$
n de	(noors)	ningun órden............		$= 0$
o de	(oors)	ningun órden............		$= 0$
s de	(ors)	los órdenes o, r........	$2.2!$	$= 4$
o de	(or)	ningun órden............		$= 0$
r de	(r)	ningun órden............		$= 0$

Nabuchodonosor suma $=650162124$

Luego es la 650162125ª permutacion.

§. 147

Determinacion de la permutacion, dado el lugar que tiene entre las otras.

I Caso: *permutaciones sin repeticion.* El problema que tenemos que resolver aquí, es el invertido del § precedente, y para mayor claridad propongámonos buscar la 147382ª permutacion del índice (aeknoruvy), de la cual, segun el Ejemplo IV del § precedente sabemos que es la palabra *Nueva York.* Dismiuuyendo el número dado de una unidad tendremos 147381, que es el número de todas las permutaciones que preceden á la buscada. Ahora el índice (aeknoruvy) contiene 9 elementos diferentss, y por esto produce 9 órdenes distintos, cada uno de los cuales contiene tantas permutaciones cuantas produce un índice de 8 elementos diferentes $=P_8=1.2.3....8=40320$ permutaciones. Dividiremos 147381 por 40320 y tendremos el cociente entero 3 y un resto 26421 que es menor que el divisor, á saber menor que el número de permutacion de un órden. De donde concluimos que la permutacion buscada va procedida de 3 órdenes enteros y está contenida en el 4º órden. Pero los órdenes se siguen segun las letras del índice (acknoruvy), y son los cuatro primeros los de las letras *a, c, k, n*. Luego la permutacion buscada pertenece al órden *n*, es decir que *n* es su primer letra.

Como la primera permutacion del órden *n* es *naekoruvy*, este órden contiene todas las permutaciones del índice (ackoruvy), que se halla quitando la letra *n* ya encontrada y contiene 8 órdenes compuestos, cada uno, de $P_7=1.2.3....7=5040$ permutaciones. El resto 26421 que teniamos arriba, es el número de las permutaciones que preceden á la buscada entre las del nuevo índice (ackoruvy); luego dividiendo 26421 por 5040 tendremos el cociente 5, que indica el número de los órdenes completos que preceden, y un resto 1221 que es menor que el número 5040 de las permutaciones de un órden. Luego la permutacion buscada pertenece al 6º órden del índice (ackoruvy), es decir al órden *u*, y es *u* la segunda letra que se busca.

Omitiendo la letra *u* en el índice anterior, tendremos el nuevo (ackorvy) y continuaremos buscando la tercera letra &a. &a.

El cálculo es sencillo, valiéndonos del modelo siguiente:

El número dado es $=147382$, luego

147381 : P_8 ó 40320 = 3 órd. preceden en (acknoruvy); luego *N*
120960
———
26421 : P_7 ó 5040 = 5 órd. .... (ackoruvy); ...... *u*
25200
———
1221 : P_6 ó 720 = 1 órd. .... (ackorvy); .... *e*
720
———
501 : P_5 ó 120 = 4 órd. .... (akorvy); .... *v*
480
———
21 : P_4 ó 24 = 0 órd. .... (akory); .... *a*
0
———
21 : P_3 ó 6 = 3 órd. .... (kory); .... *Y*
18
———
3 : P_2 ó 2 = 1 órd. .... (kor); .... *o*
2
———
1 : P_1 ó 1 = 1 órd. .... (kr); .... *r*
1
———
0 Queda *k* como última letra no precedida de otra, ... *k*

Luego la permutacion pedida es *Nueva York*.

EJEMPLO I. ¿Cuál será la 2377ª permutacion de (acdeoru)?
RESOL. El número dado es 2377, luego

$2376 : P_6$ ó $720 = 3$ órd. preceden en (acdeoru); luego . . *E*
2160

$216 : P_5$ ó $120 = 1$ órd. . . . . (acdoru); c
120

$96 : P_4$ ó $24 = 4$ órd. . . . . (adoru); . . . . *u*
96

0 Queda *ador*, no precedido de ninguna perm . . . . *ador*.
Luego es *Ecuador*.

EJEMPLO II. Qué permutacion será la 460921ª de (adhinoptus)?
RESOL. El número dado es 460921; luego

$460920 : P_9$ ó $362880 = 1$ órd. preceden en (adhinoptus); luego . . *D*
362880

$98040 : P_8$ ó $40320 = 2$ órd . . . . (ahinoptus); . . . . . *i*
80640

$17400 : P_7$ ó $5040 = 3$ órd . . . . (ahnoptus); . . . . . *o*
15120

$2280 : P_6$ ó $720 = 3$ órd . . . . (ahnptus); . . . . . *p*
2160

$120 : P_5$ ó $120 = 1$ órd . . . . (ahntus); . . . . *h*
120

0 El resto 0 da . . . . *antus*
Luego *Diophantus*, el célebre matemático de los griegos antiguos.

II CASO: *permutaciones con repeticion.* Si algunos elementos son idénticos, los diferentes órdenes no contienen el mismo número de permutaciones, y por tanto el número de los órdenes que preceden á la permutacion pedida, no resulta por una simple division. Mas bien se examinará, si los órdenes, uno despues del otro, estén contenidos en el número propuesto, y luego que se encuentre un órden que no lo sea, este será el órden que contiene la permutacion pedida y la letra inicial de aquel será la primera (ó la siguiente) de esta. Se comprenderá el procedimiento por un ejemplo.

EJEMPLO.. ¿Cuál será lo 46210^a permutacion de (acciihhnp)

α) Se resta del número de las 46209 perm. del ind. (acciihhnp)

el órden a con $\dfrac{8!}{3.2!} = 6720$

39489

los órd. c, i, h con $\dfrac{3.8!}{2.2!} = 30240$

9249

el órden n con $\dfrac{8!}{3.2!} = 6720$

2529

el órden p con $\dfrac{8!}{3.2!} = 6720$ } imposible; luego .... P

β) Se resta del residuo...... 2529 perm. del ind. (acciihhn)

el órden a con $\dfrac{7!}{3.2!} = 840$

1689

el órden c con $\dfrac{7!}{2.2!} = 1260$

429

el órden i con $\dfrac{7!}{2.2!} = 1260$ } imposible; luego i

γ) Se resta del residuo........429 perm. del ind. (accihhn)

el órden a con $\dfrac{6!}{2.2!} = 180$

249

el órden c con $\dfrac{6!}{2!} = 360$ } imposible; luego c

δ) Se resta del residuo........ 249 perm. del ind. (acihhn)

los órd. a, c, i con $\dfrac{3.5!}{2!} = 180$

69

el órden h con $5! = 120$ } imposible; luego ...... h

ε) Queda el índice (acihn), que no tiene elementos repetidos; luego estamos en el primer caso:

69 : 4! ó 24 = 2 órd. preceden en (acihn); luego i
48
—
21 : 3! ó 6 = 3 órd. .... (achn); .... n
18
—
3 : 2! ó 2 = 1 órd .... (ach); c
2
—
1 : 1! ó 1 = 1 órd .... (ah); .... h
1
—
0 El resto 0 da .... a

Luego la permutacion buscada es *Pichincha*.

ARTICULO II.

Combinaciones.

§. 148.

De las combinaciones en general.

Combinar elementos dados es efectuar todas sus colocaciones posibles, componiendolos de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres &a, de manera que cada una se diferencie de otra de la misma clase por la diversidad de los elementos.

Cada colocacion de esta especie se llama una *combinacion.*

Hay tambien combinaciones *sin repeticion y con repeticion.* Resultarán las primeras, si en cada una de las colocaciones, todos los elementos tienen que ser diferentes, y resultarán las segundas, si los elementos pueden colocarse tambien con idénticos ó repetidas veces.

El número de los elementos contenido en una combinacion constituye la clase de esta; y llámanse tambien *estractos* las combinaciones de la 1ª clase, *ambos* las de la 2ª, *ternos* las de la 3ª, *cualernos* las de la 4ª, *quinternos* las de la 5ª &a.

La sintáxis tiene por objeto:

1) Determinar *la ley de combinacion*, por medio de la cual se verifican todas las combinaciones posibles de los elementos dados.

2) Determinar *el número* de las combinaciones posibles.

§. 149.

Ley de combinacion.

Para efectuar, y al mismo tiempo para tener bien ordenadas todas las combinaciones posibles de los elementos dados, estos primeramente se colocarán de uno en uno y formarán así las combinaciones de la 1ª clase. De ellas se formarán las de la 2ª clase, é igualmente de una clase cual fuere, las de la clase superior inmediata:

1) *en el caso de combinaciones sin repeticion*, poniendo delante de todas las combinaciones de la clase precedente, el primer elemento (a) desde el segundo órden, el segundo elemento (b) desde el tercer órden, el tercer elemento (c) desde el cuarto órden &a. y continuando hasta llegar á una clase que contenga todos los elementos dados;

2) *en el caso de combinaciones con repeticion*, poniendo delante de todas las combinaciones de la clase precedente, el primer ele-

mento (a) desde el primer órden, el segundo elemento (b) desde el segundo órden, el tercer elemento (c) desde el tercer órden &a. y continuando hasta llegar á la clase pedida.

El número de las combinaciones sin repeticion es limitado, el de las con repeticion no lo es.

I. *Combinaciones sin repeticion*, índice (abcde).

1ª clase	a, b, c, d, e	cinco órdenes
2ª clase	ab, ac, ad, ae bc, bd, be cd, ce de	1r órden. 2º ,, 3r ,, 4º ,,
3ª clase	abc, abd, abe acd, ace ade bcd, bce bde cde	1r órden 2º ,, 3r ,,
4ª clase	abcd, abce abde acde bcde	1r órden 2º ,,
5ª clase	abcde	un órden.

II. *Combinaciones con repeticion*, índice (abcde).

1ª clase	a, b, c, d, e	cinco órdenes
2ª clase	aa, ab, ac, ad, ae bb, bc, bd, be cc, cd, ce dd, de ee	1º órden 2º ,, 3r ,, 4º ,, 5º ,,
3ª clase	aaa, aab, aac, aad, aae abb, abc, abd, abe acc, acd, ace add, ade aee bbb, bbc, bbd, bbe bcc, bcd, bce bdd, bde bee	1r órden 2º ,,

	ccc, ccd, cce cdd, cde cee	3r orden.
	ddd, dde dee	4° ,,
	eee	5° ,,
&a.	&a.	&a.

§. 150

Número de combinacion.

I. Caso: *combinaciones sin repeticion*. El número de las combinaciones sin repeticion de n elementos á la clase p designaremos por el símbolo ${}^{n}C_{p}$. Las combinaciones de cualquiera clase pueden formarse de las de la clase precedente, añadiendo á estas *todos los elementos que no contienen*. De esta manera, de cada una de las ${}^{n}C_{p-1}$ combinaciones de la clase $p-1$, tendremos $n-(p-1)=n-p+1$ nuevas, ó bien tendremos $(n-p+1).{}^{n}C_{p-1}$ combinaciones de la clase p. Pero cualquiera de estas combinaciones recien formadas vendria p veces; porque, la combinacion *abcd*, por ejemplo, que pertenece á la 4ª clase, se forma

como de *abc* por *d*
así tambien de *abd* por *c*
y de *acd* por *b*
y de *bcd* por *a*.

Luego, el número de combinaciones arriba encontrado, tiene que dividirse por p y será

$$ {}^{n}C_{p}=\frac{n-p+1}{p}\cdot{}^{n}C_{p-1} \tag{1} $$

El número de combinaciones de la 1ª clase es igual al número n de los elementos, es decir, tenemos ${}^{n}C_{1}=n$. Se hallarán los números de las otras clases, sustituyendo en (1), 2, 3, 4, 5....p en lugar de p:

$$ \left.\begin{aligned} {}^{n}C_{1}&=n &&=\frac{n}{1} \\ {}^{n}C_{2}&=\frac{n-1}{2}\cdot{}^{n}C_{1} &&=\frac{n(n-1)}{1.2} \\ {}^{n}C_{3}&=\frac{n-2}{3}\cdot{}^{n}C_{2} &&=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \\ {}^{n}C_{4}&=\frac{n-3}{4}\cdot{}^{n}C_{3} &&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}\right| \tag{2} $$

y será en general:

$${}^{n}C_p = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1)}{1.2.3.4\ldots p} = \binom{n}{p} \qquad (3)$$

El último símbolo se pronuncia simplemente: n encima de p.

II. Caso: *combinaciones con repeticion.* El número de las combinaciones con repeticion de n elementos á la clase p designaremos por el símbolo ${}^{n}K_p$. Las combinaciones de cualquiera clase p pueden formarse de las de la clase precedente, añadiendo *á estas todos los* n *elementos dados y ademas todos los* p—1 *elementos que contienen.* Luego, cada una de las ${}^{n}K_{p-1}$ combinaciones de la clase p—1 nos suministraria n+p—1 nuevas de la clase p, y seria el número de combinaciones que se busca, $=(n+p-1)\,.\,{}^{n}K_{p-1}$. Pero cualquiera de estas combinaciones nuevas se encontraria p veces; porque la combinacion *caabbcd*, por ejemplo, que pertenece á la 7ª clase, se formaria

de	*aaabbc*	por *d*	por los elementos dados.
	aaabbd	*c*	
	aaabcd	*b*	
	aabbcd	*a*	
y ademas de	*aaabcd*	*b*	por los elementos que contiene la combinacion anterior misma.
	aabbcd	*a*	
	aabbcd	*a*	

Luego el número de combinacion arriba encontrado, ha de dividirse por p, y resulta:

$${}^{n}K_p = \frac{n+p-1}{p}\,.\,{}^{n}K_{p-1} \qquad (4)$$

Aquí es tambien ${}^{n}K_1 = n$, luego por sustitucion de 2, 3, 4, 5.. p en lugar de p se sigue:

$$\left.\begin{aligned}
{}^{n}K_1 &= n = \frac{n}{1}\\
{}^{n}K_2 &= \frac{n+1}{2}\,.\,{}^{n}K_1 = \frac{n(n+1)}{1.2}\\
{}^{n}K_3 &= \frac{n+2}{3}\,.\,{}^{n}K_2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\\
{}^{n}K_4 &= \frac{n+3}{4}\,.\,{}^{n}K_3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right| \qquad (5)$$

y en general:

$${}^{n}K_p = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+p-1)}{1.2.3.4\ldots p} \qquad (6)$$

Corolario. Los números de las combinaciones que contienen las diferentes clases y órdenes, son números figurados. Así, la tabla de las combinaciones del índice (abcde) que contiene 5 elementos, suministra los números de combinaciones:

1ª clase	1	1	1	1	1
2ª „	1	2	3	4	
3ª „	1	3	6		
4ª „	1	4			
5ª „	1				

I Caso: *sin repeticion*. Cada número figurado representa el número de las combinaciones del órden correspondiente, solo que están puestos á la inversa.

1ª clase	1	1	1	1	1
2ª „	1	2	3	4	5
3ª „	1	3	6	10	15
4ª „	1	4	10	20	35
....					
....					

II Caso: *con repeticion*. Aquí las series son completas.

El número de las combinaciones que contiene una clase entera, en el primer caso será el primero que falta en la serie siguiente, y en el segundo caso, el último de esta serie.

Claro está, que de esta manera fácilmente puede determinarse el número do combinacion para n elementos y cualquiera clase.

ARTICULO III.

Variaciones.

§ 151.

De las variaciones en general.

Variar elementos dados es formar todas sus colocaciones posibles, colocándolos de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres &a. en toda combinacion y posicion posible.

De consiguiente, las variaciones pueden distinguirse:

1) por *el número* de los elementos que contienen, y conforme á este número se constituirán las diferentes clases de las variaciones.

2) por la *diversidad* de los elementos.

3) por la *posicion diferente* de los mismos elementos.

Síguese de esto inmediatamente, *que las variaciones pueden formarse de las combinaciones, permutando cada una de ellas, de toda manera posible.*

Hay tambien variaciones *sin repeticion* y *con repeticion*, segun que puedan contener los elementos una vez ó algunas veces.

La sintáxis tiene por objeto:

1) Determinar *la ley de variacion*, por medio de la cual se verifican todas las variaciones posibles.

2) Determinar *el número de variacion*, es decir, el número de todas las variaciones posibles, que pueden hacerse con un número dado de elementos.

§. 152.

Ley de variacion.

Para formar y al mismo tiempo para tener bien ordenadas todas las variaciones que pueden efectuarse con los elementos dados, primeramente se escribirán todos los elementos dados en órden natural, y estos, á la vez, formarán las variaciones de la 1ª clase. De ellas se formarán las de la 2ª clase, é igualmente de una clase cualquiera, las de la clase superior inmediata:

1) *en el caso de variaciones sin repeticion*, añadiendo á todas las variaciones de la clase precedente, uno por uno, todos los elementos que no contienen, y continuando hasta la última clase que contiene las permutaciones de todos los elementos,

2) *en el caso de variaciones con repeticion*, añadiendo á todas las variaciones de la clase precedente, uno por uno, todos los elementos, aun los que contienen y continuando hasta llegar á la clase pedida.

Las variaciones sin repeticion tienen un número limitado de clases; las otras no lo tienen.

I. *Variaciones sin repeticion*, índice (abcd).

1ª clase	a, b, c, d	cuatro órdenes
2ª clase	ab, ac, ad	1r órden.
	ba, bc, bd	2º ,,
	ca, cb, cd	3r ,,
	da, db, dc	4º ,,
3ª clase	abc, abd, acb, acd, adb, adc	1r órden
	bac, bad, bca, bcd, bda, bdc	2º ,,
	cab, cad, cba, cbd, cda, cdb	3r ,,
	dab, dac, dba, dbc, dca, dcb	4º ,,
4ª clase	abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb	1r órden.
	bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca	2º ,,
	cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba	3r ,,
	dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba	4º ,,

II. *Variaciones con repeticion*, índice (abc).

1ª clase	a, b, c	tres órdenes.
2ª clase	aa, ab, ac	1º órden.
	ba, bb, bc	2º ,,
	ca, cb, cc	3º ,,
3ª clase	aaa, aab, aac	
	aba, abb, abc	1º órden.
	aca, acb, acc	
	baa, bab, bac	
	bba, bbb, bbc	2º ,,
	bca, bcb, bcc	
	caa, cab, cac	
	cba, cbb, cbc	3º ,,
	cca, ccb, ccc	
&a,	&a.	&a.

§ 153.

Número de variacion.

I. Caso: *variaciones sin repeticion*. El número de variacion sin repeticion de n elementos á la clase p, designaremos por ${}^{n}V_p$. Fórmanse las variaciones de la clase p, añadiendo á todas las de la clase p—1, los n—(p—1)=n—p+1 elementos que no contienen, de manera que de cada una de ellas salgan n—p+1 nuevas de la clase p. Luego resulta que

$$ {}^{n}V_p=(n-p+1)\cdot {}^{n}V_{p-1} \qquad (1)$$

Como ${}^{n}V_1=n$, para 2, 3, 4, 5 . . . p en lugar de p, saldrá:

$$\left.\begin{aligned} {}^{n}V_1&=n &&=n\\ {}^{n}V_2&=(n-1)\cdot{}^{n}V_1&&=n(n-1)\\ {}^{n}V_3&=(n-2)\cdot{}^{n}V_2&&=n(n-1)(n-2)\\ {}^{n}V_4&=(n-3)\cdot{}^{n}V_3&&=n(n-1)(n-2)(n-3)\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

. . . .

en general:

$$ {}^{n}V_p=n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) \qquad (3)$$

II. Caso: *variaciones con repeticion*. Designamos el número correspondiente de variacion con repeticion por ${}^{n}W_p$. Como aquí las variaciones de la clase p se forman de las de la clase p—1, añadiendo á cada una todos los n elementos dados, tendremos:

$$ {}^{n}W_p=n\cdot{}^{n}W_{p-1} \qquad (4)$$

y siendo ${}^{n}W_1=n$, resulta:

$$\left.\begin{aligned} {}^{n}W_1&=n &&=n\\ {}^{n}W_2&=n\cdot{}^{n}W_1&&=n^2\\ {}^{n}W_3&=n\cdot{}^{n}W_2&&=n^3\\ {}^{n}W_4&=n\cdot{}^{n}W_3&&=n^4\end{aligned}\right\}\qquad (5)$$

. . . .

en general $\qquad {}^{n}W_p=n^p \qquad (6)$

ARTICULO IV.

Aplicacion á la teoría del binómio de Newton.

§. 154.

Producto de varios binómios.

La multiplicacion de varios binómios que tienen un mismo primer término, conduce á estos resultados:

$$(x+a)(x+b)=x^2+\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right|\, x+ab$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+\left.\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right|\, x^2+abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+\left.\begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix}\right|\, x^3+\left.\begin{matrix}ab\\ac\\ad\\bc\\bd\\cd\end{matrix}\right|\, x^2+\left.\begin{matrix}abc\\abd\\acd\\bcd\end{matrix}\right|\, x+abcd$$

Se ve pues:

1) El desarrollo contiene las potencias enteras decrecientes de x, siendo el esponente mas alto igual al número de los factores á la izquierda y el mas bajo igual á cero.

2) El coeficiente del primer término constantemente es la unidad. Los otros coeficientes son las sumas de todas *las combinaciones* sin repeticion á la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª clase, siendo los elementos que se combinan los segundos términos de los binómios dados para multiplicarse.

Segun esto, si convenimos en representar por S_p la suma de todas las combinaciones sin repeticion que pueden efectuarse con los n elementos $a, b, c \ldots . n$, componiéndolos de p en p, tendremos, como muy probable, el producto de los n factores

$$\left.\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\ldots.(x+m)(x+n)\\ =\,&x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+S_3x^{n-3}+\ldots+S_px^{n-p}+\ldots+S_{n-1}x+S_n\end{aligned}\right\}\ (\alpha)$$

Multiplicaremos esta ecuacion con otro binómio $(x+q)$ de manera que tengamos $n+1$ factores, y resulta

$$\left.\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+n)(x+q)\\ =\,&x^{n+1}+S_1x^n+S_2x^{n-1}+\ldots+S_px^{n-p+1}+\ldots.+S_nx\\ &+qx^n+qS_1x^{n-1}+\ldots+qS_{p-1}x^{n-p+1}+\ldots+qS_{n-1}x+qS_n\end{aligned}\right\}\ (\beta)$$

Sumando los términos semejantes, se ve que

$$S_1+q=(a+b+c+\ldots+m+n)+q$$

es la suma de todas las combinaciones de los n+1 elementos á la 1ª clase, y designando las sumas de estas combinaciones de cualquier clase por S', tendremos que $S_1+q=S'_1$.

Ademas, será

$$S_2+qS_1=(ab+ac+ad+\ldots mn)+(a+b+c+\ldots n)q$$

es decir que á la suma de todas las combinaciones de la 2ª clase, que suministran los *n* elementos *a*, *b*, *c*....*n*, se añaden las combinaciones *aq*, *bq*, *cq*...., tambien de la 2ª clase y que faltan para producir todas las de los n+1 elementos *a*, *b*, *c*. ..*n*, *q*. Luego será $S_2+qS_1=S'_2$.

De la misma manera será en general

$$S_p+qS_{p-1}=S'_p \qquad (\gamma)$$

Porque S_p contiene reunidas todas las combinaciones diferentes y posibles de los *n* elementos *a*, *b*, *c*....*n* de la clase *p*, y S_{p-1} todas las de la clase p—1, y multiplicadas las últimas por *q*, producirán tambien combinaciones de la clase *p*, y estas todas diferentes unas de otras y todas las posibles que han de añadirse para producir todas de los n+1 elementos *a*, *b*, *c*....*m*, *n*, *q*.

Finalmente, el último término qS_n equivale á S'_{n+1}; porque S_n no contiene sino una combinacion que es el producto de los *n* elementos *a*, *b*, *c*....*m*, *n* entre sí, lo que multiplicado por *q*, produce la única combinacion de los n+1 elementos *a*, *b*, *c*.... *m*, *n*, *q* á la clase n+1.

De consiguiente, la ecuacion (β) se convierte en

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+m)(x+n)(x+q)$$

$$=x^{n+1}+S'_1x^n+S'_2x^{n-1}+\ldots+S'_px^{n-p+1}+\ldots+S'_nx+S'_{n+1}$$

ecuacion que se deduce inmediatamente de (α), suponiendo n+1 factores en lugar de *n* factores; porque con esta suposicion se muda *n* en n+1, y S en S', es decir que las combinaciones de *n* elementos se convierten en las de n+1 elementos.

Concluimos, que la ley representada por la ecuacion (α) será verdadera para n+1 factores binomiales, si lo es para *n*, ó bien que se verificará para un factor binomial mas, si se verifica para un cierto número de factores.

Pero dicha ley se cumple en el caso de 2, 3, 4 factores, como se ha visto al principio de este §; luego se cumplirá tambien para 5 factores, luego tambien para 6, luego tambien para 7 &a, es decir, que tenemos para cualquier número *n* de factores:

$$\left.\begin{array}{l}(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+n)\\ =x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+S_3x^{n-3}+\ldots+S_px^{n-p}+\ldots+S_{n-1}x+S_n\end{array}\right\}(1)$$

§. 155.

Potencias del binómio para esponentes enteros.

Supongamos ahora que en la última ecuacion (1) del § precedente, todos los segundos términos de los binómios sean iguales

$$b=c=d=\ldots=m=n=a$$

y tendremos

$$(x+a)^n=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\ldots+S_px^{n-p}+\ldots+S_{n-1}x+S_n \quad (a)$$

Pero las sumas S_1, S_2, $S_3 \ldots$ no ya contienen sino sumandos iguales, y tantas veces cuantas se combinan n elementos distintos:

$$S_1=a+a+a+\ldots\ldots={}^nC_1.a=\binom{n}{1}.a$$

$$S_2=aa+aa+aa+\ldots={}^nC_2.a^2=\binom{n}{2}.a^2$$

$$S_3=aaa+aaa+\ldots={}^nC_3.a^3=\binom{n}{3}.a^3$$

$$S_4=aaaa+aaaa+\ldots={}^nC_4.a^4=\binom{n}{4}.a^4$$

$$\vdots$$

$$S_p=a^p+a^p+a^p+\ldots={}^nC_p.a^p=\binom{n}{p}.a^p$$

$$S_n=a^n=\ldots\ldots\ldots\ldots=\binom{n}{n}.a^n$$

De consiguiente, la ecuacion (a) toma la forma

$$(x+a)^n=x^n+\binom{n}{1}ax^{n-1}+\binom{n}{2}a^2x^{n-2}+\binom{n}{3}a^3x^{n-3}+\ldots+\binom{n}{n}a^n \quad (2)$$

El segundo miembro de la fórmula contiene $n+1$ términos, todas las potencias enteras decrecientes de x y crecientes de a, desde la n^{sima} hasta la potencia con el esponente cero, de manera que la suma de los esponentes en cualquier término sea $=n$. Ademas, el primer coeficiente es la unidad y los otros son los números de combinacion sin repeticion de n elementos á la 1ª. 2ª, 3ª, 4ª....n^{sima} clase. La n^{sima} clase de estas combinaciones no contiene sino una, la cual es el producto de todos los n elementos dados, y por consiguiente será el último coeficiente $\binom{n}{n}$ tambien igual á la unidad como el primero.

El término general de la serie es [§ 150 fórm. (4)]:

$$\left.\begin{aligned} T_{p+1} &= \binom{n}{p} a^p . x^{n-p} \text{ en donde} \\ \binom{n}{p} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-p+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots.(p-1)p} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

La última fórmula representa el coeficiente del término general, que tiene el lugar p+1.

Este teorema ya conocido del § 62 y llamado *teorema binomial de Newton*, conforme á la demostracion, vale para cualesquiera valores de x y a, y para valores positivos enteros del esponente n. Toma la forma mas sencilla, si se pone x=1 y x en lugar de a:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots. + \binom{n}{n} x^n \quad (4)$$

§. 156.

Propiedades de los coeficientes binomiales.

Ademas de las propiedades ya indicadas, se han de notar las siguientes:

1• El coeficiente general que está en (3) puede escribirse en la forma

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)..(n-p+2)}{1.2.3.4\ldots.(p-1)} \cdot \frac{n-p+1}{p} \quad (5)$$

Pero el primer quebrado del segundo miembro es $\binom{n}{p-1}$ á saber el coeficiente del término precedente, lo que se ve, escribiendo p—1 en lugar de p en la segunda ecuacion (3). Luego resulta

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} \cdot \frac{n-p+1}{p} \quad (5^*)$$

Obsérvese ademas, que en el último quebrado de (5) el numerador n—p+1 es el número entero inferior inmediato que se sigue al último factor n—p+2 del primer quebrado, y que el denominador p es superior inmediato de p—1 que es el último divisor del primer quebrado. Luego de (5) se sigue:

Un coeficiente cualquiera desde el tercero, se deriva del precedente, añadiendo por factor en el numerador el número entero inferior inmediato, y en el denominador el número entero superior inmediato.

Dícese "desde el tercero", porque el segundo se forma absolutamente del esponente é indicador $\binom{n}{1} = \frac{n}{1}$, y el primero es $\binom{n}{0}$

$=1$, sin seguir esta regla.

Por consiguiente, serán los coeficientes:

$$\binom{n}{0}=1;\ \binom{n}{1}=\frac{n}{1};\ \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{1.2};\ \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3};$$

$$\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-1)(n-3)}{1.2.3.4};\ \binom{n}{5}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\ \&c.$$

2° De esta manera, los coeficientes se forman segun la tabla siguiente:

$$\left.\begin{array}{cccccccc} \binom{n}{0}; & \binom{n}{1}; & \binom{n}{2}; & \binom{n}{3}; \ldots & \binom{n}{n-2}; & \binom{n}{n-1}; & \binom{n}{n} \\ 1; & \frac{n}{1}; & \frac{n-1}{2}; & \frac{n-2}{3}; \ldots & \frac{3}{n-2}; & \frac{2}{n-1}; & \frac{1}{n} \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

es decir, que para formar cualquier coeficiente binomial, se han de multiplicar entre sí todos los términos de la segunda serie hasta el lugar que tiene aquel en la primera.

En la segunda serie los numeradores van decreciendo desde n hasta 1, y los denominadores creciendo desde 1 hasta n.

Ademas, los primeros quebrados de la misma serie son mayores, y los últimos menores que la unidad, de donde resulta:

Los coeficientes binomiales van en aumento hasta un máximo, y despues de él van en diminucion.

3° Multiplicando entre sí todos los quebrados de la segunda serie (α), el resultado será la unidad, es decir que tenemos $\binom{n}{n}=1=\binom{n}{0}$, ó bien que el último coeficiente binomial, como el primero, vale la unidad.

Cualquier coeficiente binomial de la primera serie (α) multiplicado por el quebrado, que está á su derecha en la segunda, produce por producto el coeficiente binomial que se sigue. Luego tenemos

$$\binom{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}=\binom{n}{n}=1;\ \text{do donde}\ \binom{n}{n-1}=1:\frac{1}{n}=1\cdot\frac{n}{1}=\binom{n}{1}$$

$$\binom{n}{n-2}\cdot\frac{2}{n-1}=\binom{n}{n-1}=\binom{n}{1};\ \ldots\ldots\ \binom{n}{n-2}=\binom{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}=\binom{n}{2}$$

$$\binom{n}{n-3}\cdot\frac{3}{n-2}=\binom{n}{n-2}=\binom{n}{2};\ \ldots\ldots\ \binom{n}{n-3}=\binom{n}{2}\cdot\frac{n-2}{3}=\binom{n}{3}$$

$$\binom{n}{n-4}\cdot\frac{4}{n-3}=\binom{n}{n-3}=\binom{n}{3};\ \ldots\ldots\ \binom{n}{n-4}=\binom{n}{3}\cdot\frac{n-3}{4}=\binom{n}{4}$$

. . . .

. . . .

y en general $$\binom{n}{n-p}=\binom{n}{p}$$

es decir, que *dos coeficientes binomiales son idénticos si tienen res-*

pectivamente igual distancia del primero y último.

Luego, para calcular los valores numéricos de los coeficientes binomiales, bastará buscar los de la primera mitad del desarrollo, pasada la cual se repiten en órden invertido.

Importa observar, que cada coeficiente viene dos veces, si el esponente n es impar y el número de términos es par; pero que existe un coeficiente medio, que viene una sola vez, si el esponente n es par, y el número de términos es impar.

4° Póngase en (4) $x=1$ y será

$$2^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n} \qquad (6)$$

es decir, *que la suma de todos los coeficientes binomiales de la n^{sima} potencia, equivale á la n^{sima} potencia de 2.*

Si en (4) se escribe $x=-1$, resulta

$$0=1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\ldots\pm\binom{n}{n}$$

de donde

$$1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots \qquad (7)$$

luego: *la suma de los coeficientes binomiales que tienen un lugar impar, es igual á la suma de los que tienen un lugar par.*

Cada uno de los miembros en (7) es la mitad del segundo miembro en (6), luego será cada uno de ellos $=\frac{1}{2}.2^n=2^{n-1}$ y por consiguiente igual á la suma de todos los coeficientes de la $n-1^{\text{ra}}$ ó de la potencia que precede.

5° Si sumamos dos coeficientes consecutivos, tendremos en virtud de la ecuacion (5*):

$$\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p-1}\cdot\frac{n-p+1}{p}=\binom{n}{p-1}\cdot\frac{n+1}{p}$$

y como $\binom{n}{p-1}=\dfrac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots(n-p+2)}{1.2.3.4\ldots(p-2)\,(p-1)}$

será $\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\dfrac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-p+2)}{1.2.3.4\ldots(p-2)\,(p-1)p}$

Pero el último quebrado resulta de la segunda fórmula (3), si se escribe $n+1$ en lugar de n, luego será

$$\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p} \qquad (8)$$

es decir, que *la suma de dos coeficientes binomiales consecutivos de la n^{sima} potencia da el coeficiente binomial de la $n+1^{\text{ra}}$ potencia que tiene en el desarrollo el mismo lugar que el último de aquellos.*

FIN.

INDICE.

CAPITULO V.

Series aritméticas y geométricas.

CAPITULO VI.

Sintáxis algébrica.

ALFABETO GRIEGO.

		Pronunciacion.		Nombres.
Α	α	a	Ἄλφα	alpha
Β	β	b	Βῆτα	beta
Γ	γ	g	Γάμμα	gamma
Δ	δ	d	Δέλτα	delta
Ε	ε	e (breve)	Ἔψιλόν	epsílon
Ζ	ζ	ds	Ζῆτα	zeta
Η	η	e (larga.)	Ἦτα	eta
Θ	ϑ	th (inglés)	Θῆτα	theta
Ι	ι	i	Ἰῶτα	iota
Κ	κ	k =qu	Κάππα	cappa
Λ	λ	l	Λάμβδα	lambda
Μ	μ	m	Μῦ	my
Ν	ν	n	Νῦ	ny
Ξ	ξ	x	Ξῖ	xi
Ο	ο	o (breve)	Ὂ μικρόν	omícron
Π	π	p	Πῖ	pi
Ρ	ρ	r	Ῥῶ	rho
Σ	σ, ς	s	Σίγμα	sigma
Τ	τ	t	Ταῦ	tau
Υ	υ	u (francés)	Ὑψιλόν	ypsílon
Φ	φ	f	Φῖ	phi=fi
Χ	χ	j	Χῖ	chi=ji
Ψ	ψ	ps	Ψῖ	psi
Ω	ω	o (larga)	Ὦ μέγα	omega.

La letra castellana *y* corresponde á la griega *υ*, y por lo tanto conviene pronunciarla *ypsīlon*, lo que suele hacerse siempre en las Matemáticas para distinguirla de *i* que designa la unidad imaginaria.

KOLBERG

ALGEBRA