ELEMENTOS DE MATEMATICAS.

GEOMETRIA PLANA.

(EXPLICACIONES.)

QUITO.

1875.

Imp. de J. Campuzano, por J. G. Almeida.

A LOS NIÑOS.

Convencido de la grande importancia y decidida influencia que las matemáticas tienen así en la vida práctica del hombre como en el desenvolvimiento de sus facultades, me he decidido á presentaros *una serie de cuadros* que si pequeños, tienen en cambio el mérito de poner á la vista el plan general de nuestros trabajos y la utilidad que de ellos podemos sacar. Pues, no es raro que la poca aficion que se nota á un estudio tan importante provenga de que no alcanzamos á descubrir el utilísimo fin que se propone, ni el camino que debemos llevar. Ojalá que la sinceridad de mis intenciones y el positivo deseo que tengo por vuestro adelantamiento, fueran recompensados con vuestra constante aplicacion á un ramo tan importante.

ARITMETICA GENERAL

6

ÁLGEBRA

INTRODUCCION.

MATEMÁTICAS. CANTIDAD. GEOMETRÍA. ARITMÉTICA.

1. Llamamos *matemáticas* las ciencias que tratan de las cantidades en general.
2. *Cantidad* es todo lo que se puede aumentar ó disminuir.
3. Se dividen las cantidades en continuas y discretas.
4. Cantidad *continua* es aquella cuyas partes están unidas entre sí. Esta cantidad puede medirse, por lo cual se llama tambien cantidad mensurable, p. e. la superficie de un terreno.
5. Cantidad *discreta* es aquella cuyas partes no tienen union ó enlace entre sí. Por poder numerarla se llama tambien cantidad numerable, p. e. 25 caballos.
6. *Geometría* es la ciencia que tiene por objeto las cantidades continuas ó mensurables.
7. Llámase *aritmética* la ciencia que se ocupa de las cantidades discretas ó numerables.

NÚMERO.—UNIDAD.

8. Las cantidades discretas ó numerables se llaman tambien *números*.

9. *Número* es la expresion que indica cuántas veces está contenida la unidad en la pluralidad.

10. *Unidad* es la medida de la pluralidad.

DIVISION DE LOS NÚMEROS.

11. Se dividen los números:
1. en enteros y fraccionarios ó quebrados,
2. en concretos y abstractos.

12. Número *entero* es el que está formado de solas unidades enteras, p. e. 12, 20, 115.

13. El número *fraccionario ó quebrado* está formado de una ó varias partes de la unidad, p. e., $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{8}$.

14. Número *concreto* es aquel en que está determinada la unidad, p. e. 50 hombres.

15. Número *abstracto* es un número en que no está determinada la unidad, p. e., 14, 205.

16. Además se dividen los números en positivos y negativos.

17. Los números *positivos* (+) tienen un modo de ser contrario al de los negativos (—) y viceversa, así como los grados de temperatura encima del cero del termómetro son contrarios á los que están bajo del cero.

DIVISION DE LA ARITMÉTICA.

18. Se divide la aritmética en particular y general.
19. La *aritmética particular* ó la *aritmética* simplemente dicha se sirve de números expresados por cifras (números particulares ó aritméticos.)
20. La *aritmética general* ó el *álgebra* emplea números expresados por letras (números generales ó algébricos.)

PARTE TEÓRICA Y PRÁCTICA DE LA ARITMÉTICA.

21. La aritmética abraza una parte teórica y otra práctica.
22. La parte *teórica* de la aritmética consta de axiomas y teoremas.
23. Se llaman *axiomas* las verdades evidentes que no necesitan prueba.
24. *Teoremas* son verdades cuya evidencia se sigue de una prueba.
25. Se distingue en el teorema la hipótesis, la tésis, y la demostracion.
26. La *hipótesis* contiene la condicion bajo la que el teorema vale.
27. *Tésis* es la verdad que se infiere de la hipótesis.
28. *Demostracion* es la prueba de la verdad.
29. Son *recíprocos* aquellos teoremas de los cua-

les el uno tiene por hipótesis y tésis la tésis é hipótesis del otro.

30. La parte *práctica* consta de problemas.

31. *Problema* es una cuestion que exige solucion.

32. *Partes esenciales de un problema* son la propuesta, solucion y demostracion.

33. *Corolarios* son las consecuencias que se deducen fácilmente de un axioma, ó teorema, ó problema.

SIGNOS.

34. Hay varias clases de signos:

Signos *de cantidad* son las cifras y letras.

Signos *de operacion* son los de adicion $(a + b)$, sustraccion $(a - b)$, multiplicacion $(a \times b,\ a \, . \, b,\ ab)$, division $(a : b,\ \frac{a}{b})$ elevacion á potencias (a^3), extraccion de raíces $(\sqrt[m]{a})$, y formacion de logaritmos $({}_5\log.\ a)$

Signos *de relacion* son los de igualdad $(a = b)$, mayoría $(a > b)$, minoría $(a < b)$.

El *paréntesis* ( ) ó [ ] designa que los números que están dentro de él deben tomarse como un todo, y como un todo someterse á las diversas operaciones que han de hacerse de ellos.

DIVISION DEL ÁLGEBRA.

35. El álgebra se divide en los seis capítulos siguientes:

1. Preliminares.
2. Sumas y diferencias.
3. Productos y cocientes.
4. Potencias, raíces y logaritmos.
5. Ecuaciones.
6. Progresiones.

AXIOMAS GENERALES.

36. Hay siete axiomas generales:

1. Toda cantidad es igual á sí misma

$$a = a$$

2. Una cantidad se puede poner en lugar de otra igual.

$$\begin{array}{c} a + b = c \\ b = m \\ \hline a + m = c \end{array}$$

3. Dos cantidades que son iguales á una tercera son iguales entre sí.

$$\begin{array}{c} a = m \\ b = m \\ \hline a = b \end{array}$$

4. El todo es igual á sus partes juntas.

$$\begin{array}{c} m,\ n,\ r,\ \text{partes de } A \\ \hline A = m + n + r \end{array}$$

5. El todo es mayor que una de sus partes.

$$\frac{A = m + n + r}{A > m,\ A > n,\ A > r}$$

6. Cada una de las partes es menor que su todo.

$$\frac{A = m + n + r}{m < A,\ n < A,\ r < A}$$

7. Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales, los resultados son iguales.

$$\frac{\begin{array}{c} a = m \\ b = n \end{array}}{a + b = m + n,\ a - b = m - n,\ a \,.\, b = m \,.\, n \quad a : b = m : n}$$

CAPÍTULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

37. Las letras de que usa el álgebra pueden representar todos los números aritméticos; pero en el mismo problema la misma letra indica siempre el mismo número aritmético.

38. Por general convenio se han elegido las letras u, x, y, z, para representar los números incógnitos, y todas las demas para indicar los datos.

39. Las letras mayúsculas representan ordinariamente los números compuestos, p. e. $A = a + b + c$

40. Se llama *coeficiente* de un número todo lo que le multiplica.

$5\,x$, $ab\,x$, $(a + b - c)\,x$

5, ab, $(a + b - c)$ son coeficientes de x.

41. Teniendo un número el coeficiente 1, se escribe el solo número sin la cifra 1, pues un número no se altera cuando se le multiplica por 1.

42. Llámase *exponente* de un número aquel número que expresa las veces que está el primero repetido por factor, p. e., $a^3 = a.\,a.\,a.$

43. *Expresion algébrica* es un conjunto de números algébricos, ó tambien de algébricos y aritméticos unidos por medio de los signos de operacion.

$- a + (3\,ab - 4\,cd).\,mn.$

44. Teniendo un número que está solo, ó al principio de una expresion, ó al principio de un paréntesis, el signo +, no se escribe este signo.

$a \qquad a + 2\,b \qquad a\,(b - cd + 3\,m)$

45. Se llaman *términos* aquellas partes de una expresion que van precedidas ó seguidas del signo + ó —.

46. *Monomio* es una expresion que consta de un solo término; del mismo modo se llama monomio un número simple

$\dfrac{(3\,a^2\,b^3).\,4\,x\,y}{3\,m\,n} \qquad 2\,r\,s \qquad a$

47. Llámanse *binomio* y *polinomio* aquellas ex-

presiones que constan de dos, resp. de mas de dos términos.

48. *Ordenando un polinomio* se observan las reglas siguientes:

1. Se ponen los términos algébricos y en seguida el término aritmético (si hay).
2. Los términos algébricos se escriben por la posicion alfabética.
3. Los términos de la misma letra se ponen con relacion á las potencias descendientes ó ascendientes.

$6\ a^5\ b - 5\ a^3 + 12\ a^2 - ad.$

49. Se llama *valor numérico* de una expresion el valor que resulta sustituyendo á las letras números particulares, y ejecutando las operaciones indicadas. El valor numérico de 4 ab, en el supuesto de que $a = 2$, y $b = 7$, es $4.\ 2.\ 7. = 56.$

50. *Términos semejantes* son los que tienen las mismas letras, y en cada una los mismos exponentes.

$-3\ a^2\ b^4 \quad 27\ a^2\ b^4 \quad -14\ a^2\ b^4$

51. Los términos semejantes se pueden *simplificar* de modo que haya un solo término.

52. La simplificacion se hace por reduccion, cuando los términos tienen signos iguales, por destruccion, cuando tienen signos desiguales.

53. Para *reducir* términos semejantes se suman los coeficientes aritméticos, y esta suma

con el signo comun se pone por coeficiente de la parte literal:

$5\,ab + 6\,ab = 11\,ab, \quad -3\,abc - 4\,abc = -7\,abc$

54. Para *destruir* términos semejantes, se reducen los que tengan un mismo signo, y luego se resta el menor coeficiente del mayor, dando á la diferencia el signo que tenia el mayor:

$2a - 2a + 5a - 6a = 7a - 8a = -a$

CAPÍTULO SEGUNDO.

SUMAS Y DIFERENCIAS.

A. *Sumas.*

55. *Sumar* un número *a* con otro *b* es hallar un nuevo número *s* que contenga tantas unidades cuantas contienen *a* y *b* juntas.

56. *Sumandos* son los números *a* y *b*, dados para sumar.

57. Se llama *suma* el número *s*, resultado de la adicion.

58. Para sumar monomios ó polinomios se colocan los monomios, y los términos de que constan los polinomios, á continuacion unos de otros, con los mismos signos que llevaban ántes, observando las reglas de simpli-

ficacion:

$$a + (-a + b) + (a + b) = a - a + b + a + b = a + 2b$$

59. Los sumandos pueden cambiar de posicion sin que se altere el valor de la suma:

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c......$$

B. *Diferencias.*

60. *Sustraer ó restar* un número b de otro a es formar un nuevo número d que sumado con b vuelva á producir a.

61. *Minuendo* es el número a del cual se debe restar b.

62. *Sustraendo* es el número b que debe restarse.

63. El resultado de la sustraccion, d, se llama *resta ó diferencia.*

64. Para restar de un monomio ó polinomio otro monomio ó polinomio, se encierra el sustraendo aun cuando sea monomio dentro de un paréntesis; luego se escribe el minuendo, con los mismos signos que tiene, y á continuacion el sustraendo, con signos contrarios á los que llevaba ántes;

$$24\,m - (16\,m) = 24\,m - 16\,m = 8\,m$$

$$3\,rs - (4\,rs + 14\,xz) = 3\,rs - 4\,rs - 14\,xz = -rs - 14\,xz.$$

65. Queriendo mudar de signo á uno ó varios términos se debe encerrar dentro de un pa-

réntesis este término ó términos con los signos mudados, poniendo fuera del paréntesis el signo —:

$$a + b - c + d - e = a + b - (c - d + e)$$

CAPÍTULO TERCERO.

PRODUCTOS Y COCIENTES.

A. *Productos.*

66. *Multiplicar* un número a por otro b es buscar un nuevo número p que contiene a tantas veces por sumando cuantas unidades contiene b.

67. Se llama *multiplicando* el número a que se debe multiplicar.

68. *Multiplicador* es el número b por que debe multiplicarse.

69. Multiplicando y multiplicador se llaman tambien *factores*, los cuales pueden cambiar de posicion.

70. *Producto* es el número p, resultado de la multiplicacion.

71. Para multiplicar dos factores cualesquiera se observa respecto á los signos la regla siguiente:

Si los dos factores tienen signos iguales, el producto será positivo, y si signos contrarios, será negativo.

72. Para multiplicar dos ó mas monomios se observarán además las reglas siguientes:

1. Se multiplican todos los coeficientes, expresados por cifras.
2. A la derecha de este producto se escriben las letras diferentes que entran en los factores.
3. Encontrando la misma letra en dos ó mas factores se la pone una sola vez, dándole por exponente la suma de los exponentes que dicha letra tenga en los factores donde se halla.

$$-2\,a^2 b\,c^3 d^5\ .\ 25\,a\,b^3 f = -50\,a^3 b^4 c^3 d^5\,f$$

73. Para multiplicar un polinomio por un monomio (ó al contrario) se multiplica cada término del polinomio por el monomio.

$$(2\,rs - 6\,x\,y).\ 3\,rs = 6\ r^2 s^2 - 18\ r\,s\,x\,y.$$

74. Para multiplicar un polinomio por otro se multiplica cada término del uno por cada término del otro polinomio.

$$(3\ ab + 4\ cd)\ .\ (2a - 3\ bc) = 6a^2 b - 9\ ab^2 c + 8\ acd - 12\ bc^2 d.$$

75. Un polinomio, teniendo en dos ó mas términos el mismo factor, sea expresado por cifras ó letras, se puede *factorizar* poniendo dicho factor una sola vez, y dándole por multiplicador los factores con los cuales ántes estaba junto.

$$a\,x - b\,x + 10\,x\,z = x\ (a - b + 10\ z)$$

$$5\ a\,b - 10\ a\ cd = 5\ a\ (b - 2\ cd)$$

$$m - rm = m\ (1 - r)$$

76. Teniendo un polinomio que sea de factori-

zar, un factor comun con el signo – se cambian ejecutando la factorizacion todos los signos dentro del paréntesis.

$$3\,ab - 2\,cd + 4\,df = 3\,ab - 2\,d\,(c - 2\,f)$$

B. *Cocientes.*

77. *Dividir* un número *a* por otro *b* es hallar un nuevo número *c* que multiplicado por *b* vuelva á producir *a*.

78. Se llama *dividendo* el número (*a*) que debe dividirse.

79. *Divisor* es el número *b* que divide.

80. Llámase *cociente* el número *c*, resultado de la division.

81. Para dividir una cantidad por otra vale respecto á los signos la misma regla que para la multiplicacion (Nº 71.)

82. Para dividir un monomio por otro se observan además las reglas siguientes:

1. Se divide el coeficiente del dividendo, expresado por cifras, por el del divisor.
2. A la derecha de este cociente se escriben las letras que tengan en el dividendo mayor exponente que en el divisor, y las que solo se hallen en el primero, omitiendo las que entren en ambos con igual exponente.
3. A cada una de las letras que se halle en el dividendo y divisor, se le pone por exponente la diferencia entre los expo-

nentes que la misma letra lleva en el dividendo y divisor.

$$\frac{-12\,a^5b^2c^7d^4}{6\,a^2b^2c^4} = -2\,a^3c^3\,d^4$$

83. Se indica solamente la division sin efectuarla:

1. Cuando en el divisor exista alguna letra que no haya en el dividendo.
2. Cuando alguna letra tenga en el dividendo menor exponente que en el divisor.

$$\frac{abc}{-abcd} = -\frac{abc}{abc}\;\frac{1}{d} = -\frac{1}{d},\quad \frac{a}{a^3} = \frac{a}{a^3}$$

84. Para dividir un polinomio por un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio:

$$\frac{8\,a^3c-12\,abc}{4\,ac} = 2\,a^2-3\,b$$

85. Para dividir un polinomio por otro se observarán las reglas siguientes:

1. Se ordenan dividendo y divisor.
2. Se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor, y el resultado será el primer término del cociente; luego se multiplica el cociente por todo el divisor, * y este producto se resta del dividendo; despues se divide el primer término del resto por el pri-

* Potencias de la misma letra se multiplican sumando sus exponentes.

mero del divisor, y el resultado será el segundo término del cociente, etc.

$$(x^2 + 2\,x\,y + y^2) : (x + y) = x + y$$
$$x^2 + \;\; x\,y$$
$$- \quad -$$
$$x\,y + y^2$$
$$x\,y + y^2$$

86. Se indica solamente la division sin efectuarla, cuando el primer término del dividendo ó de alguno de los restos no sea divisible por el primer término del divisor:

$$(x^2 - 2\,x\,y + y^2 + z) : (x - y)$$
$$x^2 - x\,y \qquad = x - y + \frac{z}{x - y}$$
$$- \quad +$$
$$- x\,y + y^2 + z$$
$$- x\,y + y^2$$
$$+ \quad -$$
$$z$$

87. El valor de un quebrado sufre alteracion, si se suma un número juntamente con el dividendo y el divisor, ó si se resta de ellos un número.

88. El valor de un quebrado no padece alteracion, si el dividendo y el divisor juntamente se multiplican ó dividen por el mismo número:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\,m}{b\,m} = \frac{a : m}{b : m}$$

89. Para sumar ó restar quebrados que tienen

divisores iguales se suman ó restan los dividendos escribiendo el divisor una sola vez:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

90. Para sumar ó restar quebrados con divisores desiguales se da á cada uno de los quebrados divisor comun, y luego se opera como en el caso anterior:

$$\frac{g}{h}-\frac{r}{s}=\frac{gs}{hs}-\frac{hr}{hs}=\frac{gs-hr}{hs}$$

91. Para sumar un quebrado con un entero, ó bien para restar un quebrado de un entero se cambia el número entero en un quebrado cuyo divisor sea igual al del quebrado dado, y luego se opera como en el Nº 89:

$$m-\frac{n}{0}=\frac{mo}{0}-\frac{n}{0}=\frac{mo-n}{0}$$

92. Para multiplicar quebrados se multiplican dividendo por dividendo, y divisor por divisor, dividiendo el primer producto por el segundo:

$$\frac{b}{c}\cdot\frac{d}{e}=\frac{bd}{ce}$$

93 Para multiplicar un quebrado por un número entero (ó al contrario) se multiplica el dividendo por el entero, dando al producto el divisor del quebrado:

$$\frac{r}{s}\cdot t=\frac{rt}{s}$$

94. Para dividir un quebrado por otro se dividen los dividendos y divisores, y luego se divide el cociente de los dividendos por el cociente de los divisores:

$$\frac{f}{g} : \frac{h}{i} = \frac{f:h}{g:i}$$

ó se multiplica el primer quebrado por el valor recíproco del segundo:

$$\frac{f}{g} : \frac{h}{i} = \frac{f}{g}\ \frac{i}{h} = \frac{fi}{gh}$$

95. Para dividir un quebrado por un número entero se divide el dividendo por el entero, dando al cociente por divisor el divisor del quebrado:

$$\frac{m}{n} : r = \frac{m:r}{n}$$

ó se multiplica el divisor del quebrado por el número entero, dando al producto por dividendo el dividendo del quebrado:

$$\frac{m}{n} : r = \frac{m}{n\,r}$$

96. Para dividir un número entero por un quebrado se multiplica el entero por el divisor del quebrado, y luego se divide el producto por el dividendo del quebrado:

$$u : \frac{v}{z} = \frac{u\,z}{v}$$

97. Segun el Nº 86 se indica solamente la division sin efectuarla, cuando el primer término del dividendo ó de alguno de los res-

tos no sea divisible por el primer término del divisor; queriendo á pesar de esto continuar la division segun las reglas dadas, la division será infinita. Continuemos, p. e. la division del Nº 86 y tendrémos:

$$z : (x - y) = \frac{z}{x} + \frac{yz}{x^2} + \frac{y^2z}{x^3} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{l}
z - \frac{yz}{x} \\
\underline{- \quad +} \\
\qquad \frac{yz}{x} \\
\qquad \frac{yz}{x} - \frac{y^2z}{x^2} \\
\qquad \underline{- \qquad +} \\
\qquad\qquad \frac{y^2z}{x^2} \\
\qquad\qquad \frac{y^2z}{x^2} - \frac{y^3z}{x^3} \\
\qquad\qquad \underline{- \qquad +}
\end{array}$$

C. *Cero é infinito.*

98. Cuando el minuendo y el sustraendo son iguales, la diferencia será cero:
$a - a = 0$

99. El valor de un número no padece alteracion, cuando cero se suma con él ó se resta de él:
$a \pm 0 = a$

100. Un producto es cero, si uno de los factores

es cero:

$$b \cdot 0 = 0$$

101. Un cociente es cero, si el dividendo es cero:

$$\frac{0}{c} = 0$$

102. Un cociente tiene un valor indeterminado, cuando el dividendo y el divisor son cero:

$$\frac{0}{0} = a, \quad \frac{0}{0} = b, \quad \frac{0}{0} = c, \text{ etc.}$$

103. Un cociente es infinitamente grande (∞), si el divisor es infinitamente pequeño (0):

$$\frac{a}{0} = \infty.$$

104. Un cociente es infinitamente pequeño, cuando el divisor es infinitamente grande.

$$\frac{e}{\infty} = 0$$

105. Un cociente es infinitamente grande, cuando el dividendo es infinitamente grande:

$$\frac{\infty}{f} = \infty$$

D. *Medida de los números.*

106. Un número entero, sea monomio ó polinomio, que divide á otro de modo que no haya resto y el cociente sea un entero, se llama *divisor* ó *medida* del otro.

a es divisor de ab, pues $ab : a = b$.

107. Un número que divide á otros dos ó mas se llama *divisor* ó *medida comun* de estos; y si

dicho número es el máximo que los divide, se llama *máximo comun divisor* ó *máxima comun medida.*

ab es máximo comun divisor de abc y abcd, pues fuera del mismo número abc no hay mayor comun medida de ambos números.

108. Un número entero, sea monomio ó polinomio, que es divisible por otro de modo que no haya resto y el cociente sea un entero, se llama *dividendo* ó *dividuo* ó *múltiplo* del otro.

ab es múltiplo de a, pues $ab : a = b$

109. Un número que es divisible por otros dos ó mas se llama *dividendo* ó *dividuo* ó *múltiplo comun* de estos; y si dicho número es el mínimo, que es divisible por todos ellos, se llama *mínimo comun dividendo*, *dividuo* ó *múltiplo.*

abc es mínimo comun múltiplo de a, ab, ac, y bc.

110. Un número que divide á otros dos, divide tambien á la suma y diferencia de ellos.

Si m es divisor de a y b, es tambien divisor de $a \pm b$.

111. Un número que divide á otro, divide tambien á cualquier múltiplo del otro.

Si m es divisor de c, será tambien divisor de cn.

112. Si un producto divide á un número, divide tambien cada factor del producto al mis-

mo número.

Si d e es divisor de r, serán tambien d y e divisores de r.

113. Si dividiendo dos números queda un resto, el divisor que divide á ambos números será tambien divisor del resto.

Si g : h = c con el resto r, y m es divisor de g y h será tambien divisor de r.

114. Para hallar el máximo comun divisor de dos números se divide el mayor número por el menor, el menor por el resto encontrado, y así cada vez el divisor precedente por el último resto encontrado, hasta que se llegue á un resto cero: el último divisor será el máximo comun divisor buscado.

Buscar el máximo comun divisor de $12x^2 + 5x - 3$ y $6x^2 + x - 1$

$$(12x^2 + 5x - 3) : (6x^2 + x - 1) = 2$$
$$\begin{array}{r} 12x^2 + 2x - 2 \\ - \quad - \quad + \\ \hline 3x - 1 \end{array}$$

$$(6x^2 + x - 1) : (3x - 1) = 2x + 1$$
$$\begin{array}{r} 6x^2 - 2x \\ - \quad + \\ \hline 3x - 1 \\ 3x - 1 \\ - \quad + \\ \hline \end{array}$$

Luego $3x-1$, el último divisor, es el máximo comun divisor de los polinomios sobredichos.

115. Para hallar el máximo comun divisor de varios números, primeramente se buscará el de dos números; luego el del divisor comun así obtenido y un tercer número; despues el del nuevo divisor comun obtenido y un cuarto número etc; el último divisor comun será el máximo de todos los números.

116. Para hallar el mínimo comun múltiplo de dos números se busca el máximo comun divisor de ellos, y se divide por él el producto de los números dados.

117. Para hallar el mínimo comun múltiplo de varios números, primeramente se buscará el de dos números, luego el del múltiplo comun así obtenido y un tercer número, despues el del nuevo múltiplo comun obtenido y un cuarto número etc; el último comun múltiplo será el mínimo de todos los números dados.

NB. Segun lo que hemos dicho bajo *D* podemos reducir 1. los quebrados á la forma mas simple y 2. varios quebrados que tienen divisores distintos á un mismo divisor.

E. *Descomposicion de los números en sus factores.*

118. Segun el Nº 74 es

$$(a+b).(a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b).(a-b)=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b).(a-b)=a^2-b^2$$
$$(m+n).(m-n)-rs=m^2-n^2-rs$$

Sabiendo esto puedo descomponer muchas veces los números en sus factores.

$4m^2 - 9n^2 = (2m + 3n) . (2m - 3n)$

$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a + b) . (a + b) - c^2$

F. *Razones y proporciones.*

119. Llámase *razon* en general la comparacion de una cantidad con otra.

120. Comparando un número con otro se puede buscar 1 de cuanto exceda un número al otro, 2 cuantas veces un número sea mayor que el otro.
La diferencia que se busca en el 1 caso se llama *razon aritmética*, el cociente que se halla en el 2 caso, se dice *razon geométrica.*
$a - b$, $a : b$ ó $\frac{a}{b}$ se lee : a es á b

121. Los dos números de que consta la razon se llaman *términos.*

122. *Proporcion* es la igualdad de dos razones. Por haber dos especies de razones hay tambien dos especies de proporciones: aritméticas y geométricas:
$e - f = g - h$, $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$
se lee : e es á f como g es á h

123. Cada proporcion tiene cuatro términos, de los cuales el primero y segundo se llaman *primeros*, el tercero y cuarto *últimos;* además se llaman el primero y tercero *antece-*

dentes ú *homólogos*, el segundo y cuarto *consecuentes* ú *homólogos;* tambien se dicen *extremos* el primero y cuarto, *medios* el segundo y tercero.

124. Cuando los términos medios son iguales, la proporcion se llama *continua*, y cuando son desiguales *discreta*.

$l - m = m - o$ es continua

$p : m = r : s$ es discreta

125. En la proporcion continua el término medio se llama *media proporcional*.

126. En toda proporcion aritmética la suma de los términos extremos es igual á la de los medios.

$d - e = f - g \quad , \quad d + g = e + f$

127. En toda proporcion geométrica el producto de los términos extremos es igual al producto de los medios.

$h : i = l : m \, , hm = il$

128. Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, se puede formar con ellos una proporcion geométrica, poniendo por extremos los que hacen un producto, y por medios los que forman el otro.

$m\,n = rs \, , m : r = s : n$

129. A cada proporcion geométrica se le puede dar las trasformaciones que se quiera, con tal que el producto de los extremos permanezca igual al de los medios.

A. Por consiguiente la proporcion geométrica: $a : b = c : d$, no se altera:

1. Mudando de lugar los medio ó los extremos

$$a : c = b : d \quad , \quad d : b = c : a$$

2. Poniendo los medios por extremos y estos por medios.

$$b : a = d : c$$

3. Cambiando de lugar las razones

$$c : d = a : b$$

4. Multiplicando ó dividiendo un extremo y un medio por un mismo número.

$$am : bm = c : d \quad , \quad a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$$

5. Elevando todos los términos á una misma potencia ó extrayendo de ellos una misma raíz.

$$a^m : b^m = c^m : d^m \quad , \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$$

B. Por consiguiente en toda proporcion geométrica, por ejemplo, $p : q = r : s$,

1. La suma ó diferencia de los dos primeros términos es á la suma ó diferencia de los dos últimos, como el primer antecedente ó consecuente es al segundo antecedente ó consecuente.

$$p \pm q : r \pm s = p : r = q : s$$

2. La suma de los dos primeros términos es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es á su diferencia.

$$p + q : p - q = r + s : r - s$$

3. La suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á un consecuente.

$p \pm r : q \pm s = p : q$

4. La suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.

$p + r : p - r = q + s : q - s$

130. Cuando en una proporcion geométrica los antecedentes son iguales, son iguales tambien los consecuentes.

$e : f = e : h \quad , \quad e = e$ luego $f = h$

131. Cuando en una proporcion geométrica tres términos son iguales á tres términos de otra proporcion, y los términos respectivos tienen en ambas la misma posicion, son tambien iguales los cuartos términos.

$$\left.\begin{array}{l} o : p = q : r \\ o : p = q : s \end{array}\right\} \; r = s$$

132. Cuando dos proporciones tienen una razon comun, con las otras dos razones se puede formar otra proporcion.

$$\left.\begin{array}{l} l : m = o : p \\ l : m = q : r \end{array}\right\} \; o : p = q : r$$

133. Llámase *serie de razones iguales* la igualdad de varias razones de la misma especie.

$a : b = c : d = e : f....$

$a : c : e = b : d : f....$

134. En toda serie de razones iguales geométri-

cas es la suma de los antecedentes á la suma de los consecuentes, como un antecedente á un consecuente.

135. De una serie de proporciones se puede formar una nueva proporcion multiplicando entre sí los términos que tienen un mismo lugar.

$$\left.\begin{array}{l} a : b = c : d \\ e : f = g : h \\ i : l = m : n \end{array}\right\} aei : bfl = cgm : dhn$$

136. Dos cantidades de diferente especie *están en razon directa*, cuando haciéndose una de estas n veces mayor, se hace tambien la otra n veces mayor, p. e. el número de los obreros y la obra que hacen.

137. Dos cantidades de diferente especie *están en razon inversa*, cuando haciéndose una de estas n veces mayor, se hace al contrario la otra n veces menor, p. e. el número de los obreros y el tiempo que necesitan par acabar una obra.

138. Dos cantidades están con otras *en razon compuesta*, cuando en un respecto se tienen como dos de las otras, en otro respecto como otras dos de las mismas, etc., p.e.

Si a es á b en un respecto como c es á d
y a es á b en otro respecto como e es á f
y a es á b en un tercer respecto como g es á h
será $a : b = ceg : dfh$

$$ó \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h}$$

NB. Por medio de lo dicho bajo F podemos resolver los problemas que se resuelven segun la regla de tres simple y compuesta, de interes simple, de descuento, de compañía, y de aligacion.

CAPÍTULO CUARTO.

POTENCIAS, RAÍCES Y LOGARITMOS.

A. *Potencias.*

139. *Elevar* un número a *á la potencia* n es formar un nuevo número P, poniendo a tantas veces por factor cuantas n contiene la unidad.
140. El número a que se debe elevar á la potencia, se llama *base.*
141. *Exponente* es el número n que indica cuantas veces a se debe tomar por factor y que por esto indica el grado de la potencia.
142. Llámase *potencia* el número P, resultado de la operacion.
143. La elevacion á la potencia se indica escribiendo la base una vez y poniendo el exponente á la derecha un poco mas alto.

$a^n = P$ se lee : a á la potencia n es P

ó a á la n es P

ó la n^{esima} potencia de a es P

144. Las potencias de la misma base se multiplican entre sí sumando sus exponentes y dando la suma obtenida por exponente á la base comun que se escribe una sola vez.

$a^m . a^n = a^{m+n}$

145. Las potencias de la misma base se dividen una por otra restando el menor exponente del mayor, y dando el resto obtenido como exponente á la base comun, que se escribe una sola vez.

$b^r : b^s = b^{r-s}$

146. Las potencias del mismo exponente se multiplican entre sí multiplicando las bases y dando al producto obtenido el exponente comun, que se escribe una sola vez.

$c^p . d^p = (cd)^p$

147. Las potencias del mismo exponente se dividen una por otra dividiendo las bases y dando al cociente obtenido el exponente comun, que se escribe una sola vez.

$e^3 : f^3 = (e : f)^3$

148. Una potencia se eleva á otra potencia multiplicando los exponentes.

$(g^x)^y = g^{x.y}$

149. Cualquier potencia de la unidad es la unidad.

$1^m = 1$

150. La primera potencia de cualquier número es el número mismo.

$a^1 = a$

151. Cualquier potencia de cero es cero.

$0^n = 0$

152. Cualquier número elevado á la potencia cero es la unidad.

$b^0 = 1$

153. Elevar un número á una potencia con exponente positivo es multiplicar, con exponente negativo es dividir 1 por la misma potencia con exponente positivo.

$a^m = 1\ a^m \qquad a^{-m} = 1 : a^m$

154. Todos los teoremas sobre las potencias valen tambien si el exponente es cero ó negativo.

155. Elevando el binomio $(a + b)$ á la primera, cuadrada, cúbica, cuarta.... potencia se reciben los resultados siguientes:

$(a + b)^1 = a + b$
$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$
$(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 + 4\,a\,b^3 + b^4$

Con esto se ve:

1. El desarrollo de cada una de estas potencias contiene tantos términos, cuantas unidades tiene el exponente del binomio mas uno.
2. El primero y último término del desarrollo contienen siempre el primero y el último término del binomio, elevados á la potencia que tiene el binomio.

3. Los otros términos del desarrollo contienen los dos términos del binomio por factores, y se observa que las potencias de a en cada término consecutivo decrecen por un grado, y que los de b crecen.
4. Dos coeficientes que tienen la misma distancia del término medio (ó de los terminos medios) son siempre iguales.
5. El primer coeficiente es siempre la unidad.
6. El segundo coeficiente tiene la suma del primero y segundo coeficiente del desarrollo antecedente; el tercero la suma del segundo y tercer coeficiente del desarrollo antecedente etc.; ó
el segundo coeficiente es igual al exponente del binomio, p. e. 8 ó $\frac{8}{1}$ el tercero $\frac{8}{1}\frac{7}{2}$, el cuarto $\frac{8}{1}\frac{7}{2}\frac{6}{3}$, el quinto $\frac{8}{1}\frac{7}{2}\frac{6}{3}\frac{5}{4}$ etc.

156. Cualquier potencia que tiene una base positiva, es positiva; una potencia que tiene una base negativa, es positiva, cuando el exponente es un número par; pero negativa, cuando el exponente es un número impar.

157. Por medio de lo dicho podemos hallar todos los términos de $(a \pm b)^n$, poniendo en lugar de n cualquier número aritmético.

$$(a \pm b)^8 = a^8 \pm 8a^7b + 28a^6b^2 \pm 56a^5b^3 + 70a^4b^4 \pm 56a^3b^5 + 28a^2b^6 \pm 8ab^7 + b^8$$

B. *Raíces.*

158. Por medio del cálculo con potencias se puede hallar la potencia, si la base y el exponente son conocidos. Si, por el contrario, la base es incógnita, pero la potencia y el exponente son conocidos, el cálculo se convierte en *la extraccion de la raíz*

159. *Extraer* de un número a *la raíz* del grado n es hallar un nuevo número r, que elevado á la potencia n vuelva á producir el número a.

160. El número a del que se debe extraer la la raíz se llama *subradical*.

161. *Índice* es n que indica el grado de la raíz.

162. Llámase *raíz* el número r, resultado de la operacion.

163. La extraccion de raíz se indica, poniendo delante del subradical el signo $\sqrt{\ }$, y escribiendo en el ángulo del mismo signo el índice.

$$(a^n = P) \qquad \sqrt[n]{a} = r$$

se lee: la n^{esima} raíz de a es r

164. Para escribir la raíz cuadrada no se pone el índice 2, p. e. $\sqrt{a}$

165. Raíces del mismo índice se multiplican entre sí multiplicando los subradicales y dando al producto el índice comun que se escribe una sola vez:

$$\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab}$$

166. Raices del mismo índice se dividen una por otra dividiendo los subradicales y dando al cociente el índice comun que se escribe una sola vez:

$$\sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{c:d}$$

167. Una raiz no cambia de valor multiplicando ó dividiendo el índice y el exponente por un mismo número entero:

$$\sqrt[x]{a^{y}} = \sqrt[xn]{a^{yn}} \qquad \sqrt[x]{a^{y}} = \sqrt[x:n]{a^{y:n}}$$

168. Cuando un número tiene que elevarse á una potencia y despues se debe extraer la raiz al resultado, el órden de las dos operaciones se puede invertir sin que se altere el valor del resultado:

$$\sqrt[m]{a^{n}} = (\sqrt[m]{a})^{n}$$

169. Para extraer la raiz á otra se multiplican los índices de las dos raices:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

170. Cualquier raiz de la unidad es la unidad

$$\sqrt[m]{1} = 1$$

171. La primera raiz de cualquier número es el número mismo:

$$\sqrt[1]{a} = a$$

172. Cualquier raiz de cero es cero:

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

173. El resultado de una raiz cuyo índice es cero y cuyo subradical es la unidad, puede ser cualquier número:

$$\sqrt[0]{1} = b$$

C. *Potencias y raices con exponentes resp. índices fraccionarios.*

174. Así como la sustraccion es la inversion de la adicion, y la division la de la multiplicacion, del mismo modo es la extraccion de raiz la inversion de la formacion de potencias:

$$a + b - b = a, \quad \frac{ab}{b} = a, \quad \sqrt[b]{a^b} = a$$

175. De lo dicho se infiere:

1 Una raiz se puede escribir como potencia del subradical con un exponente que es el índice invertido:

$$\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}.$$

2 Una raiz con índice fraccionario equivale á una raiz que tiene por índice el dividendo y por exponente el divisor del índice fraccionario:

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{b} = \sqrt[m]{b^{n}}$$

3 Una raiz con índice negativo equivale á la unidad dividida por la misma raiz con índice absoluto:

$$\sqrt[-x]{c} = \sqrt[\frac{1}{x}]{c}$$

176. Todos los teoremas para potencias y raices con exponentes resp. índices enteros, valen tambien para potencias con exponentes fraccionarios, y para raices con índices fraccionarios y negativos.

D. *Extranccion de la raiz cuadrada y cúbica de un polinómio.*

177. Segun el Número 74 es:

$$(a+b)^2 = a^2 + a\,b + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 + 2\,(a+b)\,c + c^2$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 + 2\,(a+b)\,c + c^2 + 2\,(a+b+c)\,d + d^2$$

Con esto se ve ya el desarrollo de las potencias cuadradas, el cual se debe saber para poder extraer la raiz cuadrada de polinomios.

178. Para extraer la raiz cuadrada de un polinomio se observan las reglas siguientes:

1 Se ordena el polinomio.

2 Se forma la raiz cuadrada del primer término, la cual será el primer término de la raiz buscada.

3 Se resta el cuadrado de este término encontrado del polinomio.

4 Se divide el resto por el doble de la raiz ya obtenida; el cociente será el segundo término de la raiz buscada.

5 Se multiplica el divisor por el último término de la raiz recien hallada, y se resta el producto.

6 Se eleva el último término de la raiz al cuadrado, y se resta este cuadrado.

7 Se divide el resto por el doble de la raiz ya obtenida; el cociente será el tercer término de la raiz buscada.

&a. &a &a.

$$\sqrt{9a^2 - 6ab + b^2 + 30ac - 10bc + 25c^2 + 6ad - 2bd + 10cd + d^2}$$

$$-9a^2 \qquad = 3a - b + 5c + d$$

$$-6ab : 6a$$

$$-6ab$$

$$+$$

$$+b^2$$

$$+b^2$$

$$+30\,ac - 10\,bc : 6\,a - 2\,b$$
$$+30\,ac - 10\,bc$$
$$- \qquad +$$

$$+25\,c^2$$
$$+25\,c^2$$
$$-$$

$$+6\,ad - 2\,bd + 10\,cd : 6\,a - 2\,b + 10$$
$$+6\,ad - 2\,bd + 10\,cd$$
$$- \qquad + \qquad -$$

$$+d^2$$
$$+d^2$$
$$-$$

179. Tenemos:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^3$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^3 + 3\,(a+b)^2\,c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3$$

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3\,a^2 b + 3\,ab^2 + b^3 + 3\,(a+b)^2\,c + 3\,(a+b)\,c^2 + c^3 + 3\,(a+b+c)^2\,d + 3\,(a+b+c)\,d^2 + d^3$$

Con esto se ve el desarrollo de las potencias cúbicas, el cual se debe saber queriendo extraer la raiz cúbica de un polinomio.

180. Para extraer la raiz cúbica de un polinomio se observan las reglas siguientes:

1 Se ordena el polinomio.

2 Se forma la raiz cúbica del primer término, la cual será el primer término de la raiz buscada.

3 Se resta el cubo de este término encontrado del polinomio.

4 Se divide el resto por el triple del cuadrado de la raiz ya obtenida; el cociente será el segundo término de la raiz buscada.

5 Se multiplica el divisor por el último término de la raiz recien hallada, y se resta el producto.

6 Se resta el triple del producto, formado del primer término y del cuadrado del segundo de la raiz ya obtenida.

7 Se eleva el último término de la raiz al cubo, y se resta este cubo.

8 Se divide el resto por el triple del cuadrado de la raiz encontrada; el cociente será el tercer término de la raiz buscada.

9 Se multiplica el divisor por el último de la raiz recien hallada y se resta el producto.

10 Se resta el triple del producto, formado de la suma de los dos primeros términos y del cuadrado del tercer término de la raiz ya obtenida.

&a. &a. &a.

$$\sqrt[3]{y^6 - 6y^5 + 21y^4 - 44y^3 + 63y^2 - 54y + 27} = y^2 - 2y + 3$$

$$y^6$$

$$-6y^5 : 3y^4$$

$$-6y^5$$

$$+$$

$$+21y^4$$

$$+12y^4$$

$$-$$

$$+9y^4 - 44y^3$$

$$-8y^3$$

$$+$$

$$9y^4 - 36y^3 + 63y^2 : 3y^4 - 12y^3 + 12y^2$$

$$\begin{array}{rrr}
9y^4 & -36y^3 & +36y^2 \\
- & + & - \\
\hline
 & & +27y^2 - 54y \\
 & & +27y^2 - 54y \\
 & & - \quad\ + \\
\hline
 & & +27 \\
 & & +27 \\
 & & - \\
\hline
\end{array}$$

181. Acerca de los signos que pueden tener las raices valen las reglas siguientes:

1 Una raiz con índice impar es positiva, cuando el subradical es positivo.

2 Una raiz con índice impar es negativa, cuando el subradical es negativo.

3 Una raiz con índice par puede ser positiva ó negativa, cuando el subradical es positivo.

4 Una raiz con índice par no puede ser ni un número positivo, ni un número negativo, cuando el subradical es negativo.

E. *Logaritmos.*

182. Por medio del cálculo con potencias se puede hallar la potencia, si la base y el exponente son conocidos. Si, por el contrario, el exponente es incógnito, pero la potencia y la base son conocidas, el cálculo se convierte en la *formacion del logaritmo.*

183. *Formar ó tomar el logaritmo* de un número a respecto á otro número b es buscar un nuevo número l que siendo exponente de b vuelva á producir el número a.

184 El número a de que se busca el logaritmo se llama *número.*

185. Llámase *base* el número b.

186. El *logaritmo* es el número l, resultado de la operacion.

187. La formacion del logaritmo se indica, poniendo delante del *número* el signo log y escribiendo la base á la izquierda de

este signo un poco mas alto.

$$(b^{l} = a) \qquad {}^{b}\log a = l$$

y se lee : el logaritmo de a para la base b es l.

188. El logaritmo depende de la base:

$${}^{2}\log 4096 = 12 \quad \text{pues} \quad 2^{12} = 4096$$

$${}^{16}\log 4096 = 3 \quad \text{pues} \quad 16^{3} = 4096$$

189. La reunion de todos los números enteros, consecutivos con sus logaritmos correspondientes para la misma base, se llama un *sistema de logaritmos*, por lo cual pueden haber muchos sistemas, pues cualquier número positivo puede admitirse como base.

190. De todos los sistemas posibles solo dos suelen emplearse :

1 El sistema *vulgar* ó de *Briggs*, cuya base es 10.

2 El sistema *natural* ó de *Neper*, cuya base es 2, 718281828......

191. El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores :

$$\log (m \cdot n) = \log m + \log n$$

192. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo ménos el logaritmo del divisor :

$$\log (r : s) = \log r - \log s$$

193. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia :

$$\log a^{n} = n \log a$$

194. El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo del subradical dividido por el índice de la raiz:

$$\log \sqrt[m]{c} = \frac{1}{m} \log c$$

195. El logaritmo de la base, en cualquier sistema, es la unidad:

$$\log_a a = 1$$

196. El logaritmo de la unidad, en cualquier sistema, es cero:

$$\log_b 1 = 0$$

CAPITULO QUINTO.

ECUACIONES.

A. *Preliminares.*

197. Llámase *ecuacion* la expresion algébrica de la igualdad de dos números por medio del signo de igualdad.

198. Los *miembros* de la ecuacion son los dos números reunidos por medio del signo de igualdad.

199. Hay tres clases de ecuaciones:

1. La ecuacion *idéntica* tiene por miembros los mismos números con la misma forma:

$$a = a, \ (m-n)^2 = (m-n)^2$$

2 La ecuacion *analítica* tiene por miembros números del mismo valor, pero de diferente forma:

$a\,(a+b) = a^2 + a\,b$

3 La ecuacion *sintética* tiene números que dependen unos de otros:

x = 2 y

200. Un número que depende de otro de manera que cambiándose este se cambie aquel se llama una *funcion del otro* En la ecuacion p. e. x = 25*y* es x una funcion de y; tambien es y una funcion de x.

201. Uno de los dos números que están en una funcion es *dependiente* y el otro *independiente*. Tomando p. e. en la ecuacion x = 45 z para x cualquier valor será x el número independiente, y luego tomará z valor determinado, que depende del valor de x, y por esto z será el número dependiente.

202. En la misma ecuacion x = 45 z los números x y z son números *variables* por poder tomar una infinidad de valores diferentes que satisfacen la ecuacion. Uno de los variables es el *variable independiente* y el otro el *variable dependiente*.

203. El objeto de las ecuaciones es buscar números desconocidos, por lo cual los números que entran en las ecuaciones se dividen en conocidos (*conocidas* sc. cantidades) y desconocidos (*incógnitas* sc. cantidades.)

204. Las ecuaciones se dividen en:

1 Ecuaciones con *una* ó con *dos ó mas* incógnitas

ax+b y = x + d + e — f [2 incógnitas]

2 Ecuaciones *determinadas* é *indeterminadas.* Las ecuaciones se llaman determinadas, cuando hay tantas ecuaciones cuantas incógnitas; las ecuaciones se llaman indeterminadas, cuando hay mas incógnitas que ecuaciones:

$x + y = 10$ [indeterminada.]

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 6y = 20 \\ x + 5y = 54 \end{array}\right\} \text{[determinadas.]}$$

3 Ecuaciones del 1. 2. 3.....n simo grado.

$\frac{4}{5}x - 3 = x - 7$ es del 1. grado

$x^2 - 2[a - b]x = ab$ es del 2. grado

$x^3 + ax = b$ es del 3. grado

4 Ecuaciones *algébricas* y *exponenciales.* Son algébricas cuando las incógnitas están contenidas como base de una potencia; en cualquier otro caso son exponenciales:

$\frac{x}{a} - b = c$ [algébrica.]

$m^x = n$ [exponencial.]

B. *Preparacion y resolucion de las ecuaciones.*

205. *Preparar* ú *ordenar* una ecuacion es transformarla en otra equivalente, que reuna las circunstancias siguientes.

1 Que no tenga la incógnita afectada de un signo radical.
2 Que no tenga la incógnita como divisor.
3 Que todos los términos que contienen la incógnita formen el primer miembro.
4 Que el primer miembro esté ordenado segun las potencias decrecientes de la incógnita.
5 Que la suprema potencia de la incógnita sea positiva.

$$a x^3 + x^2 - bx = c$$ [ordenada.]

206. *Resolver* una ecuacion es determinar el valor de la incógnita ó incógnitas que satisfaga la ecuacion.

207. El valor de la incógnita que verifica la ecuacion se llama *raiz* de la ecuacion: $3x + 25 = 37 + x + 2$ [la raiz es 7.]

C. *Resolucion de ecuaciones de primer grado con una incógnita.*

208. Para resolver las ecuaciones de primer grado con una incógnita basta observar las 5 reglas dadas en N° 205 y las 5 siguientes:
6 Se quitan todos los divisores multiplicando la ecuacion por el mínimo comun múltiplo de los divisores. [N° 117.]
7 Se resuelven todos los paréntesis. [N° 58 y 64.]
8 Se simplifican todos los términos semejantes. [N° 52 — 54.]
9 Se dividen todos los términos por un comun factor siempre que se pueda.

10 Se factoriza la incógnita [Nº 75.]

$$\sqrt{4x^2 - 7x - 6} = 9 - 2x$$

$$\left.\begin{aligned} 4x^2 - 7x - 6 &= [9 - 2x]^2 \\ &= 81 - 36x + 4x^2 \end{aligned}\right\} \text{1 regl.}$$

$$4x^2 - 7x + 36x - 4x^2 = 81 + 6 \qquad \text{3 regl.}$$

$$4x^2 - 4x^2 \times 36x - 7x = 81 + 6 \qquad \text{4 regl.}$$

$$29x = 87 \qquad \text{8 regl.}$$

$$x = 87 : 29 = 3 \qquad \text{9 regl.}$$

D. *Planteo de problemas.*

209. Para resolver un problema es preciso *plantearlo*, es decir: expresar sus condiciones en forma algébrica. Planteando un problema se observan las reglas siguientes:

1 Se busca la cantidad que es verdaderamente la incógnita y por medio de la cual se pueden hallar todas las otras cantidades que se buscan.

2 Se efectúan con la incógnita todas las operaciones indicadas en el problema.

3 Se busca en el enunciado del problema la doble expresion de la misma cantidad que sirva de fundamento á la ecuacion.

. . . .

E. *Resolucion de ecuaciones de primer grado con dos ó mas incógnitas.*

210. Por medio de dos ecuaciones con dos ni-

cógnitas, ó de n ecuaciones con n incógnitas se puede determinar el valor de cada una. A este fin se deben *eliminar* las incógnitas, de manera que salga una sola ecuacion con una sola incógnita.

211. Los diferentes métodos de eliminacion son los siguientes:

I. *Método de sustitucion.*

$x + y + z = 14$ .... [1]
$2x + 5y - 4z = 1$ .... [2]
$7x - 2y + 3z = 25$ .... [3]

De la ecuacion [1] se sigue que

$x = 14 - y - z$ .... [4]

Póngase el valor de x en las ecuaciones [2] y [3] y se tiene

$2[14 - y - z] + 5y - 4z = 1$
$7[14 - y - z] - 2y + 3z = 25$

Quitando los paréntesis será

$28 - 2y - 2z + 5y - 4z = 1$
$98 - 7y - 7z - 2y + 3z = 25$

Simplificando los términos semejantes y poniendo en el mismo miembro las incógnitas se tiene

$3y - 6z = -27$ .... [5]
$9y + 4z = 73$ .... [6]

De la ecuacion [5] se sigue que

$$y = \frac{6z - 27}{3} = 2z - 9 \quad\text{.... ....[7]}$$

Sustituyendo el valor de y en la ecuacion [6] se sigue que

$9[2z - 9] + 4z = 73$ .... [8]

Buscando el valor de z se tendrá

$22\ z = 154$

$z = 154 : 22 = 7$

Sustituyendo este valor de z en (7) será

$y = 14 - 9 = 5$

En fin, sustituyendo los valores de z é y en (4) se tiene

$x = 14 - 5 - 7 = 2$

II. *Método de comparacion.*

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se sigue que

$$x = 14 - y - z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

$$x = \frac{1 - 5y + 4z}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}$$

$$x = \frac{25 + 2y - 3z}{7} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(c)}$$

Comparando (a) con (b) y (a) con (c) se tiene

$$14 - y - z = \frac{1 - 5y + 4z}{2} \ldots\ldots\ldots \text{(d)}$$

$$14 - y - z = \frac{25 + 2y - 3z}{7} \ldots\ldots\ldots \text{(e)}$$

De (d) y (e) se sigue que

$$y = -9 + 2z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(f)}$$

$$y = \frac{73 - 4z}{9} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(g)}$$

Comparando (f) con (g) será

$$-9 - 2z = \frac{73 - 4z}{9} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(h)}$$

El valor de z será 7 etc. etc. etc.

III. *Método de adicion ó sustraccion.*

Multiplicando (1) por 2 y restando (2) de la nueva ecuacion se tiene

$$\begin{array}{rrrrl} 2x & +\,2y & +\,2z & = 28 & \ldots\ldots\ldots\ldots(r) \\ 2x & +\,5y & -\,4z & = \;\,1 & \\ - & - & + & - & \\ \hline & -\,3y & +\,6z & = 27 & \ldots\ldots\ldots\ldots(s) \end{array}$$

Multiplicando (1) por 7 y restando (3) de la nueva ecuacion será

$$\begin{array}{rrrrl} 7x & +\,7y & +\,7z & = 98 & \\ 7x & -\,2y & +\,3z & = 25 & \\ - & + & - & - & \\ \hline & 9y & +\,4z & = 73 & \ldots\ldots\ldots\ldots(t) \end{array}$$

Ahora multiplíquese (s) por 3 y súmese (s) con (t)

$$\begin{array}{rrl} -\,9y & +\,18z & = 81 \\ 9y & +\,4z & = 73 \\ \hline & 22z & = 154 \end{array}$$

El valor de z es 7

etc. etc. etc.

F. *Resolucion de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.*

212. Una ecuacion ordenada de segundo grado puede contener tres clases de términos: 1) un término con el cuadrado de la incógnita, 2) un término con la primera potencia de la incógnita y 3) un término conocido independiente de la incógnita.

$$x^2 + a x + b = o$$

213. Tal ecuacion de segundo grado que contiene todos los términos posibles, se llama *completa*; será *incompleta* faltando el segundo ó el tercer término.

$$x^2 + a x = o \qquad x^2 + b = o$$

214. Para resolver la completa se escribirá la misma en la forma

$$x^2 + a x = -b$$

y se podrán considerar los dos términos del primer miembro como los dos primeros términos del cuadrado del binomio

$(x + \frac{a}{2})^2$ Añadiendo $(\frac{a}{2})^2$ ó $\frac{a^2}{4}$ tendremos $x^2 + a x + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$

Extrayendo la raíz cuadrada se infiere

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

215. Se resuelve la primera incompleta de la misma manera como la completa. El valor de x será

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}}$$

216. Para resolver la segunda incompleta sea $b = -c$ y será

$$x^2 - c = 0$$

$$x^2 = c$$

$$x = \pm \sqrt{c}$$

217. De lo que hemos dicho en el Nº 214–216 se notará que el doble signo de la raís hace que la incógnita tenga dos valores, uno cuando la raíz se toma con + y otro cuado con —. Estos dos valores se llaman *raíces de la ecuacion*, de modo que toda ecuacion de segundo grado tiene dos raíces y no puede tener mas de dos.

G. *Relacion entre las cantidades conocidas de una ecuacion completa de segundo grado y sus raíces.*

118. Las dos raíces de

$$x^2 + a\,x + b = 0$$

son las siguientes:

$$x' = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} - b}$$

$$x'' = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{2} - b}$$

La suma de estas dos raíces es — a

El producto " " " " + b

Luego en una ecuacion completa de segundo grado

1. La *suma de las raíces* es igual al coeficiente de la incógnita de segundo término con signo opuesto.
2. El *producto de las raíces* es igual al tercer

término, que es conocido.

219. Queriendo formar una ecuacion de segundo grado, cuyas raíces sean números aritméticos ó algébricos, se escribe x^2, luego la suma de dichos números, con signo contrario, por coeficiente de x, y por término conocido el producto de los mismos números.

Si las raíces de la ecuacion son 4 y 2, la ecuacion será

$$x^2 - (4 + 2)x + 4 . 2 = o$$
$$x^2 - 6x + 8 = o$$

H. *Resolucion de las ecuaciones de segundo grado con dos ó mas incógnitas.*

220. Las ecuaciones de segundo grado con dos ó mas incógnitas se resuelven de una manera análoga á las de primer grado de la misma clase.

J. *Ecuaciones indeterminadas ó diofánticas.* (*)

221. Cuando el número de las incógnitas excede al número de las ecuaoiones dadas para resolver, pueden tomar las incógnitas una infinidad de valores diferentes, por lo cual se llaman tales ecuaciones *indeterminadas.*

(*) Diofanto vivió cerca de 340 años despues de Cristo en Alejandría.

$$a\,x \pm b\,y = c$$

222\. Si se exige que sean *enteros y positivos* los valores de las incógnitas, no puede ser infinito el número de soluciones, y aun á veces la solucion del problema será imposible.

$$3\,x + 5\,y = 10$$

Exigiendo que sean enteros y positivos los valores de x é y será imposible la solucion de esta ecuacion.

223\. El objeto del cálculo con ecuaciones indeterminadas es hallar los valores enteros y positivos de las incógnitas de estas.

224\. Para resolver la ecuacion $ax \pm by = c$ se observarán las reglas siguientes:

1. Se busca el valor de la incógnita que tiene el menor coeficiente, como si la otra fuese conocida.
2. Se expresa el cociente así encontrado por un entero y un quebrado, y este quebrado se pone igual á una tercera incógnita p.
3. La nueva ecuacion así formada se resuelve buscando la segunda incógnita por medio de la tercera, expresando el nuevo cociente que se encuentra de igual modo por un entero y un quebrado, y este nuevo quebrado se pone igual á una cuarta incógnita q.
4. Repitiendo siempre el mismo procedimien-

to, finalmente se encontrará para una de las incógnitas auxiliares un valor que no es fraccionario, sino entero.

5 Este valor se sustituye en la ecuacion de las incógnitas que precede inmediatamente, por lo cual se obtiene la incógnita precedente; y sustituyendo el valor de esta en la ecuacion que precede, se hallará otra incógnita etc., etc.

6 Hallando la última incógnita auxiliar con sus valores diferentes finalmente se determinarán los valores correspondientes de las incógnitas buscadas.

$$3x + 5y = 49$$

$$x = \frac{49 - 5y}{3} = 16 - y + \frac{1 - 2y}{3}$$

Sea $\frac{1 - 2y}{3} = p$

$$y = \frac{1 - 3p}{2} = -p + \frac{1 - p}{2}$$

Sea $\frac{1-p}{2} = q$

$$p = 1 - 2q$$

Por sustitucion sucesiva es

$$p = 1 - 2q$$

$$y = -p + q = -(1 - 2q) + q = -1 + 3q$$

$$\begin{aligned} x &= 16 - y + p \\ &= 16 - (-1 + 3q) + (1 - 2q) \\ &= 16 + 1 - 3q + 1 - 2q \\ &= 18 - 5q \end{aligned}$$

Ahora x ha de ser un número positivo y por consiguiente debe ser $5q < 18$ y $q < \frac{18}{5}$ ó $< 3\frac{3}{5}$. Como tambien q ha de ser un número entero, el *máximo valor* de q será 3.

Además en la ecuacion penúltima y ha de ser positivo, luego $3q > 1$ y $q > \frac{1}{3}$. Pero como tambie q, como dijimos ya, ha de ser un número entero, el *mínimo valor* de q será 1.

Luego para q no se pueden tomar sino los valores 1, 2, 3, y por consiguiente las dos últimas ecuaciones darán los valores de x é y que se buscan:

$$\begin{aligned} x &= 18 - 5 \cdot 1 = 13 & \quad y &= -1 + 3 \cdot 1 = 2 \\ &= 18 - 5 \cdot 2 = 8 & &= -1 + 3 \cdot 2 = 5 \\ &= 18 - 5 \cdot 3 = 3 & &= -1 + 3 \cdot 3 = 8 \end{aligned}$$

CAPÍTULO SÉXTO.

PROGRESIONES.

A. *Preliminares.*

225. Llámase *progresion* cualquier continuacion de términos que se derivan unos de otros segun una ley determinada. Es *creciente ó decreciente* una progresion, segun que vayan los términos aumentando ó disminuyendo.

226. Hay cuatro clases de progresiones:

1 *Progresion aritmética simple* es aquella en que se deriva cualquier término del precedente *sumando con este un número constante* llamado *diferencia.*

8, 12, 16, 20, 24.......(dif. 4)

2 *Progresion geométrica simple* es aquella, en que se deriva cualquier término del precedente *multiplicando con este un número constante* llamado *cociente:*

3, 9, 27, 81, 243........(coc. 3)

3 *Progresion aritmética compuesta* es aquella que tiene por términos los productos de los términos correspondientes de dos ó mas progresiones aritméticas simples:

2	5	8	11	14	....(dif. 3)
3	7	11	15	19	....(dif. 4)
6	35	88	165	266	......

4 *Progresion aritmético-geométrica* es la que tiene por términos los productos de los términos correspondientes de una progresion aritmética y otra geométrica:

$$2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 10\ ....(\text{dif. } 2)$$
$$\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{6}\ ,\ \frac{1}{12}\ ,\ \frac{1}{24}\ ,\ \frac{1}{48}\ ....(\text{coc. } \tfrac{1}{2})$$
$$\frac{2}{3}\ ,\ \frac{4}{6}\ ,\ \frac{5}{12}\ ,\ \frac{8}{24}\ ,\ \frac{10}{48}\ ....$$

B. *Progresiones aritméticas simples.*

227. Siendo el primer término de una progresion aritmética simple a y la diferencia d, será la progresion

$a\ ,\ a + d\ ,\ a + 2\,d\ ,\ a + 3\,d\ldots\ldots$

Teniendo la progresion 20 términos será el último $a + (20 - 1)\,d$

Teniendo la progresion n términos será el último $a + (n - 1)\,d$

Designando el último término por t se sigue que

$$t = a + (n - 1)\,d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

228. Escribiendo la progresion dos veces, la último vez en órden invertido, y sumando ambas progresiones, la suma de los términi- correspondientes será igual:

$$\begin{array}{l} a + (a + d) + (a + 2\,d) + (a + 3\,d) + \ldots \\ t + (t - d) + (t - 2\,d) + (t - 3\,d) + \ldots \\ \hline (a+t) + (a+t) + (a+t) + (a+t) + \ldots \end{array}$$

Esta progresion es la suma de los dos precedentes. Siendo el número de los términos $= n$, será la suma $= n\,(a + t)$, luego la suma de cada una de las progresiones precedentes $= \frac{n}{2}(a + t)$ ó

$$s = \frac{n}{2}\,(a + t) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Sustituyendo el valor de t que está en (1) resulta

$$s = \frac{n}{2}\,[a + a + (n - 1)\,d]$$

$$= \frac{n}{2}\,[2\,a + (n - 1)\,d] \ldots\ldots\ldots (3)$$

229. Las fórmulas (1) y (2) contienen cinco can-

tidades: a, d, n, t, s; dadas tres de estas se pueden hallar las otras dos.

C. *Progresiones geométricas simples.*

230. Siendo el primer término de una progresion geométrica simple a y el cociente q será la progresion:

$$a\,,\ aq\,,\ aq^2\,,\ aq^3 \ldots\ldots$$

Teniendo la progresion n términos será el último aq^{n-1}

Designando el último término por t tendremos

$$t = aq^{n-1} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

231. Para hallar la suma de una progresion geométrica se pondrá:

$$s = a + aq + aq^2 \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

$$sq = aq + aq^2 + aq^3 \ldots + aq^{n-1} + aq^n$$

Restando la primera de la segunda se sigue que

$$sq - s = aq^n - a$$

$$s(q-1) = a\,(q^n-1)$$

$$s = \frac{a\,(q^n-1)}{q-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

232. Efectuando en (2) la multiplicacion por a tendremos

$$s = \frac{aq^n - a}{q-1}$$

Poniendo en la fórmula encontrada

$aq^n = aq^{n-1} \cdot q = tq$ se sigue que

$$s = \frac{tq-a}{q-1} \text{..................(3)}$$

233. En las fórmulas (1), (2) y (3) hay cinco cantidades: a, q, n, t, s; dadas tres de estas se pueden hallar las otras dos.

NB. Por medio de lo dicho bajo C podemos resolver los problemas del interes compuesto y de las rentas.

D. *Suma de las potencias de los números naturales.*

234. La suma de las *primeras* potencias de los números naturales se halla inmediatamente por la fórmula:

$$s = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \quad (\text{N}^{\text{o}}\ 228)$$

Designando esta suma por $S\,n$, se tiene

$$S\,n = 1+2+3\ldots\ldots+(n-1)+n = \frac{n}{2}(n+1)$$

235. Para buscar la suma de los *cuadrados* póngase

$$1^3 = \text{..............................} 1$$

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3\,.\,1^2 + 3\,.\,1 + 1$$

$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3\,.\,2^2 + 3\,.\,2 + 1$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \, . \, n^2 + 3 \, . \, n + 1$$

Súmense todas estas ecuaciones y quítense las series

$1^3 + 2^3 \ldots . + n^3$ que vienen en ambos lados con signos iguales y resultará

$$(n+1)^3 = 3\,(1^2 + 2^2 \ldots + n^2) + 3\,(1 + 2 \ldots + n) + (n+1)$$

$$(n+1)^3 = 3\,S\,n^2 + 3\,S\,n + (n+1)$$

De donde se sigue que

$$3\,S\,n^2 = (n+1)^3 - 3\,S\,n - (n+1)$$

Sustituyendo el valor de S n tendremos

$$3\,S\,n^2 = (n+1)^3 - 3\left[\frac{1}{2} n\,(n+1)\right] - (n+1)$$

$$= (n+1)^3 - \frac{3}{2} n\,(n+1) - (n+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\,(n+1)^3 - 3\,n\,(n+1) - 2\,(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\,(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2\right]$$

$$= \frac{n}{2}(2\,n^2 + 3\,n + 1)$$

$$= \frac{n}{2}(n+1)\,.\,(2\,n+1)$$

$$S\,n^2 = \frac{n}{6}(n+1)\,.\,(2\,n+1)$$

F. *Progresiones aritméticas compuestas.*

236. Buscar la suma de la progresion aritmética que está compuesta de las dos progresiones siguientes:

3 5 7 9 ....(dif. 2)
5 8 11 14..................(dif. 3)

3.5 5.8 7.11 9.14..................

El último término de cada una de las progresiones simples hallaremos empleando la fórmula $t = a + (n-1)\,d$.

$t = 3 + (n-1)\,2 = 2n + 1$

$t = 5 + (n-1)\,3 = 3n + 2$

Luego el último término de la progresion compuesta será

$(2n+1).(3n+2) = 6n^2 + 7n + 2$

Escribiendo en lugar de n

1 , 2 , 3 , 4....n se sigue que

$t_1 = 6.1^2 + 7.1 + 2$

$t_2 = 6.2^2 + 7.2 + 2$

$t = 6n^2 + 7.n + 2$

$s = 6(1^2 + 2^2 .... + n^2) + 7(1+2 ... + n) + 2n$

$= 6\left[\frac{n}{6}(n+1).(2n+1)\right] + 7\left[\frac{n}{2}(n+1)\right] + 2n$

$= n(n+1).(2n+1) + \frac{7n}{2}(n+1) + 2n$

$= \frac{1}{2}[2n(n+1).(2n+1) + 7n(n+1) + 4n]$

$= \frac{n}{2}[2(n+1).(2n+1) + 7(n+1) + 4]$

$= \frac{n}{2}(4n^2 + 13n + 13)$

F. *Progresiones aritmético-geométricas.*

237. Buscar la suma de la progresion que está

compuesta de las dos progresiones siguientes:

$$\begin{array}{lllll} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{dif. } 1) \\ 1 & q & q^2 & q^3 & \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{coc. } q) \end{array}$$

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 \ldots\ldots + nq^{n-1}$$

Tenemos

$$s = 1 + 2q + 3q^2 \ldots\ldots + nq^{n-1}$$

$$sq = \quad q + 2q^2 \ldots\ldots + (n-1)q^{n-1} + nq^n$$

$$- \qquad - \qquad - \qquad - \qquad -$$

$$s - sq = 1 + q + q^2 \ldots\ldots + q^{n-1} - nq^n$$

$$s(1-q) = \frac{q^n - 1}{q-1} \text{ (Nº 231) } - nq^n$$

$$s = \frac{q^n - 1}{(q-1).(1-q)} - \frac{nq^n}{1-q}$$

$$= \frac{q^n - 1}{(q-1).(1-q)} - \frac{nq^n(q-1)}{(q-1).(1-q)}$$

$$= \frac{q^n - 1 - nq^n(q-1)}{q - q^2 - 1 + q}$$

$$= \frac{nq^n(q-1) - (q^n - 1)}{q^2 - 2q + 1}$$

$$= \frac{nq^n(q-1) - (q^n - 1)}{(q-1)^2}$$

ALFABETO GRIEGO.

Α	α	a	alfa
Β	β	b	beta
Γ	γ	g	gamma
Δ	δ	d	delta
Ε	ε	e	epsílon
Ζ	ζ	ds	zeta
Η	η	e	eta
Θ	ϑ	th	teta
Ι	ι	i	iota
Κ	κ	k	cappa
Λ	λ	l	lambda
Μ	μ	m	my
Ν	ν	n	ny
Ξ	ξ	x	xi
Ο	ο	o	omícron
Π	π	p	pi
Ρ	ρ	r	ro
Σ	σ ς	s	sigma
Τ	τ	t	tau
Υ	υ	u	ypsílon
Φ	φ	f	fi
Χ	χ	j	ji
Ψ	ψ	ps	psi
Ω	ω	o	oméga

FIN.

Imp. de J. Campuzano, por J. G. Almeida.